

基于三角网格模型多分辨分解的图像压缩

李文舜 李介谷

(上海交通大学图像处理与模式识别研究所 上海 200030)

摘要 构造了图像的三角网格模型. 基于三角网格模型的多分辨分解, 提出了一个新的图像压缩方法. 通过图像的三角网格模型的多分辨分解、压缩与重构, 实现了图像的多分辨分解、压缩与重构. 构造了一个在小波图像压缩中未曾使用过的小波滤波器组, 该小波滤波器组算法具有 $O(n)$ 运行时间. 实验表明, 该方法能获得较好的图像压缩性能.

关键词 三角网格, 图像压缩, 多分辨分析, 小波滤波器组, 尺度空间.

IMAGE COMPRESSION USING MULTIREOLUTION DECOMPOSITION OF TRIANGULAR MESH MODEL

LI Wenshun LI Jiegu

(Institute of Image Processing & Pattern Recognition, Shanghai Jiaotong Univ., Shanghai 200030)

Abstract In this paper, a triangular mesh model of image is constructed. Based on multiresolution decomposition of the triangular mesh model, a new image compression method is proposed. Multiresolution decomposition, compression and reconstruction of image are implemented through multiresolution analysis of the triangular mesh model of image. A new wavelet filter bank is constructed, which has never been used in wavelet image compression before. The filter bank algorithm has $O(n)$ running time. The experimental results show that the proposed method can achieve satisfactory image compression performance.

Key words Triangular mesh, image compression, multiresolution analysis, wavelet filter bank, scalar space.

1 引言

小波分析在图像处理领域中(包括图像压缩领域)受到高度地重视, 其原理在文献[1—4]中作过研究, 就是把输入信号分层次地分解为低分辨率的平滑信号和小波细节信号. 在每层当中, 平滑信号和小波细节信号都包含有重构更高分辨层的信息. 通常小波系数较小, 可达到压缩的目的. 在图像压缩中, 由于所使用的尺度函数及小波函数的不同, 因而有不同的小波滤波器. 如9/7拍(Tap)滤波器^[5]、D4滤波器^[2]及 Haar 滤波器^[6]. 本文所使用的尺度函数和小波函数为分段线性函数, 由此所构造的四个滤波器(两个分解滤波器和两个合成滤波器)为稀疏矩阵, 该滤波器算法具有 $O(n)$ 运行时间. 另外, 在图像压缩中所使用的二维小波通常为一维小波

的张量积^[7]. 而本文所构造的小波可用于分解定义在细分连续性的任意拓扑域上的函数, 其分解过程如一维小波的情况. 三角网格分解可用于多面体压缩、动画的分层控制、曲面的多分辨率编辑等^[8]. 本文以图像灰度作为高度构造一个图像的三角网格模型来实现图像分解、压缩及重构, 这也可看作其应用之一.

2 图像的三角网格模型及尺度函数选取

多分辨分析的研究对象实际上是函数和函数空间. 因此, 图像作为一个信号在分解之前, 必须将其定义为某个域上的函数. 图像通常为定义在矩形域上的二维函数: $I = g(x, y)$, 其中 x, y 分别为水平和垂直方向的像素位置. 这里将图像定义在如图1所示的细分连续性三角域上, 每个像素点都对应于一个相同位置的三角顶点. 若三角顶点以像素灰度值作为高度, 则构成图像的三角网格模型. 对于非方形或方形但不细分连续的图像, 可将三角域扩张为细分连续的三角域. 对于扩张区域内的三角顶点对应的高度值置为零. 由于这一区域内完全是平坦的, 所以三角网格多分辨分解后对应于这一区域的小波系数为零, 因而对压缩没有多大影响. 在三角网格重构后, 只取图像所对应的区域来恢复图像. 由三角网格恢复图像时, 只需将像素的灰度值取为三角顶点的高度值即可.

针对图像的三角网格模型, 也可如文献[8]一样以分段线性函数作为尺度函数. 相应于每个三角域顶点有一个如图2所示的尺度函数 $\phi_i(x)$. 它在三角顶点 i 的值为1, 而在它的所有邻点都递减为0, 在其它地方全为0. 显然, 对于第 j 层三角网格 $M^j(x)$ 可表示如下:

$$M^j(x) = \sum \phi_i(x) \cdot V_i, \quad (1)$$

其中 x 属于三角域, V_i 为三角网格顶点 i 的高度值. 可见, 第 j 层任意三角网格都包含在 $\phi_i(x)$ 所张成的空间中, $\phi_i(x)$ 确定为第 j 层任意三角网格的一组基. 尺度空间的嵌套性是多分辨分析的一个重要属性. 若设 V^j 为 $\phi_i(x)$ 张成的尺度空间, V^{j+1} 为 $\phi_k^{j+1}(x)$ 张成的尺度空间. 显而易见, $\phi_i^j(x) = \phi_i^{j+1}(x) + 1/2 \sum \phi_k^{j+1}(x)$, 其中 k 为顶点 i 在第 $j+1$ 层的相邻顶点. 因此, $V^j \subset V^{j+1}$ 尺度空间具有嵌套性.

