第25卷 第6期
1999年11月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 25, No. 6
Nov., 1999

短 文

线性定常系统镇定问题的输出反馈解

钱 春
（浙江大学土木系 杭州 310027）

摘 要 研究了通过Riccati方程中矩阵D的选择，以实现由输出反馈$u=-Ly$来镇定系统的目的. 关于上述问题OFSLQ问题有解D，以使相应的Riccati方程存在正定解P，满足$\sum(A-BB'P)\subset C^-$，且给出对某个L，有$B'P=LC$的充要条件.

关键词 镇定，输出反馈.

OUTPUT FEEDBACK SOLUTION FOR THE PROBLEM OF STABILIZATION OF LINEAR TIME-INVARING SYSTEM

QIAN Chun
(Department of Civil Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract This paper is concerned with the problem of choosing matrix D in the Riccati equation so that the system can be stabilized by the output feedback $u=-Ly$. A necessary and sufficient condition for this question is obtained, namely, OFSLQ has a solution D such that ARE has the positive definite solution P satisfying $\Sigma(A-BB'P)\subset C^-$, and for some, L, $B'P=LC$.

Key words Stabilization, output feedback.

1 引言

考虑一个线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu,\\ y=Cx,\end{cases}\tag{1}$$

其中$x\in R^n$是状态，$u\in R^r$是控制，$y\in R^m$是输出，假定(A,B)能控. 对式(1)研究的一个非常重要的课题就是，如何通过反馈控制律的确定，以达到镇定系统的目的. 线性系统理论的一个基本定理保证了在(A,B)能控的假定下，闭环极点可任意配置，即任给一组"对称"谱Σ，存在K，使$\sigma(A+BK)=\Sigma$，因而上述问题是有解的. 直接计算反馈矩阵K已有

收稿日期 1997-11-12 收修改稿日期 1998-05-15

了许多算法. 一般说来,满足上述要求的 K 不唯一. 文献[1～4]都对本问题进行了研究,但得出的结论均有一定的局限性.

本文讨论使系统(1)闭环稳定的输出反馈矩阵 L 的存在性问题,通过 Riccati 方程

$$\mathrm{ARE}: PA + A'P - PBB'P + D'D = 0 \tag{2}$$

中矩阵 D 的选择来实现,给出与上述问题等价的 OFSLQ 问题(即选择 D,使对称解 $P=\mathrm{Ric}(A,B,D)$ 存在,且对某个 $L\in R^{r\times m}$,有 $B'P=LC$)有解 D 及正定解 P 的一个充分必要条件. 此条件不受输入、输出维数的限制,较具一般性.

2　QFSLQ 有解的充要条件

本文定理证明所需的一些结果归纳为两个引理,证明见文献[5].

引理1. $T(z)\in\{PR\}$ 当且仅当对任何非奇异矩阵 G,有 $G'T(z)G\in\{PR\}$. 其中 $\{PR\}$ 表示所有正实矩阵的集合.

引理2. 设 (A,B) 能控,(K,A) 能观,则方程组

$$\begin{cases} PA + A'P = -Q'Q, \\ PB - K' = -Q'M, \\ M'M = J + J' \end{cases} \tag{3}$$

有解 $P\in R^{n\times n}$,$Q\in R^{k\times n}$,$M\in R^{k\times r}$,且 $P>0$ 的充要条件是

$$T(z) = J + K(zI - A)^{-1}B \in \{PR\}. \tag{4}$$

如在状态空间的某组基下,将 (A,B,C) 进行能观性结构分解,得到

$$\begin{cases} A_1 = H^{-1}AH = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \\ B_1 = H^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \\ C_1 = CH = [0 \quad C_2], \end{cases} \tag{5}$$

其中 H 为变换矩阵,$A_{ij}\in R^{n_i\times n_j}$,$B_j\in R^{n_j\times r}$ $(i,j=1,2;n_1+n_2=n)$,$C_2\in R^{m\times n_2}$,且 (C_2,A_{22}) 是能观的. 易知这类变换不影响 OFSLQ 问题的可解性. 因此,今后把有关矩阵直接写成变换后的形式. 同时,OFSLQ 问题的可解性研究,可只针对 (C,A) 能观的情形进行而不失一般性.

