第25卷 第6期 自 动 化 学 报 Vol. 25, No. 6
1999年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1999

短 文

基于方差配置不确定系统的鲁棒滤波[1)]

朱纪洪
（清华大学计算机系智能技术与系统国家重点实验室 北京 100084）
郭 治 胡维礼
（南京理工大学自动化系 南京 210094）

摘 要 实际系统普遍存在不确定性，这种不确定性可能导致滤波发散问题. 该文对一类时变不确定系统讨论了一种指定误差方差上限的状态滤波器的设计，该方法采用两个 Riccati 方程，其中第一个 Riccati 方程用以补偿系统的不确定性，第二个 Riccati 方程用来配置状态滤波误差的协方差上限. 导出了滤波器的存在条件和滤波器的通解，揭示了该滤波器与稳态 Kalman 滤波器之间的内在联系.

关键词 鲁棒滤波，方差配置，不确定系统.

VARIANCE-ASSIGNMENT-BASED ROBUST FILTERING FOR UNCERTAIN SYSTEMS

ZHU Jihong
(*Department of Computer Science and Technology, State Key Laboratory of Intelligent Technology and System, Tsinghua University, Beijing* 100084)
GUO Zhi HU Weili
(*Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing* 210096)

Abstract Uncertainties exist in real systems at large, which may cause filtering to disconverge. A robust filter with specified upper error variance is addressed by the paper. Two Riccati equations are used in the algorithm, one is to compensate uncertainties of the system, and the other is to assign upper filtering error variance. Existence conditions and general solutions of the filter are derived, and relations between the proposed filter and steady Kalman filter are discussed essentially.

Key words Robust filtering, variance assignment, uncertain systems.

1 引言

常规的滤波方法如 Kalman 滤波在用于不确定系统滤波时，由于存在模型失配往往

1）航空基础科学基金资助课题.
收稿日期 1997-05-01 收修改稿日期 1999-02-09

会不可避免地发生滤波发散问题，同时不确定系统鲁棒控制也对状态滤波器提出了新的要求，促使人们对不确定系统的鲁棒滤波进行研究. 文[1]研究了基于误差协方差配置的滤波方法，文[2]对一类非时变不确定系统讨论了在圆盘极点配置区、稳态误差方差约束下的鲁棒滤波器设计. 相对鲁棒控制而言，不确定系统鲁棒滤波方面的成果显得较少. 在工程上性能指标常常是以对误差的方差约束给出的，Yaz 与 Skelton 在文[1]中提出的方法能很好解决这类工程设计问题，该方法首先构造对角元素满足性能约束条件的可配置稳态误差协方差阵，然后通过设计滤波增益把它配置给滤波误差来达到设计目的. 利用该方法能得到滤波增益的通解，通解中的自由参数即为设计中的自由度，利用该自由参数可以进一步满足其它性能指标约束，如 H_∞ 范数. 本文对一类时变不确定系统讨论了一种指定误差方差上限的状态滤波器，这种滤波器对系统的动力学不确定性以及观测矩阵的不确定性有较好的性能鲁棒性.

2　问题描述

考虑如下不确定线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + \Delta A(t))\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = (C + \Delta C(t))\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}(t). \tag{2}$$

上式中 $\boldsymbol{x}(t) \in R^{n_x}$ 为系统状态；$\boldsymbol{y}(t) \in R^{n_y}$ 为测量输出；$\boldsymbol{w}(t) \in R^{n_w}$、$\boldsymbol{v}(t) \in R^{n_v}$ 是均值为零、方差分别为 $W>0$、$V>0$ 的不相关白噪声，代表系统噪声和测量噪声，与 $\boldsymbol{x}_0$ 不相关；$\Delta A(t)$，$\Delta C(t)$ 分别代表系统矩阵和测量矩阵中的不确定项，假设有如下结构[3]

$$\Delta A(t) = G_1 F(t) H, \quad \Delta C(t) = G_2 F(t) H, \tag{3}$$

这里 G_1, G_2, H 为定常矩阵，$F(t)$ 为时变矩阵，满足 $\sup_t \sigma_{\max}[F(t)] \leqslant 1$，其中 $\sigma_{\max}[\cdot]$ 表示矩阵的最大奇异值. 本文将讨论状态滤波器

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \hat{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + K\boldsymbol{y}(t) \tag{4}$$

的设计，使滤波误差

$$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t) \tag{5}$$

的稳态协方差 $X_e = \lim_{t\to\infty} X_e(t) \triangleq E[\boldsymbol{e}(t) - \bar{\boldsymbol{e}}(t) \cdot (\boldsymbol{e}(t) - \bar{\boldsymbol{e}}(t))^{\mathrm{T}}]$ 满足

$$[X_e]_{ii} \leqslant \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n_x, \tag{6}$$

式中 $[X_e]_{ii}$ 表示 X_e 的第 i 个对角元素即第 i 个状态的稳态滤波误差方差.