有了嵌套的尺度空间, 就可在空间中定义内积, 以分辨空间及函数的正交性. 对于 $f, g \in V^j$, 给出内积如下:

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) \cdot g(x) dx, \quad (2)$$

其中积分域为整个三角域.

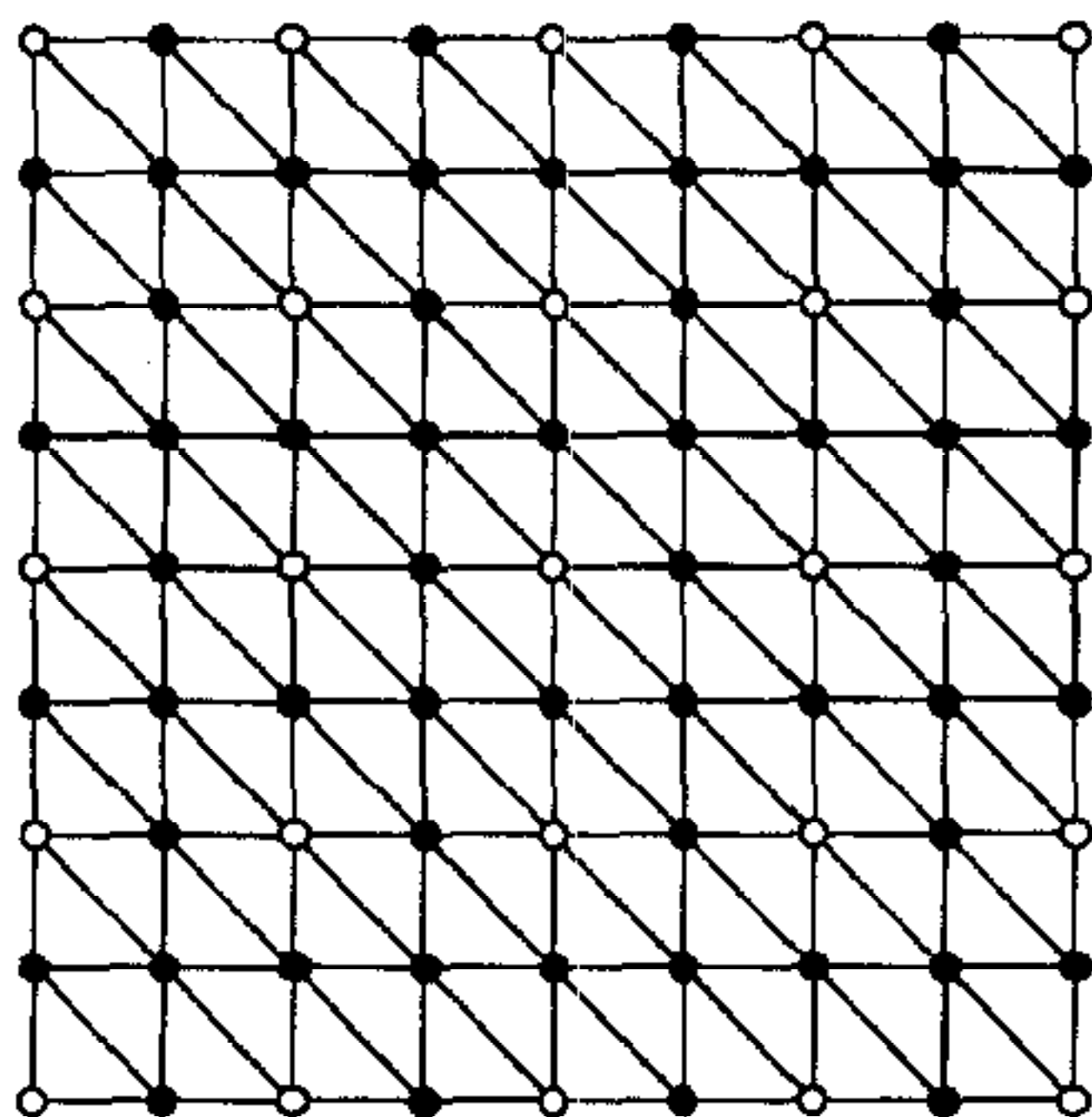


图1 细分连续的三角域

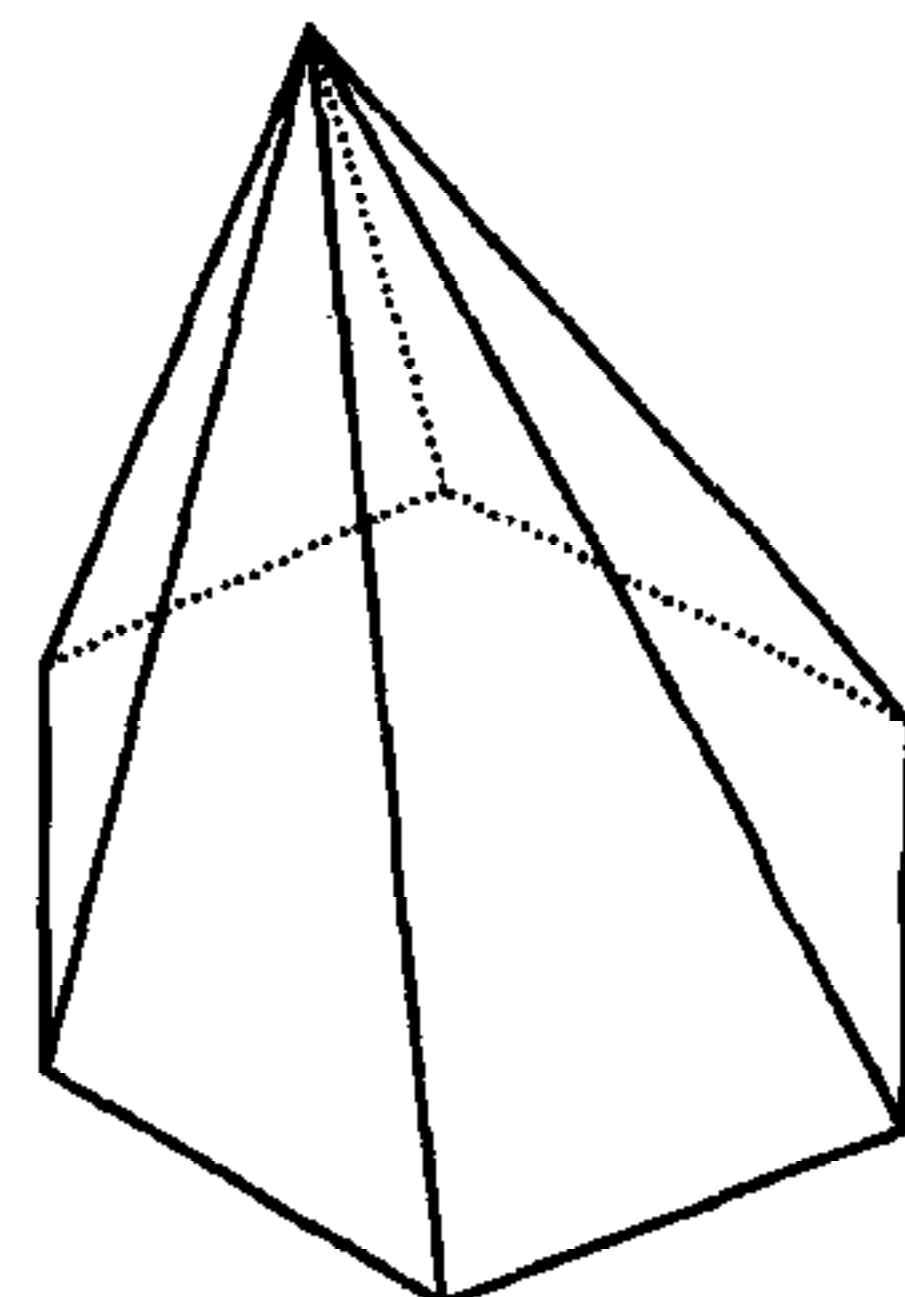


图2 具有六个邻点的顶点 i 的尺度函数 $\phi_i(x)$

3 小波

3.1 小波构造

构造了嵌套的尺度空间并在其中定义了内积,就可在 V^{j+1} 空间中构造小波 $\Psi^j = (\psi_0^j(\mathbf{x}), \psi_1^j(\mathbf{x}), \psi_2^j(\mathbf{x}) \dots)$. Ψ^j 所构成的空间 W^j 为 V^j 在 V^{j+1} 中的正交补空间. 