

研究简报

关于 H^∞ 代数 Riccati 方程可解性的频率判据和解的 Yakubovich 算法¹⁾

陈阳舟

刘家琦

(北京工业大学自动化系 北京 100022)

(哈尔滨工业大学航天学院 哈尔滨 150001)

陈善本

(哈尔滨工业大学焊接国家重点实验室 哈尔滨 150001)

关键词 H^∞ 代数 Riccati 方程, 半正定镇定解, 频率判据, Yakubovich 算法.

ON H^∞ ALGEBRAIC RICCATI EQUATION: FREQUENCY CRITERION OF SOLUBILITY AND YAKUBOVICH ALGORITHM OF SOLUTION

CHEN Yangzhou

(Dept. of Automation, Beijing Polytechnic University, Beijing 100022)

LIU Jiaqi

(School of Astronautics, Harbin Inst. of Tech., Harbin 150001)

CHEN Shanben

(National Key Laboratory of Advanced Welding Production,

Harbin Inst. of Tech., Harbin 150001)

Key words H^∞ algebraic Riccati equation, positive semi-definite stabilizing solution, frequency criterion, Yakubovich algorithm.

1 引言

众所周知, 在 H^∞ 控制问题的状态空间解法中关键的步骤是判断代数 Riccati 方程

$$-C^T C - A^T Y - YA + Y(BB^T - \gamma^{-2}GG^T)Y = 0 \quad (1)$$

半正定镇定解的存在性并求出该解^[1,2]. 上式中 A, B, G, C 为给定的适当维数的实矩阵; γ 为一预先未知的正实数, 它代表着干扰抑制水平; 上标 “T” 表示矩阵或向量的转置. 目前, 虽然有许多方法(如牛顿迭代法、哈米顿矩阵的不变子空间法、广义特征子空间法、矩阵符号函数法等)可用来求解代数 Riccati 方程, 但由于方程(1)中参数 γ 事先未知, 使得应用

1) 国家教委留学回国人员专项基金和国家自然科学基金资助项目.

这些方法时需要反复试探参数 γ 以判断解的存在性. 本文中我们在 (C, A) 能观测这样一个稍强的假定下给出式(1)的半正定镇定解存在的一个易检验的频率判据, 并给出一个直观的几何解释. 同时将原方程转化为可利用 Yakubovich 算法^[3]来求解.

2 频率判据和 Yakubovich 算法

在 (A, B, C) 能稳能观(即 (A, B) 能稳, (C, A) 能观)假定下, 方程(1)存在半正定镇定解 Y (即使得 $A - BB^T Y + \gamma^{-2} GG^T Y$ 为 Hurwitz 矩阵的半正定解)当且仅当方程^[2]

$$\gamma^{-2} GG^T - BB^T + AX + XA^T + XC^T CX = 0 \quad (2)$$

存在正定解 X (此解事实上也是式(2)的镇定解), 并且有 $Y = X^{-1}$.

引入如下记号: 算子 ∇ 意指对一多项式矩阵 $M(\lambda)$, $M^\nabla(\lambda) = M^*(-\lambda)$, 符号 * 表示共轭转置, i 表示虚数单位,

$$A_\lambda = \lambda I - A, W_1(\lambda) = CA_\lambda^{-1}G, W_2(\lambda) = CA_\lambda^{-1}B, \delta(\lambda) = \det A_\lambda \quad (3a)$$

$$\bar{A}_\lambda = \delta(\lambda) A_\lambda^{-1}, \Phi(\lambda) = C\bar{A}_\lambda(BB^T - \gamma^{-2}GG^T)\bar{A}_\lambda^\nabla C^T + \delta(\lambda)\delta^\nabla(\lambda)I. \quad (3b)$$

定理1. 假定在方程(1)中 (A, B, C) 能稳能观, 且 A 无对称于虚轴的特征根, 则方程(1)存在半正定镇定解的充分必要条件是: a) 对任意的实 ω , 有

$$W_2(i\omega)W_2^*(i\omega) - \gamma^{-2}W_1(i\omega)W_1^*(i\omega) + I > 0 \quad (4)$$

(从而方程(2)有镇定解 X); b) 方程(2)的镇定解为正定的.

