第25卷 第4期 自动化学报 Vol. 25, No. 4
1999年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jul., 1999

短文

# 广义系统稳态 Kalman 估值器[1)]

邓自立 刘玉梅
(黑龙江大学应用数学研究所 哈尔滨 150080) (中国民用航空学院航行系 天津 300300)

**摘 要** 用现代时间序列分析方法，提出了广义离散线性随机系统稳态 Kalman 滤波、平滑和预报的一种统一格式，给出了稳态 Kalman 估值器增益新算法，避免了求解 Riccati 方程. 为保证估值器的渐近稳定性，给出了选择初始估值的公式. 仿真例子说明了所提出的结果的有效性.

**关键词** 广义系统，稳态 Kalman 估值器，渐近稳定性，现代时间序列 分析方法.

# STEADY-STATE KALMAN ESTIMATORS FOR SINGULAR SYSTEMS

DENG Zili
(*Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University, Harbin* 150080)
LIU Yumei
(*Department of Flying, Civil Aviation Institute of China, Tianjin* 300300)

**Abstract** Using the modern time series analysis method, a unifying framework of steady-state Kalman filtering, smoothing and prediction for singular discrete linear stochastic systems, is presented. A new algorithm of steady-state Kalman estimator gain is given, where the solution of the Riccati equation is avoided. In order to ensure the asymptotic stability of the estimator, a formula of setting the initial estimate is given. A simulation example shows the effectiveness of the proposed results.

**Key words** Singular systems, steady-state Kalman estimators, asymptotic stability, modern time series analysis method.

## 1 引言

广义系统在电网络，经济系统，机器人等领域广泛存在，近年来尤为人们所关注. 文献

1) 国家自然科学基金资助项目(69774019)
收稿日期 1997-09-29 收到修改稿日期 1998-07-22

[1]的广义 Kalman 预报器要求解 Riccati 方程. 文献[2]的广义 Kalman 估值器不能处理带相关噪声系统，稳态估值器增益算法是隐式的，且没完全解决估值器的渐近稳定性问题. 本文结果克服了上述缺点和局限性. 考虑广义离散随机系统

$$Mx(t+1)=\Phi x(t)+\Gamma w(t), \tag{1}$$

$$y(t)=Hx(t)+v(t), \tag{2}$$

其中状态 $x(t)\in R^n$，观测 $y(t)\in R^m$，$w(t)\in R^r$.

**假设1.** $M$ 是奇异方阵，且 $\det(zM-\Phi)\neq 0$.

**假设2.** 系统是完全可观的，即 $\forall\ z\in C$，

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} zM-\Phi \\ H \end{bmatrix}=n, \qquad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} M \\ H \end{bmatrix}=n. \tag{3}$$

**假设3.** $w(t)$和$v(t)$是带零均值的相关白噪声：

$$\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w'(j) & v'(j) \end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix} Q_w & S \\ S' & Q_v \end{bmatrix}\delta_{tj},\begin{bmatrix} Q_w & S \\ S' & Q_v \end{bmatrix}>0, \tag{4}$$

其中 E 为数学期望，$'$ 为转置号，$\delta_{tt}=1$，$\delta_{tj}=0(t\neq j)$.

问题是由观测$(y(0),\cdots,y(t+N))$求状态 $x(t)$的稳态 Kalman 估值器 $\hat{x}(t|t+N)$. 对 $N=0$，$N>0$，或 $N<0$，称其为广义 Kalman 滤波器，平滑器或预报器.

## 2 ARMA 新息模型和引理

由式(1)和(2)有 $y(t)=H(M-q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma q^{-1}w(t)+v(t)$，其中 $q^{-1}$为单位滞后算子. 由假设1有左素分解

$$H(M-q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma q^{-1}=A^{-1}(q^{-1})B(q^{-1})q^{\tau}, \tag{5}$$

式中 $A(q^{-1})$，$B(q^{-1})$为形如 $X(q^{-1})=X_0+X_1q^{-1}+\cdots+X_{n_x}q^{-n_x}$的多项式矩阵，且 $A_0=I_m$，$B_0\neq 0$，$\tau$ 为整数. 利用(5)并置 $D(q^{-1})\varepsilon(t)=B(q^{-1})q^{\tau}w(t)+A(q^{-1})v(t)$，则有 ARMA 新息模型

$$A(q^{-1})y(t)=D(q^{-1})\varepsilon(t), \tag{6}$$

其中 $D(q^{-1})$是稳定的，$D_0=I_m$，新息 $\varepsilon(t)$是零均值、方差阵为 $Q_\varepsilon$ 的白噪声. $D(q^{-1})$和 $Q_\varepsilon$ 可用 Gevers 和 Wouters[3]算法求得. $\varepsilon(t)$可由(6)取初值$(\varepsilon(0),\cdots,\varepsilon(n_d-1))$递推计算为

$$\varepsilon(t)=A(q^{-1})y(t)-D_1\varepsilon(t-1)-\cdots-D_{n_d}\varepsilon(t-n_d),t=n_d,n_d+1,\cdots \tag{7}$$