3　主要结果

滤波误差的微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{e}}(t) = \hat{A}\boldsymbol{e}(t) + [(A - \hat{A} - KC) + (\Delta A(t) - K\Delta C(t)]\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{w}(t) - K\boldsymbol{v}(t). \tag{7}$$

记 $\boldsymbol{x}_e \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$，$\bar{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ A - \hat{A} - KC & \hat{A} \end{bmatrix}$，$\bar{G} \triangleq \begin{bmatrix} G_1 \\ G_1 - KG_2 \end{bmatrix}$，$\bar{H} \triangleq [H \quad 0]$，$\Delta\bar{A}(t) \triangleq \bar{G}F(t)\bar{H}$，则增广系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e(t) = [\bar{A} + \Delta\bar{A}(t)]\boldsymbol{x}_e(t) + \bar{\boldsymbol{w}}(t), \tag{8}$$

其中 $\bar{w}(t)$ 代表协方差为 $W=\begin{bmatrix} W & W \\ W & W+KVK^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$ 的零均值不相关白噪声.

定理1. 如果存在 $\alpha>0,\beta\geqslant0$ 和矩阵 $L\in R^{n_x\times n_y}$，使

1) Riccati 方程

$$A^{\mathrm{T}}Q_1+Q_1A+Q_1(W+\alpha G_1G_1^{\mathrm{T}})Q_1+\frac{1}{\alpha}H^{\mathrm{T}}H+\beta I=0 \tag{9}$$

存在对称正定解 Q_1；

2) Riccati 方程

$$\widetilde{A}Q_2+Q_2\widetilde{A}^{\mathrm{T}}-(Q_2\widetilde{C}^{\mathrm{T}}+\alpha G_1G_2^{\mathrm{T}})R^{-1}(\widetilde{C}Q_2+\alpha G_2G_1^{\mathrm{T}})+W+\alpha G_1G_1^{\mathrm{T}}+LL^{\mathrm{T}}=0, \tag{10}$$

式中 $\widetilde{A}=A+(W+\alpha G_1G_1^{\mathrm{T}})Q_1,\widetilde{C}=C+\alpha G_2G_1^{\mathrm{T}}Q_1,R=V+\alpha G_2G_2^{\mathrm{T}}$ 存在对称正定解 Q_2，那么由

$$K=(Q_2\widetilde{C}^{\mathrm{T}}+\alpha G_1G_2^{\mathrm{T}})R^{-1}+LUR^{-1/2},U\in R^{n_y\times n_y}, \tag{11a}$$

式中 U 为任意正交矩阵，

$$\hat{A}=\widetilde{A}-K\widetilde{C} \tag{11b}$$

所确定的状态滤波器(4)使增广系统(8)稳定，且 $X_e\leqslant Q_2$.

证明. 令 $\bar{Q}=\begin{bmatrix} Q_1^{-1} & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$，显然 $\bar{Q}$ 对称正定，将 $\bar{Q}$ 代入 $(\bar{A}+\Delta\bar{A}(t))\bar{Q}+\bar{Q}(\bar{A}+\Delta\bar{A}(t))^{\mathrm{T}}+\bar{W}$ 就能证得.

定义1. 设 $Q_2\in R^{n_x\times n_x}$ 为给定的对称正定阵，若存在 $\alpha>0,\beta\geqslant0$ 和矩阵 $L\in R^{n_x\times n_y}$，使 Q_2 为方程(10)的解，则称 Q_2 可配置.

由上可以看出，如果 Q_2 可配置，则 Q_2 就是稳态滤波误差协方差的上限. Q_2 是否可配置首先取决于 Riccati 方程(9)的对称正定解是否存在；其次是对给定的 Q_2，Riccati 方程(10)是否相容，对此有如下结论.

定理2. 若 A 为稳定矩阵且 $\|H(sI-A)^{-1}G_1\|_\infty<1$，即如果不确定系统(1)二次稳定，则 Riccati 方程(9)存在对称正定解.

定理3. 对给定对称正定矩阵 Q_2，Riccati 方程(10)相容的充要条件为

$$\begin{aligned}\Xi\triangleq\widetilde{A}Q_2+Q_2\widetilde{A}-(Q_2\widetilde{C}+\alpha G_1G_2)R^{-1}(\widetilde{C}Q_2+\alpha G_2G_1^{\mathrm{T}})+\\ W+\alpha G_1G_1^{\mathrm{T}}\leqslant0,\text{且 rank}[\Xi]\leqslant n_y.\end{aligned} \tag{12}$$

定理4. 如果不确定系统(1)二次稳定，对称正定矩阵 $[Q_2]_{ii}\leqslant\sigma_i^2$ 满足可配置条件(12)，那么由式(11)所确定的状态滤波器

$$\dot{\hat{x}}(t)=\hat{A}\hat{x}(t)+Ky(t) \tag{13}$$

满足性能指标(6).