设 Φ^{j+1} 为 V^{j+1} 的基, 则 $\Phi^{j+1} = (O^{j+1}(\mathbf{x}), N^{j+1}(\mathbf{x}))$. $O^{j+1}(\mathbf{x})$ 由所有对应于旧顶点(图1中的白点)的尺度函数构成, 而 $N^{j+1}(\mathbf{x})$ 由所有对应于新顶点(图1中的黑点)的尺度函数构成. 这里将小波构造分两步进行. 首先, 以 $(\Phi^j, N^{j+1}(\mathbf{x}))$ 作为 V^{j+1} 的基. 由于 $(\Phi^j, N^{j+1}(\mathbf{x}))$ 能与 $(O^{j+1}(\mathbf{x}), N^{j+1}(\mathbf{x}))$ 相互线性表示, 故它也是 V^{j+1} 的基. 因此对于 V^{j+1} 中的任意三角网格函数 $M^{j+1}(\mathbf{x})$ 都可表示为 $\Phi^j \cdot P^j + N^{j+1}(\mathbf{x}) \cdot Q^j$. 若将 $N^{j+1}(\mathbf{x})$ 的系数置为0, 则 $\Phi^j \cdot P^j$ 为 $M^{j+1}(\mathbf{x})$ 在 V^j 空间的一个逼近, 但不是最佳逼近.