**引理1**[4]. 对任意整数 $t,j$ 有

$$\mathrm{E}[w(t)\varepsilon'(j)]=\Pi_{j-t}, \qquad \Pi_i=Q_wF'_{i+(\tau\vee 0)}+SG'_{i+(\tau\vee 0)}, \tag{8}$$

$$\mathrm{E}[v(t)\varepsilon'(j)]=\Lambda_{j-t}, \qquad \Lambda_i=Q_vG'_{i+(\tau\vee 0)}+S'F'_{i+(\tau\vee 0)}, \tag{9}$$

$$\mathrm{E}[y(t)\varepsilon'(j)]=M_{t-j}Q_\varepsilon, \tag{10}$$

其中定义 $a\vee b=\max(a,b)$，$a\wedge b=\min(a,b)$；且有递推公式

$$F_i=-D_1F_{i-1}-\cdots-D_{n_d}F_{i-n_d}+\bar{B}_i, \quad F_i=O(i<0),\bar{B}_i=O(i>n_{\bar{b}}), \tag{11}$$

$$G_i=-D_1G_{i-1}-\cdots-D_{n_d}G_{i-n_d}+\bar{A}_i, \quad G_i=O(i<0),\bar{A}_i=O(i>n_{\bar{a}}), \tag{12}$$

$$M_i=-A_1M_{i-1}-\cdots-A_{n_a}M_{i-n_a}+D_i, \quad M_i=O(i<0),D_i=O(i>n_d), \tag{13}$$

式中定义 $\bar{B}(q^{-1})=B(q^{-1})q^{(\tau\wedge 0)}$，$\bar{A}(q^{-1})=A(q^{-1})q^{(-\tau\wedge 0)}$.

**引理2**[4]. 对任意整数 $N$,有白噪声估值器

$$\hat{w}(t|t+N)=\sum_{i=(-\tau\wedge 0)}^{N}\Pi_i Q_\varepsilon^{-1}\varepsilon(t+i),\quad \hat{v}(t|t+N)=\sum_{i=(-\tau\wedge 0)}^{N}\Lambda_i Q_\varepsilon^{-1}\varepsilon(t+i),\tag{14}$$

**引理3**[3]. $y(t+i)$的最优递推预报器为

$$A(q^{-1})\hat{y}(t+j|t)=D(q^{-1})\varepsilon(t+j),\quad j=1,\cdots,i\tag{15}$$

式中规定 $A(q^{-1})$只对时标$(t+j)$运算,$\hat{y}(j|t)=y(j)(j\leqslant t)$,$\varepsilon(t+j)=0(j>0)$.

**引理4**[5]. (3)式等价于 $\Omega$ 是列满秩矩阵,

$$\Omega=\begin{bmatrix}M & -\Phi & \cdots 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots M & -\Phi\\ H & 0 & \cdots 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots 0 & H\end{bmatrix},\tag{16}$$

式中 $\Omega$ 是$[(\beta-1)n+\beta m]\times\beta n$ 阵,$\beta$ 叫可观测性指数,它是使 $\Omega$ 列满秩的最小自然数.

因 $\Omega$ 列满秩,则伪逆 $\Omega^{\#}=(\Omega'\Omega)^{-1}\Omega'$. 将 $\Omega^{\#}$分块为

$$\Omega^{\#}=\begin{bmatrix}\Omega_1^{(1)} & \cdots & \Omega_{\beta-1}^{(1)} & \Omega_0^{(2)} & \cdots & \Omega_{\beta-1}^{(2)}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\end{bmatrix},\tag{17}$$

其中 $\Omega_i^{(1)}$ 为 $n\times n$ 阵,$\Omega_i^{(2)}$ 为 $n\times m$ 阵.

**引理5**. 对完全可观系统(1)和(2),$x(t)$可表示为

$$x(t)=\sum_{i=1}^{\beta-1}\Omega_i^{(1)}\Gamma w(t-i)+\sum_{i=0}^{\beta-1}\Omega_i^{(2)}[y(t-i)-v(t-i)].\tag{18}$$

证明. 仿文献[6]得证. 从略.