证明. 显然只需要说明条件 a) 的充分必要性. 方程(2)可以写成 Lur'e 型方程

$$\gamma^{-2} GG^T - BB^T + AX + XA^T + HH^T = 0, H = -XC^T, \quad (5)$$

或等价地写成恒等式(对任意适当维数的复向量 z, w)

$$2\operatorname{Re} z^* X(-A^T z + C^T w) + z^*(BB^T - \gamma^{-2}GG^T)z + w^* w = \\ (w - H^T z)^*(w - H^T z). \quad (6)$$

不失一般性, 假定 A 无对称于虚轴的特征根. 事实上, 由于 (C, A) 能观, 则存在矩阵 K 使得 $-A^T + C^T K^T$ 无对称于虚轴的特征根. 从而代替方程(5)可以考查方程

$$\gamma^{-2} GG^T - BB^T - KK^T + (A - KC)X + X(A - KC)^T + H_1 H_1^T = 0,$$

$$H_1 = -XC^T - K.$$

现假定恒等式(6)成立, 则当 z, w 满足 $-A^T z + C^T w = i\omega z$ 时, 可得

$$C(i\omega I - A)^{-1}(BB^T - \gamma^{-2}GG^T)(-i\omega I - A^T)^{-1}C^T + I > 0. \quad (7)$$

事实上, 条件(7)不仅是恒等式(6)对某个 X, H 成立的必要条件而且是充分条件, 这是 Kalman-Yakubovich 引理给出的结论^[6]. 证毕.

定理1给出了方程(1)可解的一个频率判据. 这个判据有一个简单的几何解释. 以下假定在式(1)矩阵 C 为行向量 c (即考虑单输出情况)且 (A, B, c) 能稳能观.

直线判据. 令 $L(i\omega) = (W_1(i\omega)W_1^*(i\omega), W_2(i\omega)W_2^*(i\omega))$, 则方程(1)有半正定镇定解当且仅当 $L(i\omega)$ 当 ω 从 0 变到 $+\infty$ 时在 (x, y) 平面坐标系中的图像位于直线 $\gamma^{-2}x - y = 1$ 的左边(从而方程(2)有镇定解), 且方程(2)的镇定解正定.

方程(1)的正定镇定解可应用 Yakubovich 算法求得^[3]:

1) 计算式(3)中的 $\Phi(\lambda)$ 并分解 $\Phi(\lambda) = \varphi(\lambda)\varphi^\nabla(\lambda)$, 使 $\varphi(\lambda)$ 为首要系数为 1 的 Hurwitz

反稳定多项式；

2) 计算多项式 $\varphi(\lambda) - \delta(\lambda)$ 和多项式矩阵 $c\bar{A}_\lambda$ 的系数

$$\varphi(\lambda) - \delta(\lambda) = k_1\lambda^{n-1} + \cdots + k_{n-1}\lambda + k_n,$$

$$c\bar{A}_\lambda = q_1\lambda^{n-1} + \cdots + q_{n-1}\lambda + q_n,$$

其中 n 为矩阵 A 的阶次；

3) 由方程 $q_j H = k_j (j=1, \dots, n)$ 求解矩阵 H ；

4) 当 A 无对称于虚轴的特征根时, 由 Lyapunov 方程

$$AX + XA^T + (HH^T + \gamma^{-2}GG^T - BB^T) = 0$$

求出 X ; 否则, 选择一个矩阵 K 使得 $A_K := A - KC$ 无对称于虚轴的特征根, 然后由

$$A_K X + XA_K^T + \gamma^{-2}GG^T - BB^T - KK^T + (K - H)(K - H)^T = 0$$

求出 X ;

5) 如果 X 正定, 则求 $Y = X^{-1}$.

3 结束语

本文给出了 H^∞ 代数 Riccati 方程存在正定镇定解的一个频率判据. 对于单输出情况给出了一个几何解释. 这种几何判别方法可以很方便地应用 Matlab 软件包实现. 另外, 还将 Yakubovich 仅对标准代数 Riccati 方程给出的算法用来计算 H^∞ 代数 Riccati 方程正定镇定解. 需指出的是, 定理1中条件 b) 可用另一些等价条件代替, 本文限于篇幅不予讨论.

参 考 文 献

- 1 Doyle J, Glover K, Khargonekar P, Francis B. State-space solutions to standard H_∞ and H_2 control problems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, **34**(8): 831~847
- 2 Scherer C. H_∞ -control by state feedback: an iterative algorithm and characterization of high-gain occurrence. *Sys. and Control Lett.*, 1989(12): 383~391
- 3 Yakubovich V A. Frequency theorem in control theory (in Russian). *Siberian Math. Zh.*, 1973, **16**(2): 385~420

陈阳舟 1963年生, 1994年在俄罗斯圣彼得堡大学获理学博士学位. 1996年3月至1998年3月在哈尔滨工业大学从事博士后研究工作. 现为北京工业大学自动化系副教授. 目前主要的研究领域有鲁棒控制、最优控制和微分对策等.

陈善本 1956年生, 工学博士, 现任哈尔滨工业大学教授、博士生导师. 目前研究领域有鲁棒控制、最优控制、机器人焊接智能化相关的理论与应用等.

刘家琦 1941年生, 现为哈尔滨工业大学教授、博士生导师、副校长. 主要从事计算数学、应用数学和应用地球物理等领域有关反问题的研究.