为了得到最佳逼近, 可计算 $N^{j+1}(\mathbf{x})$ 在 W^j 空间的投影, 其投影为 Ψ^j . 用矩阵表示如下:

$$N^{j+1}(\mathbf{x}) = \Psi^j + \Phi^j \cdot a^j. \quad (3)$$

如果 $M^{j+1}(\mathbf{x})$ 以 (Φ^j, Ψ^j) 为基来表示, 则消除 Ψ^j 的系数即可得到它的 V^j 空间的最佳逼近.

3.2 小波计算

由式(3)知, 求出 a^j 即可求出小波函数. 这里针对顶点 i (指第 $j+1$ 层的新顶点) 求 $\phi_i^j(\mathbf{x})$. 由式(3)得

$$\phi_i^j(\mathbf{x}) = N_i^{j+1}(\mathbf{x}) - \sum \phi_k^j(\mathbf{x}) \cdot \alpha_k^j, \quad (4)$$

式中 k 为第 $j+1$ 层的旧顶点.

为了实际应用的需要, 小波的局部支撑性是小波构造时必须考虑的问题. 为此, 对于式(4)中远离 $N_i^{j+1}(\mathbf{x})$ 的 $\phi_k^j(\mathbf{x})$ 的系数置为0, 若只取与 $N_i^{j+1}(\mathbf{x})$ 相邻的 $\phi_k^j(\mathbf{x})$ 的系数为非0, 则称小波长度为1. 表示为下式:

$$\phi_i^j(\mathbf{x}) = N_i^{j+1}(\mathbf{x}) - \phi_m^j(\mathbf{x}) \cdot a_m^j - \phi_n^j(\mathbf{x}) \cdot a_n^j, \quad (5)$$

式中 m, n 为与 i 相邻的两个第 $j+1$ 层旧顶点.

根据 m, n 所在位置的不同, 可分七种情况求出对应的七组 a_m^j, a_n^j . 这七种情况为

- 1) m, n 分别在相邻的两条边缘上;
- 2) m, n 在同一条边缘上;
- 3) m 为两边缘与对角线的交叉点, n 在网格内;
- 4) m 为两边缘与对角线的交叉点, n 在边缘上;
- 5) m 在边缘上, n 在网格内;
- 6) m, n 均在网格内;
- 7) m 为两边缘的交叉点且不在对角线上, n 在边缘上.

根据以上七种情况可列出七组方程求取对应的七组 a_m^j, a_n^j 其中第6)种情况为在三角域内部的情况, 是最一般的情况. 这种情况下的方程组为

$$\begin{cases} 0 = \frac{5}{4} - 6a_m^j - a_n^j, \\ 0 = \frac{5}{4} - a_m^j - 6a_n^j. \end{cases} \quad (6)$$

由上式求得 $a_m^j = a_n^j = 5/28$, 各种情况所求得的 a_m^j, a_n^j 见表1.

表1 各种情况下的 a_m^j, a_n^j 值

情况类号	1	2	3	4	5	6	7
a_m^j	5/16	5/28	25/44	25/92	25/68	5/28	25/44
a_n^j	5/16	5/28	5/44	15/92	5/34	5/28	5/44

3.3 滤波器算法

对于 V^{j+1} 空间中的三角网格 $M^{j+1}(\mathbf{x})$, 其分解过程实际上就是由以 $(O^{j+1}(\mathbf{x}), N^{j+1}(\mathbf{x}))$ 为基的表示求取以 (Φ^j, Ψ^j) 为基的表示. 分解过程如下:

$$\begin{aligned} M^{j+1}(\mathbf{x}) &= \sum \phi_i^{j+1}(\mathbf{x}) \cdot V_i^{j+1} = \sum N_i^{j+1}(\mathbf{x}) \cdot N_i^{j+1} + \sum O_k^{j+1}(\mathbf{x}) \cdot O_k^{j+1} = \\ &= \sum N_i^{j+1}(\mathbf{x}) \cdot N_i^{j+1} + \sum (\phi_k^j(\mathbf{x}) - 1/2 \sum N_{ki}^{j+1}(\mathbf{x})) \cdot O_k^{j+1} = \\ &= \sum N_i^{j+1}(\mathbf{x}) \cdot (N_i^{j+1} - 1/2 O_{im}^{j+1} - 1/2 O_{in}^{j+1}) + \sum \phi_k^j(\mathbf{x}) \cdot O_k^{j+1}; \end{aligned} \quad (7)$$

令 $N_i^{j+1} - 1/2 O_{im}^{j+1} - 1/2 O_{in}^{j+1} = W_i^j$, 由式(7)得

$$\begin{aligned} M^{j+1}(\mathbf{x}) &= \sum (\phi_i^j(\mathbf{x}) + \phi_{im}^j(\mathbf{x}) \cdot a_{im}^j + \phi_{in}^j(\mathbf{x}) \cdot a_{in}^j) \cdot W_i^j + \sum \phi_k^j(\mathbf{x}) \cdot O_k^{j+1} = \\ &= \sum (\phi_i^j(\mathbf{x}) \cdot W_i^j + \sum \phi_k^j(\mathbf{x}) \cdot (O_k^{j+1} + \sum a_{ki}^j \cdot W_{ki}^j)) = \\ &= \Psi^j \cdot W^j + \Phi^j \cdot V^j, \end{aligned}$$

其中 W^j, V^j 可表示为如下形式:

$$V^j = A \cdot V^{j+1}, \quad W^j = B \cdot V^{j+1}.$$

由于 $W_i^j = N_i^{j+1} - 1/2 O_{im}^{j+1} - 1/2 O_{in}^{j+1}$, 故 B 为稀疏矩阵. 而在 $V_k^j = O_k^{j+1} + \sum a_{ki}^j \cdot W_{ki}^j$ 中, 点 ki (即点 k 在第 $j+1$ 层的邻点) 的个数不超过6, 故 A 也为稀疏矩阵. A, B 作为分解滤波器具有 $O(n)$ 运行时间.