## 3　主要结果

**定理1**. 广义系统(1)和(2)在假设1—3下,有统一的稳态 Kalman 估值器

$$\begin{aligned}\hat{x}(t|t+N)=&\Psi_1\Phi\hat{x}(t-1|t-1+N)+\Psi_1\Gamma\hat{w}(t-1|t-1+N)\\&+\Psi_1 MK_N\varepsilon(t+N)+\Psi_2\hat{y}(t|t+N)-\Psi_2\hat{v}(t|t+N),\end{aligned}\tag{19}$$

其中 $\Psi_1=(M'M+H'H)^{-1}M'$,$\Psi_2=(M'M+H'H)^{-1}H'$,增益

$$K_N=\sum_{i=1}^{\beta-1}\Omega_i^{(1)}\Gamma\Pi_{N+i}Q_\varepsilon^{-1}+\sum_{i=0}^{\beta-1}\Omega_i^{(2)}[M_{-i-N}-\Lambda_{N+i}Q_\varepsilon^{-1}].\tag{20}$$

证明. 由射影公式[3]和 $\varepsilon(t)$的正交性有

$$\hat{x}(t|t+N)=\hat{x}(t|t+N-1)+K_N\varepsilon(t+N),$$
$$K_N=E[x(t)\varepsilon'(t+N)]Q_\varepsilon^{-1}.\tag{21}$$

将式(18)代入 $K_N$ 中并利用式(8)—(10)得式(20). 式(19)的证明类似于文献[2],从略.

注意式(19)和(7),$\hat{x}(t|t+N)$的值与初始估值 $\hat{x}(t_0|t_0+N)$和新息初值$(\varepsilon(0),\cdots,\varepsilon(n_d-1))$两者有关. 若 $\Psi_1\Phi$ 是稳定的矩阵,则 $\hat{x}(t|t+N)$关于这两种初值是渐近稳定的[2]. 若 $\Psi_1\Phi$ 为不稳定矩阵,则可适当选择 $\hat{x}(t_0|t_0+N)$使式(19)关于新息初值是渐近稳定的.

**定理2.** 广义系统(1)和(2)在假设1—3下,若(19)的初值选取为

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t_0|t_0+N)=\sum_{i=1}^{\beta-1}\Omega_i^{(1)}\Gamma\hat{\boldsymbol{w}}(t_0-i|t_0+N)+\sum_{i=0}^{\beta-1}\Omega_i^{(2)}[\hat{\boldsymbol{y}}(t_0-i|t_0+N)-\hat{\boldsymbol{v}}(t_0-i|t_0+N)], \tag{22}$$

则(19)关于新息初值是渐近稳定的.

证明. 由式(18)和射影性质有非递推估值器

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t|t+N)=\sum_{i=1}^{\beta-1}\Omega_i^{(1)}\Gamma\hat{\boldsymbol{w}}(t-i|t+N)+\sum_{i=0}^{\beta-1}\Omega_i^{(2)}[\hat{\boldsymbol{y}}(t-i|t+N)-\hat{\boldsymbol{v}}(t-i|t+N)]. \tag{23}$$

若式(19)的初值取式(23)在 $t=t_0$处的值,即式(22),由射影唯一性,则式(19)与(23)在数值上是恒等的. 文献[4]证明了式(23)关于新息初值是渐近稳定的,故式(19)亦然.

## 4 仿真例子

考虑带相关噪声的广义系统

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t+1)=\begin{bmatrix}1&-0.2\\-1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\0.1\end{bmatrix}w(t), \tag{24}$$

$$y(t)=[0.1\quad 2]x(t)+v(t),\qquad v(t)=\alpha w(t)+\xi(t), \tag{25}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)=[x_1(t),x_2(t)]'$,$n=2$,$m=1$,$\beta=2$,$\alpha=-0.3$. $w(t)$和 $v(t)$是零均值,方差各为 $\sigma_w^2=1$,$\sigma_\xi^2=0.4$的独立的高斯白噪声. 对 $N=1$,由式(20)可求得 $K_1=[0.098108, 0.063439]'$. 易验证 $\Psi_1\Phi$ 不稳定,故取 $t_0=1$,由式(22)可求得初值 $\hat{\boldsymbol{x}}(1|2)=[-0.067012,-0.056160]'$. 应用式(19)$\hat{\boldsymbol{x}}(t|t+1)$的仿真结果如图1和图2所示.

