

一类切换组合系统的分散反馈镇定¹⁾

孙洪飞¹ 赵 军²

¹(厦门大学自动化系 厦门 361005)

²(东北大学信息工程学院 沈阳 110006)

(E-mail: zequn_sun@sina.com)

摘 要 首次提出切换组合系统的概念,给出了使此系统渐近稳定的分散切换控制律的设计,研究了带有连续控制量的组合大系统采用分散混杂状态反馈稳定化问题.

关键词 切换,组合系统,分散切换律,分散混杂反馈

中图分类号

Decentralized Hybrid Feedback Stabilization for a Class of Switched Composite System

SUN Hong-Fei ZHAO Jun

¹(Department of Automation, Xiamen University, Xiamen 361005)

²(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110006)

(E-mail: zequn_sun@sina.com)

Abstract In this paper, a new class of composite system called switched composite system is proposed. The authors study the design of decentralized switching law for this system to be asymptotically stable. For the general composite system, the authors introduce the technique of decentralized hybrid state feedback.

Key words Switching, composite system, decentralized switching law, decentralized hybrid feedback

1 引言

如果一个组合系统,构成它的各个子系统又分别都是切换系统,那么,关于这一系统的分析与设计将更加困难.本文称这类系统为切换组合系统.关于切换组合系统的研究还未见

1) 国家自然科学基金(60274009)和国家教育部博士点基金及骨干教师基金资助

Supported by the National Natural Science Foundation of P. R. China(60274009), the University Doctoral Foundation of Chinese State Education Commission, and the Key Teacher Foundation of P. R. China

收稿日期 2001-07-28 收修改稿日期 2002-03-25

Received July 28, 2001; in revised form March 25, 2002

报道,本文首次提出这一概念.在实际中,确实存在切换组合系统的模型,例如多汽车的转向系统.这种系统是由每辆汽车的转向系统通过耦合(相邻的汽车间都有相互干扰)构成的.关于切换组合系统,本文主要研究保证其渐近稳定的分散切换律的设计问题,同时还研究了一般的组合系统存在使其稳定的分散混杂状态反馈控制器的条件.

2 系统的描述

考虑如下—类系统

$$\dot{x}_i(t) = A_{\sigma_i} x_i + f_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中 $x_i(t) \in R^n (i=1, 2, \dots, N)$ 为状态变量, $f_i(x): R^{n \cdot N} \rightarrow R^n (i=1, 2, \dots, N)$ 为互联项, $\sigma_i: [0, +\infty) \rightarrow \underline{m}_i = \{1, 2, \dots, m_i\} (i=1, 2, \dots, N)$ 为切换函数,它是一个依赖于时间 t 或状态 $x(t)$ 的分段常值函数.系统(1)可看成是由下面 N 个 n 阶线性切换系统互联而成的组合大系统.

$$\dot{x}_i(t) = A_{\sigma_i} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

因此,本文称系统(1)是一个切换组合大系统.称式(2)为式(1)的第 i 个标称子系统.

对于系统(1),即使它的每一个标称子系统(2)均是渐近稳定的(即子系统(2)中每一个系统均存在使其渐近稳定的切换律),由于互联项 $f_i(x)$ 的影响,大系统(1)未必能渐近稳定甚至不稳定.另外,由于互联项 $f_i(x)$ 与每个状态 x_1, x_2, \dots, x_N 都有关,因此为保证系统(1)的每一个子系统均渐近稳定,其切换律 σ_i 的设计会和所有的状态都有关.为了工程上实现的方便,我们总是希望切换律 σ_i 只依赖于第 i 个子系统的状态 x_i ,即 σ_i 是一个分散的离散型控制.这也是本文要解决的最主要的问题.

2 渐近稳定的分散切换律的设计

本节主要研究如何构造系统(1)的分散切换律,使系统(1)渐近稳定.为了叙述方便,引入如下记号: $\|\cdot\|$ 表示欧几里德范数; $\gamma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(B_1, B_2, \dots, B_m)$ 表示由同维矩阵 B_1, B_2, \dots, B_m 的凸组合所构成的矩阵束,即

$$\gamma_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}(B_1, B_2, \dots, B_m) = \{\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \dots + \alpha_m B_m : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in [0, 1], \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1\}.$$

本文假设互联项 $f_i(x)$ 满足条件:存在正数 η_i ,使得 $\|f_i(x)\| \leq \eta_i \|x\| (i=1, \dots, 2, \dots, N)$.

定理 1. 若存在 $A^i \in \gamma_{\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_{m_i}^i}(A_1^i, A_2^i, \dots, A_{m_i}^i)$ 及常数 $\epsilon_i > 0 (i=1, \dots, N)$,使得下面 N 个线性矩阵不等式分别存在对称正定解 P_1, P_2, \dots, P_N ,

$$(A^i)^T P_i + P_i A^i + \epsilon_i P_i P_i + \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i^2}{\epsilon_i} E_n < \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

则系统(1)存在分散切换律,使其渐近稳定,其中 E_n 为 n 阶单位阵.