重构过程是分解过程的逆过程, 即在三角网格 $M^j(\mathbf{x}) = \sum \phi_i^j(\mathbf{x}) \cdot V_i^j$ 中加入小波细节信号 $\sum \phi_i^j(\mathbf{x}) \cdot W_i^j$ 来获得 $M^{j+1}(\mathbf{x}) = \sum \phi_i^{j+1}(\mathbf{x}) \cdot V_i^{j+1}$. 重构过程如下:

$$\begin{aligned} M^{j+1}(\mathbf{x}) &= \sum \phi_i^j(\mathbf{x}) \cdot W_i^j + \sum \phi_k^j(\mathbf{x}) \cdot V_k^j = \\ &= \sum (N_i^{j+1}(\mathbf{x}) - \phi_{im}^j(\mathbf{x}) \cdot a_{im}^j - \phi_{in}^j(\mathbf{x}) \cdot a_{in}^j) \cdot W_i^j + \sum \phi_k^j(\mathbf{x}) \cdot V_k^j = \\ &= \sum N_i^{j+1}(\mathbf{x}) \cdot W_i^j + \sum \phi_k^j(\mathbf{x}) \cdot (V_k^j - \sum a_{ki}^j \cdot W_{ki}^j); \end{aligned} \quad (8)$$

令 $P_k^j = V_k^j - \sum a_{ki}^j \cdot W_{ki}^j$, 则由式(8)得

$$\begin{aligned} M^{j+1}(\mathbf{x}) &= \sum N_i^{j+1}(\mathbf{x}) \cdot (W_i^j + 1/2 P_{im}^j + 1/2 P_{in}^j) + \sum O_k^{j+1}(\mathbf{x}) \cdot P_k^j = \\ &= \Phi^{j+1}(P \cdot V^j + Q \cdot W^j) = \Phi^{j+1} \cdot V^{j+1}, \end{aligned}$$

其中 $V^{j+1} = P \cdot V^j + Q \cdot W^j$ 即为三角网格重构, P, Q 称为重构滤波器矩阵, 它们也为稀疏矩阵. 该重构算法也为 $O(n)$ 运行时间.

4 实验结果

前面已对滤波器的设计过程作了比较详细的介绍. 为了考察这一滤波器组的性能, 作者在 SGI Indigo 2 Extreme 工作站作了一些实验. 图3(a)为 512×512 的“Lenna”灰度图像. 出于细分连续性的考虑, 这里所构造的三角域为 512×512 个顶点. 图3(b)~图3(f)为原图的5层最佳平方逼近, 其中图3(f)为原图的 $1/1024$ 逼近. 它们是经过分解滤波器后的各层的低频平滑信号, 包含着信号的绝大部分能量.