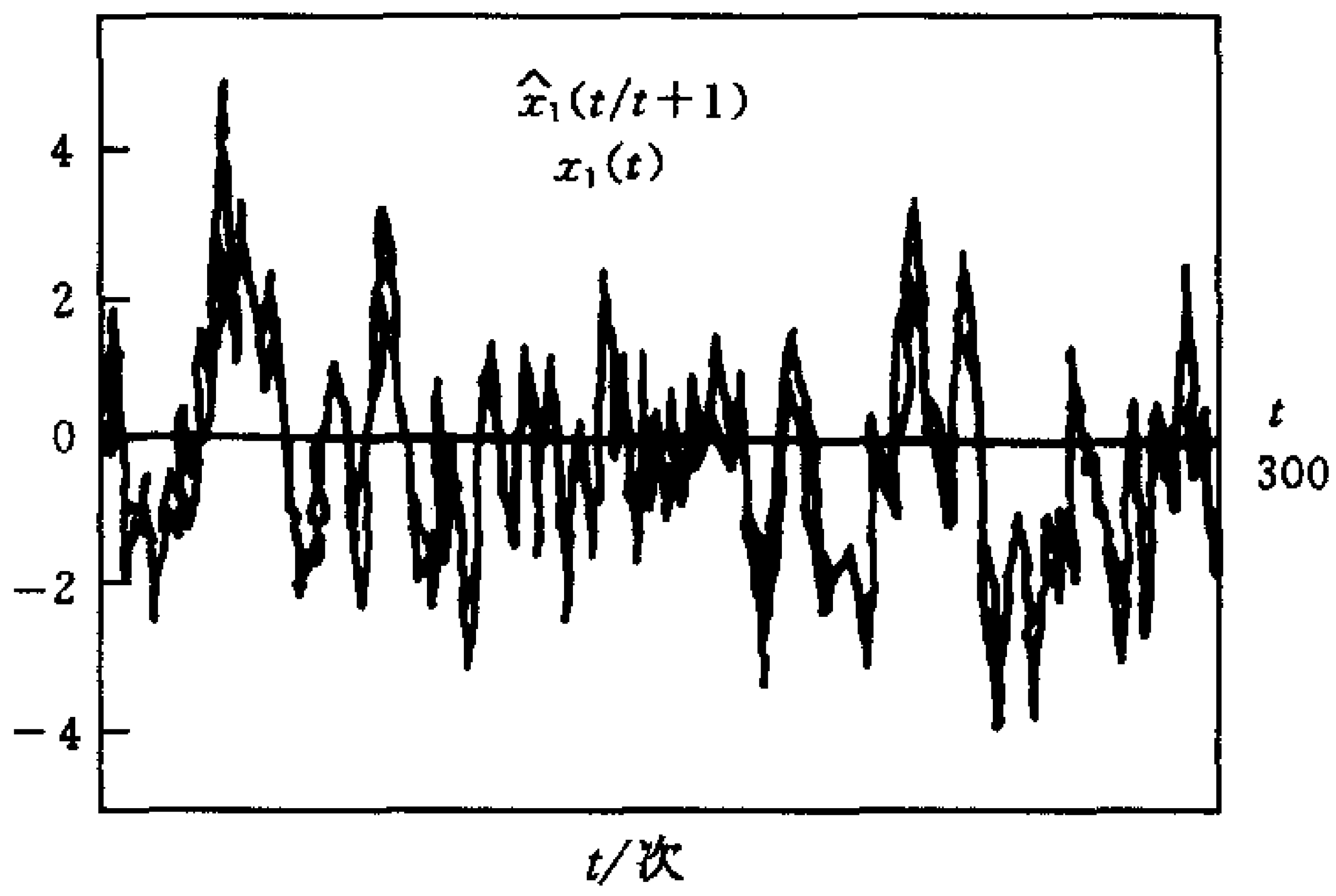

图1 $x_1(t)$和稳态 Kalman 平滑器 $\hat{x}_1(t|t+1)$

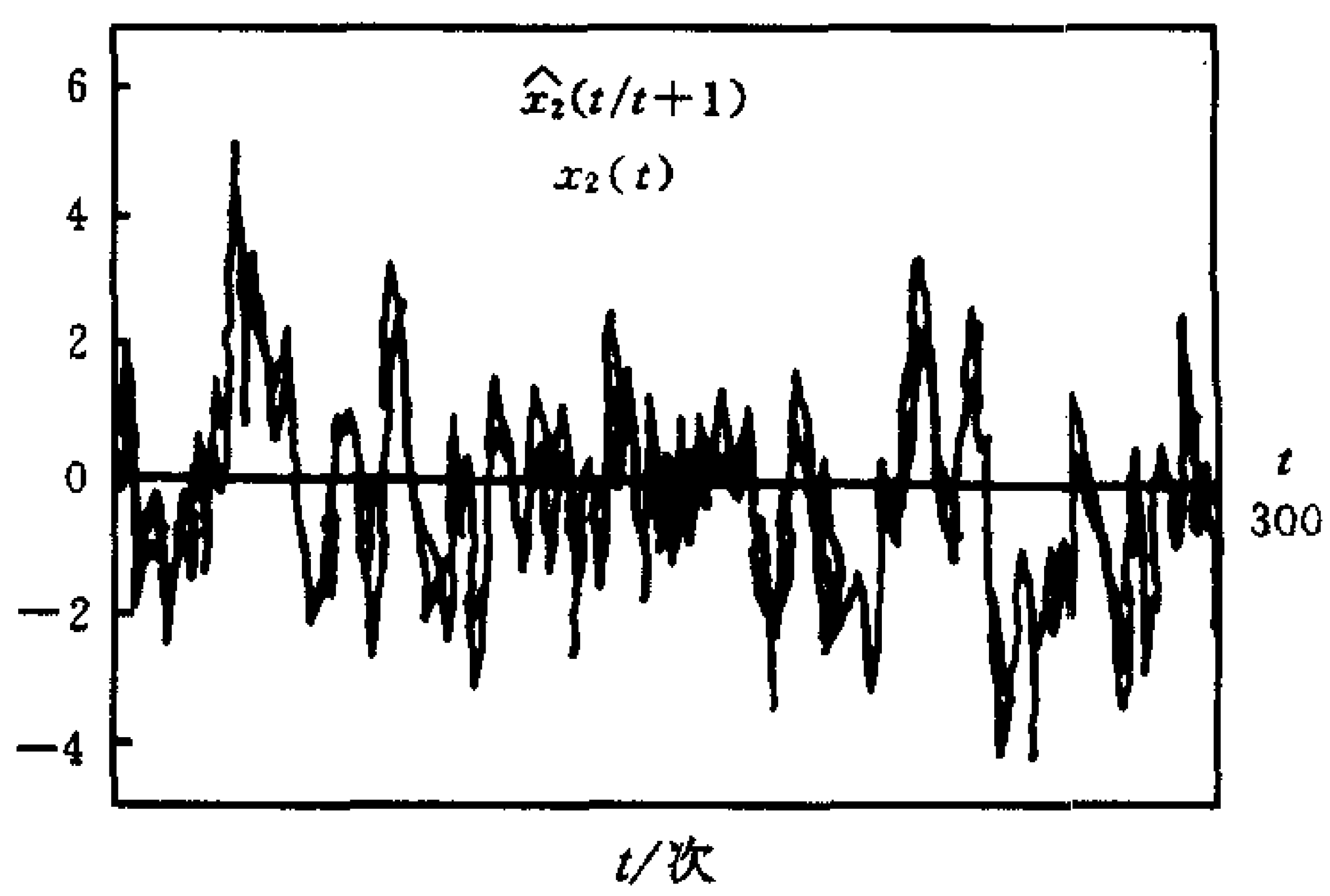

图2 $x_2(t)$和稳态 Kalman 平滑器 $\hat{x}_2(t|t+1)$

# 参 考 文 献


1 Nikoukhah R, Willsky A S, Bernard C L. Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1992, **AC−37**: 1325—1341

2 张焕水,柴天佑. 广义离散随机线性系统最优递推估计. 控制与决策, 1996, **11**(5): 538—544

3 邓自立,郭一新.现代时间序列分析及其应用.北京:知识出版社,1989,54—70

4 Deng Z L, Zhang H S ,Liu S J *et al*. Optimal and self-tuning white noise estimators with applications to deconvolution and filtering problems. *Automatica*, 1996,**32**(2):199—216

5 Darouach M, Zasadzinski M ,Mehd D.. State estimation of stochastic singular linear systems. *Int. J. Systems Science*, 1993,**24**(2):345—354

6 邓自立,刘玉梅.一类稳态 Kalman 滤波器及其渐近稳定性.信息与控制,1998,**27**(1):26—31

**邓自立** 1938年生,1962年毕业于黑龙江大学数学系.现为黑龙江大学应用数学研究所教授.主要研究领域为状态估计,最优滤波,信号处理,反卷积等.发表论文150余篇.

**刘玉梅** 1971年生,1997年于黑龙江大学获自动控制理论及应用专业硕士学位,现为中国民航学院航行系教师,主要研究领域为状态估计、Kalman 滤波等.