本文的主要目标是反馈镇定系统(1),因此 (A,B) 能稳是必要的. 在此假定下,有两个条件可保证 $A-BB'P$ 渐近稳定,即

(i) P 是 ARE(2)的正定解;

(ii) (D,A) 能检测,且 P 是 ARE(2)的非负解.

证明从略,而 (D,A) 能观同时保证了(i)和(ii)成立,这是更强的条件.

下面,建立 OFSLQ 问题有解的一个充分必要条件. 由于 C 行满秩,$\mathrm{rank}C=m$,为方便起见,假设 (A,B,C) 已具有

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},\quad C = [0 \quad I_m]$$

形式,其中 $A_{ij}\in R^{n_i\times n_j}$,$B_j\in R^{n_j\times r}$ $(i,j=1,2;n_1=n-m;n_2=m)$.

定理1. 设(A,B)能控，(C,A)能观，则 OFSLQ 问题有解 D，且 $P=\mathrm{Ric}(A,B,D)>0$ 的充分必要条件是

(i)$\Gamma=\{K;B_1+KB_2=0\}\neq\varnothing$，　　(6)

(ii)存在 $K\in\Gamma$ 和 $G>0$，使得

$$T(z)=T(z;K,G)\in\{PR\},\tag{7}$$

其中

$$T(z;K,G)=\frac{1}{2}B_2B'_2-[A_{22}^K+A_{21}^K(zI-A_{11}^K)^{-1}A_{12}^K]G,\quad A_{11}^K=A_{11}+KA_{21},$$

$$A_{12}^K=A_{12}-A_{11}K+KA_{22}-KA_{21}K,\quad A_{21}^K=A_{21},A_{22}^K=A_{22}-A_{21}K.$$

证明. 先证必要性. 设 $D=[D_1,D_2]$，$D_j\in R^{k\times n_j}(j=1,2)$是 OFSLQ 的解，且 $P=\mathrm{Ric}(A,B,D)>0$. 将 P 与 A 一样分块

$$P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P'_{12} & P_{22}\end{bmatrix},\quad P_{ij}\in R^{n_i\times n_j},\tag{8}$$

则显然有 $P_{11}>0,P_{22}>0$. 由 $B'P=LC$ 可知

$$B'_1P_{11}+B'_2P'_{12}=0,\tag{9}$$

因此 $P_{11}^{-1}P_{12}\in\Gamma$，这表明条件(i)是必要的. 定义

$$S=\begin{bmatrix}I_{n_1} & -K\\ 0 & I_{n_2}\end{bmatrix},\tag{10}$$

式中 $K=P_{11}^{-1}P_{12}$. 然后令 $A^K=S^{-1}AS,B^K=S^{-1}B,D^K=DS,C^K=CS,P^K=S'PS$，则有 $D^K=[D_1,D_2^K]$，$P^K=\mathrm{diag}(P_{11},P_{22}^K)$，其中 $D_2^K=D_2-D_1K$，$P_{22}^K=P_{22}-K'P_{11}K$. 由$(A,B)$能控，$(C,A)$能观，显然有$(A^K,B^K)$和$(C^K,A^K)$分别能控和能观. 从 $P=\mathrm{Ric}(A,B,D)$又可推知 $P^K=\mathrm{Ric}(A^K,B^K,D^K)$，则有

$$P_{11}A_{11}^K+(A_{11}^K)'P_{11}=-D'_1D_1,\tag{11}$$

$$P_{11}A_{12}^K+(A_{21}^K)'P_{22}^K=-D'_1D_2^K,\tag{12}$$

$$(D_2^K)'D_2^K=P_{22}^KB_2B'_2P_{22}^K-P_{22}^KA_{22}^K-(A_{22}^K)'P_{22}^K.\tag{13}$$

同时(A^K,B^K)能控和(C^K,A^K)能观分别蕴含了(A_{11}^K,A_{12}^K)能控和(A_{21}^K,A_{11}^K)能观，而 $P_{22}^K>0$，故$(P_{22}^KA_{21}^K,A_{11}^K)$亦能观. 于是由引理2知，当式(11)～(13)有解 P_{11},D_1,D_2^K，即 $P_{11}>0$时，$\widetilde{T}(z)\in\{PR\}$，其中

$$\widetilde{T}(z)=\frac{1}{2}[P_{22}^KB_2B'_2P_{22}^K-P_{22}^KA_{22}^K-(A_{22}^K)'P_{22}^K]-P_{22}^KA_{21}^K(zI-A_{11}^K)^{-1}A_{12}^K.$$