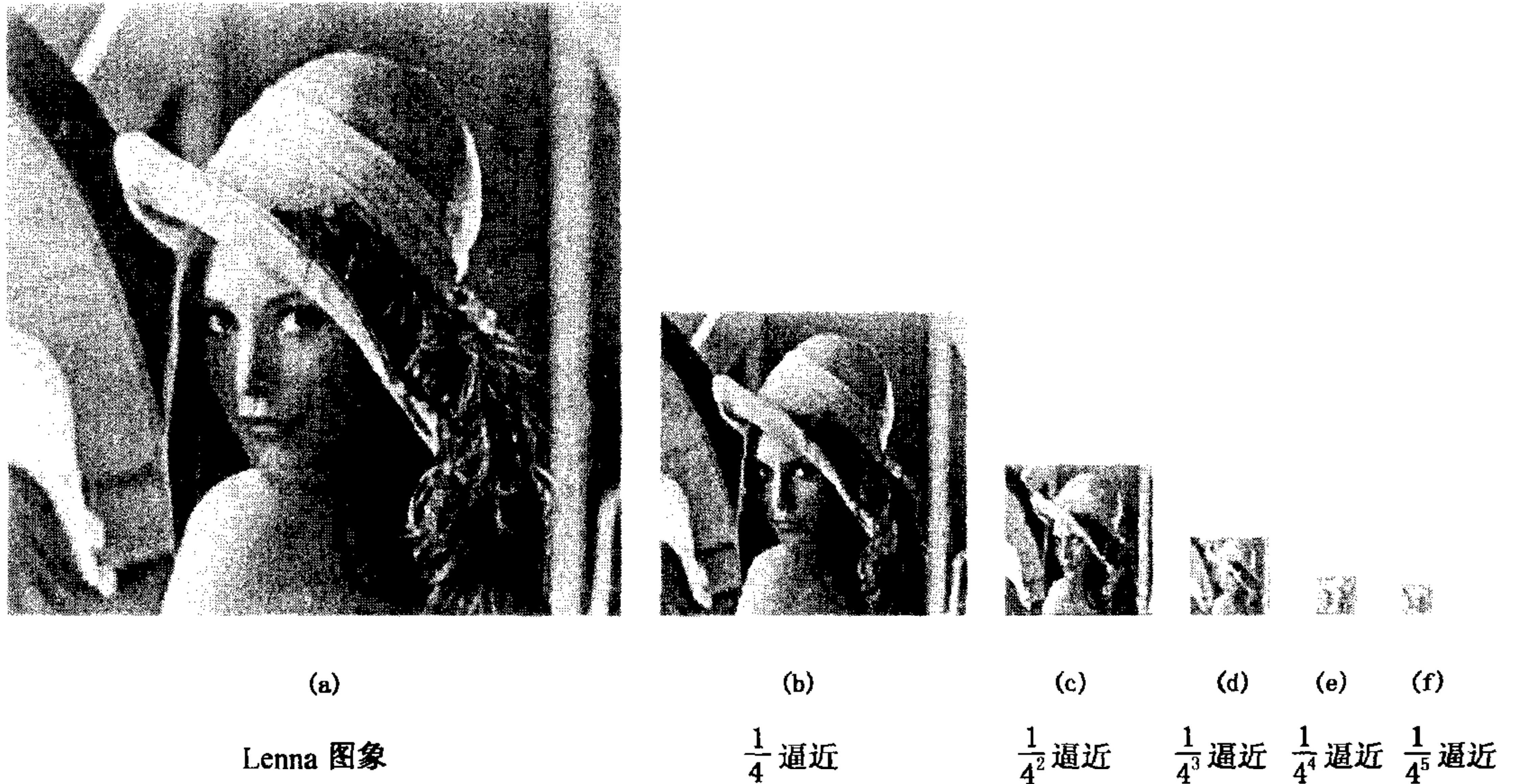


图3 Lenna 图像的多分辨分解过程

量化是为了减少信息熵, 以提高压缩率. 量化将较大的输入值集映射到较小的输出值集. 由于原始数据量化后不能得到精确的恢复, 因此这里只对包含少量能量的小波系数进行量化. 对于低频平滑信号(数据类型为浮点型)只将其映射到最接近的整数, 而不进行量化. 图像的平滑区域小波系数幅值很小, 即使消除这些小波系数, 重构图像也不会产生很大的失真. 在比较小波系数大小时, 不同层次的小波系数需进行归一化处理, 即 $W_i^j = W_i^j \cdot \|\psi_i(x)\|^2$. 对于归一化之后的小波系数, 若小于某个阈值 T , 则置为0; 若在阈值 T 之上, 则进行量化.

对分解后的数据量化之后就是编码, 这里采用的编码方法是行程编码与 Huffman 编码混合使用. 由于很多小波系数与阈值比较后变为0, 因此行程编码在此具有高效率. Huffman 编码能使数据冗余最小化.

解压重构图像质量这里用峰值信噪比来衡量, 其定义如下式:

$$\text{PSNR} = 20 \log \frac{f_{\max}}{\sqrt{\frac{\sum [f(x, y) - f_c(x, y)]^2}{N}}},$$

其中 f_{\max} 是图像灰度的最大值, $f(x, y)$ 是原图像灰度值, $f_c(x, y)$ 是重构图像灰度值, N 是图像像素总数. PSNR 越大, 说明解压重构图像质量越好.

对于图像压缩性能,这里用压缩率来衡量.其定义如下式:

$$CR = \frac{\text{原图像每像素位数}}{\text{解压重构图像每像素平均位数}}$$

图4(a)为解码后的低频平滑信号,相对于图3(f),它是无失真的.图4(b)—图4(f)是由图4(a)逐层加入经解码的小波系数的过程.重构图像图4(f)相对于原始图像图3(a),其压缩率 CR 为58,信噪比 PNSR 为31.2dB.具有较好的图像压缩性能和质量.