证明. 对于任意的 $i \in \underline{N} = \{1, 2, \dots, N\}$,考虑式(3)中的第 i 个矩阵不等式

$$(A^i)^T P_i + P_i A^i + \epsilon_i P_i P_i + \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i^2}{\epsilon_i} E_n < \mathbf{0},$$

故对于任意的 $x_i \in R^n$,有

$$x_i^T [(A^i)^T P_i + P_i A^i + \epsilon_i P_i P_i + \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i^2}{\epsilon_i} E_n] x_i < 0 \quad (4)$$

由于 $A^i = \alpha_1^i A_1^i + \alpha_2^i A_2^i + \dots + \alpha_{m_i}^i A_{m_i}^i$, 且 $\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_j^i = 1$ 及 $\alpha_j^i \in [0, 1]$, 则式(4)可改写为

$$\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_j^i \mathbf{x}_i^T [(A_j^i)^T P_i + P_i A_j^i + \epsilon_i P_i P_i + \sum_{n=1}^N \frac{\eta_n^2}{\epsilon_i} E_n] \mathbf{x}_i < 0 \quad (5)$$

令 $\Omega_j^i = \{\mathbf{x}_i \in R^n : \mathbf{x}_i^T [(A_j^i)^T P_i + P_i A_j^i + \epsilon_i P_i P_i + \sum_{n=1}^N \frac{\eta_n^2}{\epsilon_i} E_n] \mathbf{x}_i < 0\}$, $j = 1, 2, \dots, m_i$. 则由式(4)和(5)不难得到 $\Omega_1^i \cup \Omega_2^i \cup \dots \cup \Omega_{m_i}^i = R^n \setminus \{0\}$. 再令 $\tilde{\Omega}_1^i = \Omega_1^i$, $\tilde{\Omega}_2^i = \Omega_2^i - \tilde{\Omega}_1^i$, \dots , $\tilde{\Omega}_{m_i}^i = \Omega_{m_i}^i - \bigcup_{j=1}^{m_i-1} \tilde{\Omega}_j^i$. 则 $\tilde{\Omega}_1^i \cup \tilde{\Omega}_2^i \cup \dots \cup \tilde{\Omega}_{m_i}^i = R^n \setminus \{0\}$, 且 $\tilde{\Omega}_j^i \cap \tilde{\Omega}_k^i = \emptyset$, $j, k \in \underline{m_i}$ 且 $j \neq k$.

下面我们构造切换律, 当 $\mathbf{x}_i(t) \in \tilde{\Omega}_j^i$ 时, $\sigma_i(\mathbf{x}(t))$ 取值为 $\sigma_i(\mathbf{x}(t)) = j$. 这样, 我们得到了一组切换律 $\sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots, \sigma_N(t)$. 显然, 它们都只与子系统的状态有关, 即都是分散切换律. 下面将指出, 如此构造的切换律 $\boldsymbol{\sigma}(t) = [\sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots, \sigma_N(t)]^T$ 能保证系统(1)渐近稳定.

令 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1^T P_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2^T P_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_N^T P_N \mathbf{x}_N$, 则 $V(\mathbf{x})$ 沿着系统(1)的导数为

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^N \{ \mathbf{x}_i^T [A_{\sigma_i}^T P_i + P_i A_{\sigma_i}] \mathbf{x}_i + \mathbf{f}_i^T(\mathbf{x}) P_i \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_i^T P_i \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \}.$$

由于 $\mathbf{f}_i^T(\mathbf{x}) P_i \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_i^T P_i \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \leq \epsilon_i \mathbf{x}_i^T P_i P_i \mathbf{x}_i + \frac{1}{\epsilon_i} \mathbf{f}_i^T(\mathbf{x}) \mathbf{f}_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, N$, 而且由假设可知, $\mathbf{f}_i^T(\mathbf{x}) \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) = \|\mathbf{f}_i(\mathbf{x})\|^2 \leq \eta_i^2 \|\mathbf{x}\|^2 = \eta_i^2 (\|\mathbf{x}_1\|^2 + \|\mathbf{x}_2\|^2 + \dots + \|\mathbf{x}_N\|^2)$. 因此,

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T [A_{\sigma_i}^T P_i + P_i A_{\sigma_i} + \epsilon_i P_i P_i + \sum_{j=1}^N \frac{\eta_j^2}{\epsilon_i} E_n] \mathbf{x}_i < 0. \quad \text{证毕.}$$

3 混杂分散状态反馈控制器的设计

考虑一般的组合系统, 其状态状态描述如下:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = A_i \mathbf{x}_i + B_i \mathbf{u}_i + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

其中 $\mathbf{x}_i(t) \in R^n$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 为状态变量, $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}) : R^{n \cdot N} \rightarrow R^n$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 为互联项, $\mathbf{u}_i \in R^{p_i}$ 为控制输入, $A_i \in R^{n \times n}$, $B_i \in R^{n \times p_i}$. 对互联项 $\mathbf{f}_i(\mathbf{x})$ 的要求同上一节.