令 $G=(P_{22}^K)^{-1}$，则由引理1知

$$\overline{T}(z)=G'\widetilde{T}(z)G=\frac{1}{2}B_2B'_2-\frac{1}{2}A_{22}^KG-$$

$$\frac{1}{2}G(A_{22}^K)'-A_{21}^K(zI-A_{11}^K)^{-1}A_{12}^KG\in\{PR\}.\tag{14}$$

由 $\overline{T}(z)\in\{PR\}$，显然有 $T(z)$的元素在 $R_ez>0$中解析，在虚轴上至多只有单重极点. 若 $i\omega_0$是 $T(z)$的某个元素的极点，则它必是 $\overline{T}(z)$某个元素的极点. 当 ω_0有限时，由 $\lim\limits_{z\to i\omega_0}(z-i\omega_0)\overline{T}(z)\geqslant0$及当 $\omega_0=\infty$时，由$\lim\limits_{\omega\to\infty}T(i\omega)/i\omega\geqslant0$可知 $T(z)$亦有此性质，且易知 $T'(-i\omega)+T(i\omega)\geqslant0$. 所以 $T(z;K,G)\in\{PR\}$，从而证明了条件(ii)是必要的. 定理的必要性得证.

再证充分性. 设条件(i)和(ii)成立,即存在 $K\in\Gamma$ 和 $G>0$使 $T(z;K,G)\in\{PR\}$. 令 $P_{22}^{K}=G^{-1}>0$,并颠倒上面的推理步骤,就可证明式(11)～(13)有解 P_{11},D_1,D_2^K,且 $P_{11}>0$. 将 $K\in\Gamma$ 代入式(10)得到 S,然后令 $D=[D_1,D_2^K]S^{-1}$,$P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P'_{12} & P_{22}\end{bmatrix}=S^{-1'}\mathrm{diag}(P_{11},P_{22}^{K})S^{-1}$,则易知 P 是关于(A,B,D)的 Riccati 方程的解,且满足式(9). 由 $B'_1P_{11}+B'_2P'_{12}=0$可知,若令 $L=B'_1P_{12}+B'_2P_{22}$,则有 $B'P=LC$. 另一方面,$P_{11}>0$和 $P_{22}^{K}>0$保证了 $P>0$,因此可知 P 满足 $\Sigma(A\text{-}BB'P)\subset C^-$,从而 $P=\mathrm{Ric}(A,B,D)$. 充分性得证.

最后应指出,使 $T(z;K,G)\in\{PR\}$的矩阵 $K\in\Gamma$ 和 $G>0$一般不唯一,因而 OFSLQ 问题的解 D 也不一定唯一.

3　实例

实例将说明本文得出的充要条件适用于 $m\neq r$,即输入、输出维数不相等的情形,较具一般性.

例.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix},B=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

此时 $n=3,m=2,r=1,m>r$.

通过计算易知(A,B)能控,(C,A)能观. 若取 $K=(0,0)$,

$$G=\begin{bmatrix}g_1 & 0\\ 0 & g_4\end{bmatrix},$$

其中$0<g_1\leqslant 4,g_4>0$,则可知 $T(Z;K,G)\in\{PR\}$. 此时方程(2)有解

$$D=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}>0,$$

且显然 $A-BB'P$ 稳定,(D,A)能观,取 $L=[2,2]$,则 $B'P=LC$. 故相应的 OFSLQ 问题有解.

4　结论

本文给出了 OFSLQ 问题有解的一个充分必要条件,即 $\Gamma\neq\varnothing$以及 $T(z;K,G)\in\{PR\}$. 所给例子说明,其结果不局限于输入、输出维数相同的情形. 但前已指出,OFSLQ 问题的解 D 不一定唯一,如何利用这多余的自由度以满足其它设计要求,如鲁棒性等,还可继续研究.