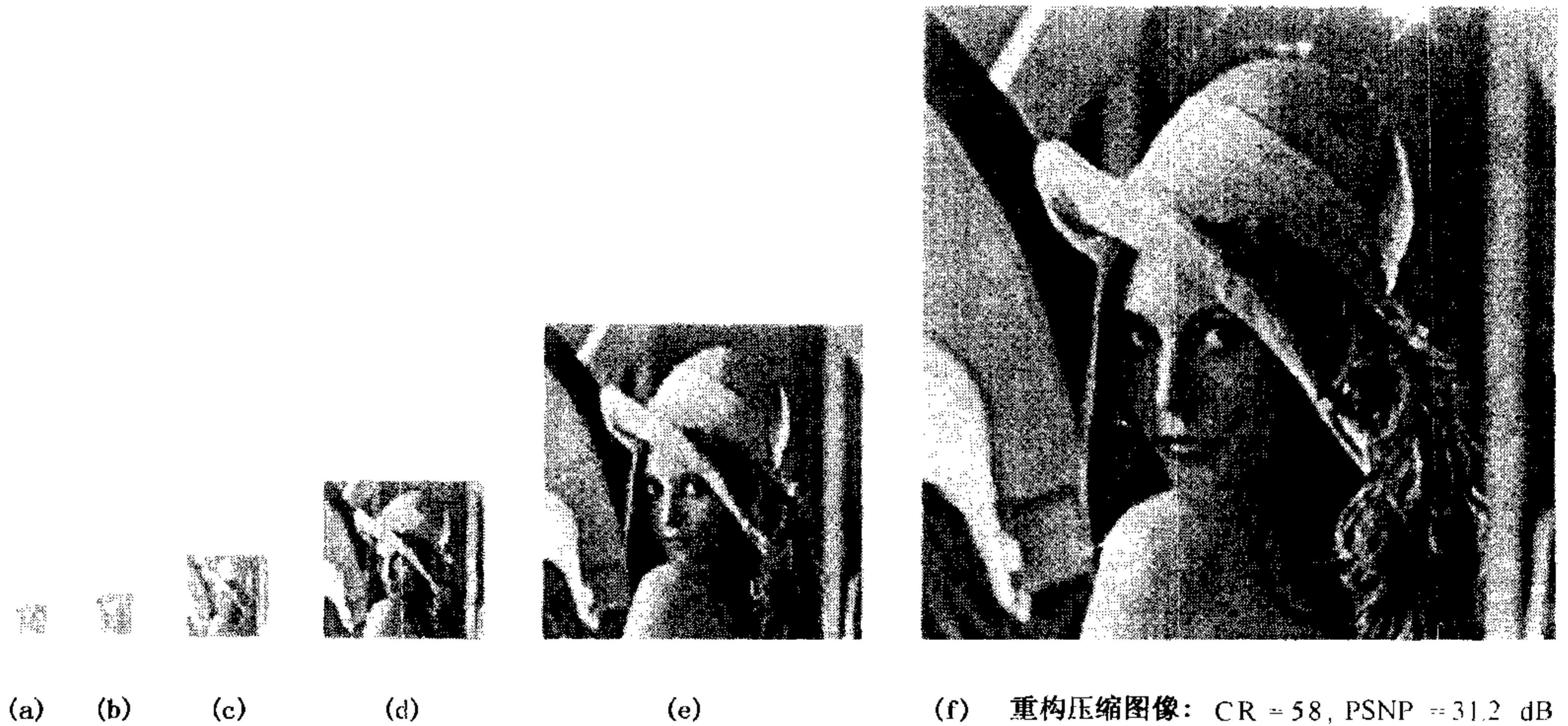


图4 由(a)逐层加小波细节的图像重构过程

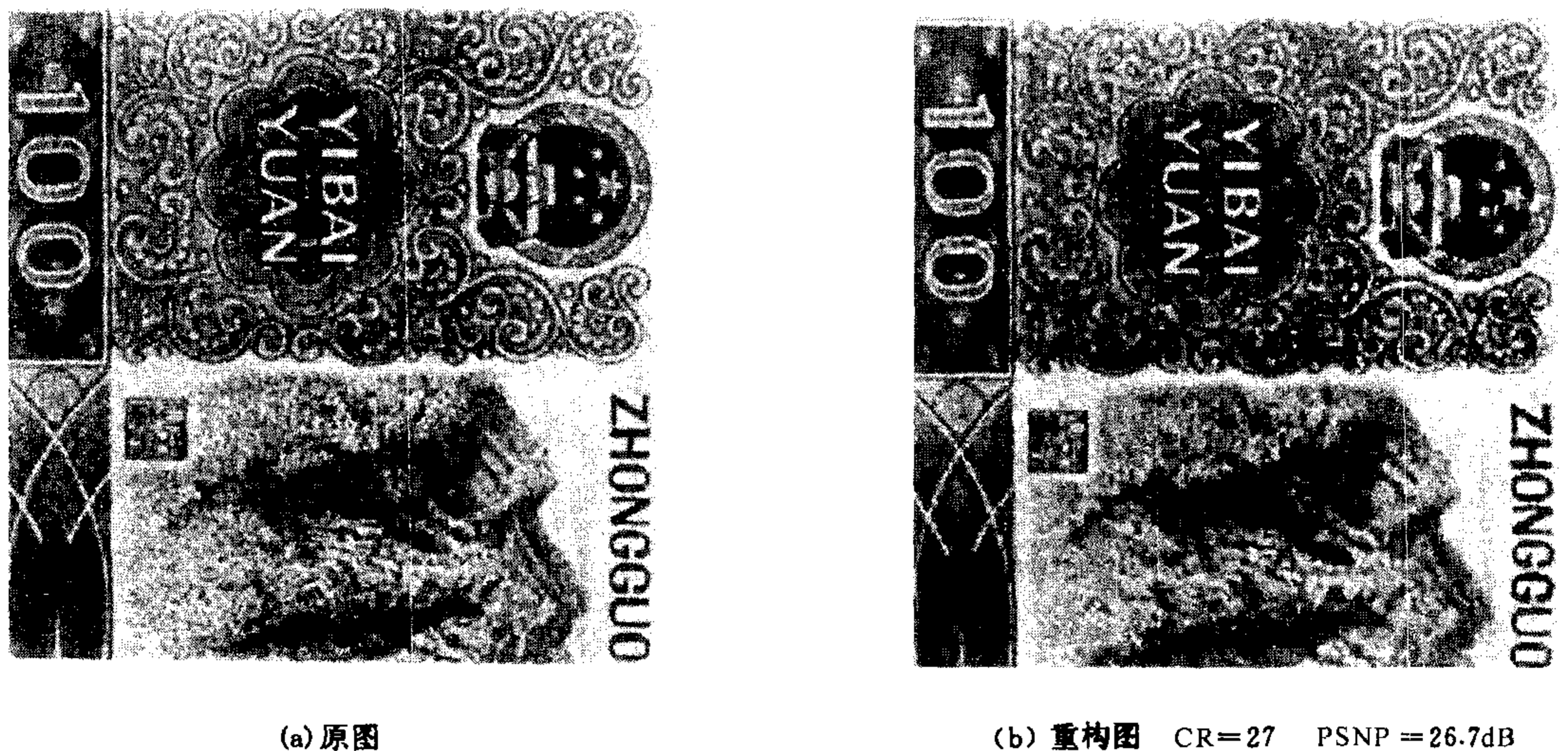


图5 含细节较丰富的人民币图像的压缩

图5(a)是细节比较丰富的512×512人民币图像,图5(b)是分5层后重构的图像.重构后的图像压缩率为27,PSNR 为26.7dB.由于细节较多,大的小波系数较多,难以达到高的压缩率.

5 结论

在图像压缩中已有很多种滤波器组,滤波器组的选择是影响图像压缩性能的重要问题^[9].本文基于图像的三角网格模型设计了一个在小波图像压缩中未曾使用过的滤波器组,它具有基于一维小波的分解形式.该滤波器组在分解和重构过程均为 $O(n)$ 运行时间.用哪一种滤波器能获得最好的图像压缩性能和质量不能一概而论,除了与滤波器本身有关外,还与具体的量化编码方法有关.实验表明,该滤波器能结合行程编码和 Huffman 编码用于图像压缩能获得较好的压缩性能和质量.事实上,对于定义在具有细分连续性的任意拓扑类型域上的函数,都可用该滤波器组的设计方法构造滤波器组对其进行分解、压缩与重构. Wang J 等人利用三维小波变换压缩医学图像^[10],该方法也能方便地用于医学图像压缩.另外,该方法还可用于多面体压缩、动画的分层控制、曲面的多分辨率编辑及分层显示等.

参 考 文 献

- 1 Grossmann A, Morlet J. Decomposition of Hardy function into square integral wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Anal.*, 1984, **15**:723—736
- 2 Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Commun. Pure Appl. Math.*, 1988, **41**:909—996
- 3 Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition; The wavelet representation. *IEEE Trans. . Patt Anal. Machine Intell.*, 1989, **7**:674—693
- 4 Strang G T. Wavelets and dilation equations; A brief introduction, *SIAM Rev*, 1989, **31**:614—627