定理4是对上面结论的总结，给出了不确定系统满足性能指标(6)之鲁棒滤波器(4)的存在条件及滤波器的通解. 该算法的关键是对给定性能指标(6)利用定理3给出的充要条件来构造适当的可配置阵 $[Q_2]_{ii}\leqslant\sigma_i^2$.

由 Riccati 方程解的单调性不难得出只要 $\sigma_i^2\geqslant[P]_{ii}$，其中 P 是 Riccati 方程

$$\widetilde{A}P+P\widetilde{A}^{\mathrm{T}}-(P\widetilde{C}^{\mathrm{T}}+\alpha G_1G_2^{\mathrm{T}})R^{-1}(\widetilde{C}P+\alpha G_2G_1^{\mathrm{T}})+W+\alpha G_1G_1^{\mathrm{T}}=0 \tag{14}$$

的对称正定解，则总能用适当的方法来构造可配置阵 Q_2，同时如果对任选的 $\alpha>0$ 和 $\beta\geqslant0$ Riccati 方程(14)的解 P 满足 $[P]_{ii}\leqslant\sigma_i^2$，则 P 本身就是可配置阵，只是此时用 P 来求解

时,K 中的自由数 U 就消失了.

对于确定系统,只要令 $G_1=0,G_2=0,H=0$,就可得到连续确定系统的指定方差滤波公式.如果令 $L=0$,则所得结果就是连续确定系统的稳态 Kalman 滤波.

4 数值举例

考虑如下不确定线性随机系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.5 & -2\\ 0.1f(t) & -3+0.2f(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+w(t),$$

$$y(t)=[1+0.1f(t)\quad 0.2f(t)]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+v(t),$$

其中 $f(t)$ 为不确定项,满足 $|f(t)|\leqslant 1,W=I_2,V=[0.25]$.要求确定滤波器(4)中的参数矩阵 $\hat{A}$ 和 K,使稳态滤波误差方差满足 $\mathrm{var}[e_1(\infty)]\leqslant 0.8^2$, $\mathrm{var}[e_2(\infty)]\leqslant 0.5^2$.

解.系统不确定项可表示为 $\Delta A=\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix}f(t)[1\quad 2]$,$\Delta C=0.1f(t)[1\quad 2]$.取 $\alpha=\beta=1$,把有关参数代入方程(9),求得其对称正定解 $Q_1=\begin{bmatrix}0.996 & 0.002\\ 0.002 & 1.00\end{bmatrix}$,进一步可求得 $\tilde{A}=\begin{bmatrix}-0.504 & -1.998\\ 0.002 & -1.990\end{bmatrix}$,$\tilde{C}=[1.000\quad 0.010]$,$R=[0.260]$.令 $Q_2=\begin{bmatrix}0.8^2 & x\\ x & 0.5^2\end{bmatrix}$,其中 x 是待定参数,由条件(12)构造出可配置阵 $Q_2=\begin{bmatrix}0.64 & 0.09\\ 0.09 & 0.25\end{bmatrix}$,$L=[0.925\quad 0.89]^{\mathrm{T}}$.

取 $U=[1]$,　得 $K=\begin{bmatrix}4.272\\ -0.124\end{bmatrix}$,　$\hat{A}=\begin{bmatrix}-4.776 & -2.041\\ 0.126 & -1.989\end{bmatrix}$,

取 $U=[-1]$,　得 $K=\begin{bmatrix}0.644\\ -0.473\end{bmatrix}$,　$\hat{A}=\begin{bmatrix}-1.148 & -2.004\\ 0.475 & -1.985\end{bmatrix}$,

得到了两个解,矩阵 U 是设计中的自由度,可用来对其它性能指标进行优化.

参 考 文 献

1 Yaz E, Skelton. R E. Continuous and discrete state estimation with error covariance assignment. In: Proc. 30th IEEE CDC 1991,3091～3092

2 朱纪洪、郭治.一类不确定系统鲁棒估计器设计.控制理论与应用,1997,**14**(3)

3 Khargonekar P P, Peterson I R, Zhou K. Robust stabilization of uncertain linear system: quadratic stability and H_∞ control theory. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1990,**35**(3):356～361

朱纪洪　1995年在南京理工大学获工学博士学位,先后在南京航空航天大学及清华大学做博士后研究.目前从事的主要研究工作为空间机器人柔顺控制与共享控制.

郭　治　南京理工大学教授,博士生导师,国务院学科评议组成员.长期从事火力控制方面的教学与科研工作.

胡维礼　南京理工大学教授,博士生导师.主要研究领域为高速高精度伺服系统、智能控制及非线性系统的几何理论.