参 考 文 献

1　Levine W S, Athans M. On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems. *IEEE*, *Trans. Autom. Control*, 1970, **AC-15**: 44～48

2 Davison E J, Wang S H. On pole assignmant in linear multivarible systems using output feedback. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1975, **AC-20**: 516～518

3 Lin Huang, Zhong Li. Fundermented theorem for optimal output feedback problem with quadratic performance criterion, *Int J. Control*, 1989, **50**(6): 2341～2347

4 Gu Guoxiang. On the existence of linear optimal control with output feedback. *SIAM J. Control Optim*, 1990, **28**(3): 711～719

5 Anderson B D O. A system theory criterion for positive real matrices. *SIAM J. Control*, 1967, **5**(2): 171～182

钱 春 1967年生，1989年于浙江大学应用数学系毕业，1992年获运筹学与控制论专业硕士学位，1993年在美国 DEC 公司计算机培训. 在各类学术刊物上发表论文10余篇. 研究方向为最优控制.

（上接第804页）

汪应洛	沈曾平	肖淑贤	肖雁鸿	苏宏业	苏剑波	邵 诚	邵惠鹤	邹 云	陆维明	陆汝钤
陆玉昌	陈 卉	陈云峰	陈文德	陈永仪	陈亚陵	陈伯时	陈怀民	陈国青	陈宗基	陈树中
陈秋双	陈振宇	陈浩勋	陈敏逊	陈增强	陈兆宽	陈彭年	陈善本	陈润生	陈图云	陈来九
陈建新	卓 晴	周东华	周旭东	周 杰	周景振	周经伦	孟晓风	季 良	季 梁	岳 东
岳 红	岳 恒	岳德权	林元烈	林学訚	林 岩	欧阳楷	武际可	罗公亮	罗旭光	范颖晖
郁文生	郑大钟	郑丕谔	郑应平	郑南宁	金以慧	俞 立	俞金寿	俞铁成	俞新贞	荆海英
姚 莉	姚一平	荣 冈	姜旭升	姜启源	封举富	施颂椒	施鹏飞	查建中	段广仁	洪奕光
胡 刚	胡占义	胡寿松	胡泽新	胡剑波	胡跃明	胡包钢	费树岷	贺国光	赵克友	赵南元
赵千川	赵沁平	钟宜生	项国波	原 魁	唐万生	唐泽圣	夏国平	席在荣	席裕庚	徐仁佐
徐文立	徐宁寿	徐立鸿	徐立新	徐光佑	徐南荣	徐寅峰	徐道义	徐心和	徐 波	柴天佑
柴金祥	涂 健	涂序彦	涂莑生	秦化淑	秦开怀	耿志勇	袁著祉	袁曾任	袁保宗	袁 璞
贾沛璋	贾英民	贾春福	贾培发	郭 治	郭 雷	钱积新	顾凡及	顾启泰	高 文	高 龙
高东杰	高维新	高立群	章 毅	章毓晋	常文森	康小强	康立山	康景利	曹晋华	曹 立
梁启宏	梁学斌	梅生伟	梅启智	萧德云	阎平凡	黄 琳	黄秉宪	黄家英	黄泰翼	黄海军
黄心汉	黄正良	喻学刚	彭思龙	敬忠良	曾黄麟	焦李成	程 鹏	程代展	程兆林	程极泰
童勤业	舒炎泰	舒迪前	董士海	蒋 平	蒋昌俊	蒋慰孙	谢亮亮	谢胜利	韩正之	韩存武
韩志刚	韩京清	韩建达	韩崇昭	韩曾晋	楚天广	裘聿皇	褚 健	解学书	廖炯生	廖晓昕
慕小武	慕春棣	熊运鸿	熊有伦	熊光楞	管晓宏	蔡开元	蔡安妮	蔡自兴	蔡远利	谭 文
谭 民	谭少华	谭铁牛	樊尚春	薛安克	薛劲松	薛景瑄	潘士先	霍 伟	戴汝为	戴冠中