- 5 Antonini M, Barlaud M, Mathieu P, Daubechies I. Image coding using wavelet transform. *IEEE Trans. Image Processing*, 1992, **1**(2):205—220.
- 6 Albanesi M G, Delotto I. Image compression by the wavelet decomposition. *Signal Processing*, 1992, **3**:265—274
- 7 Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. SIAM, Philadelphia, 1992
- 8 Lounsbery J M. Multiresolution Analysis for Surface of Arbitrary Topological Type. [Ph. D. thesis], Department of Computer Science and Engineering, University of Washington, September 1994
- 9 Villasenor J D, Belzer B, Liao J. Wavelet filter evaluation for image compression. *IEEE Trans. Image Processing*, 1995, **4**:1053—1060
- 10 Wang J, Huang H K. Medical image compression by using three-dimensional wavelet transformation. *IEEE Trans. Medical Imaging*, 1996, **15**:547—554

李文舜 1972年出生于江西波阳. 1993年任华东交通大学电子与信息工程系助教, 1996年获上海交通大学模式识别与智能控制专业硕士学位, 现为上海交通大学图像处理与模式识别研究所博士研究生. 近年来在国内外学术期刊上发表论文10多篇. 主要研究兴趣为:多分辨率分析、图像识别、图像及图形压缩.

李介谷 上海交通大学图像处理与模式识别研究所教授, 博士生导师. 国际电工电子协会高级会员、中国科学院国家模式识别实验室和北京大学国家信息中心学术委员会副主任委员、国家教委第二届学科评议组成员、《模式识别与人工智能》杂志编委. 主要研究领域:模式识别、计算机视觉、目标检测与跟踪、人工神经网络应用.