对于组合系统(6), 一般来讲, 使其稳定的分散状态反馈控制器是很难保证存在的. 我们假定每一个子系统有有限个备选的状态反馈控制器, 并且每个单一的控制均不能保证其对应的子系统渐近稳定. 假设系统(6)的第 i 个子系统的备选控制器为

$$\mathbf{u}_i = K_1^i \mathbf{x}_i, K_2^i \mathbf{x}_i, \dots, K_{m_i}^i \mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

基于上述情况, 引入切换技术, 即选择控制器

$$\mathbf{u}_i = K_{\sigma_i}^i \mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

其中 $\sigma_i : [0, +\infty) \rightarrow \underline{m_i} = \{1, 2, \dots, m_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 为待设计的切换律. 这样就有可能保证每一个子系统均渐近稳定. 由于 $\sigma_i(t)$ 和 \mathbf{u}_i 分别是离散型和连续型控制, 所以称这种控制为混杂控制. 因此, 我们的问题就是寻找使系统(6)渐近稳定的分散混杂状态反馈控制律. 下面的定理给出了系统(6)分散混杂状态反馈控制律的设计.

定理 2. 若存在 $K^i \in \gamma_{\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_{m_i}^i} (K_1^i, K_2^i, \dots, K_{m_i}^i)$ 及常数 $\epsilon_i > 0$, $i = 1, \dots, N$, 使得下面 N 个线性矩阵不等式分别存在对称正定解 P_1, P_2, \dots, P_N ,

$$A_j^T P_i + P_i A_j + (K^j)^T B_j^T P_j + P_j B_j K^j + \epsilon_j P_j P_j + \sum_{n=1}^N \frac{\eta_n^2}{\epsilon_i} E_n < 0, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

则系统(6)存在分散混杂状态反馈控制律,使其渐近稳定.

证明. 令 $A_i + BK_{\sigma_i(t)}^i = \bar{A}_{\sigma_i(t)}$, 则由定理 1 的证明过程很容易得到定理 2 的证明.

注. 仿照定理 2, 针对一般的组合系统也可以研究混杂输出反馈镇定问题. 由于篇幅所限, 这里不再赘述.

4 仿真例子

考虑以下由两个二阶线性切换子系统耦合而成的组合系统

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1^1 \\ \dot{x}_2^1 \end{bmatrix} = A_{\sigma_1} \mathbf{x}_1 + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (9a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1^2 \\ \dot{x}_2^2 \end{bmatrix} = A_{\sigma_2} \mathbf{x}_2 + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (9b)$$

$$\text{其中 } \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sin(\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2) \\ \cos(\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2) \end{bmatrix}, \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sin(\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2) \\ \cos(\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2) \end{bmatrix}.$$

假设这两个子系统各有两个切换模型, 分别为

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1^1 \\ \dot{x}_2^1 \end{bmatrix} = A_1^1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad \dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1^1 \\ \dot{x}_2^1 \end{bmatrix} = A_2^1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (10a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1^2 \\ \dot{x}_2^2 \end{bmatrix} = A_1^2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1^2 \\ \dot{x}_2^2 \end{bmatrix} = A_2^2 \mathbf{x}_2 + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (10b)$$

$$\text{其中 } A_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, A_2^1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, A_2^2 = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

显然, 式(10a)的任意一个子系统和式(10b)的任意一个子系统组合而成的组合系统均不是渐近稳定的. 但若选择适当的切换, 则可保证式(9)渐近稳定.

事实上, 由定理 1 的证明过程得到 $\Omega_1^1 = \{\mathbf{x}_1 : 7(x_1^1)^2 - 9(x_2^1)^2 < 0\}$, $\Omega_2^1 = \{\mathbf{x}_1 : 9(x_1^1)^2 - 7(x_2^1)^2 < 0\}$, $\Omega_1^2 = \{\mathbf{x}_2 : 11(x_1^2)^2 - 17(x_2^2)^2 < 0\}$, $\Omega_2^2 = \{\mathbf{x}_2 : 17(x_1^2)^2 - 11(x_2^2)^2 < 0\}$. 容易验证 $\Omega_1^i \cup \Omega_2^i = R^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ($i=1, 2$). 因此, 分散切换律可设计如下:

$$\sigma_1(t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x}_1(t) \in \Omega_1^1 \\ 2, & \mathbf{x}_1(t) \in \Omega_2^1 - \Omega_1^1 \end{cases}, \sigma_2(t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x}_2(t) \in \Omega_1^2 \\ 2, & \mathbf{x}_2(t) \in \Omega_2^2 - \Omega_1^2 \end{cases} \quad (11)$$

仿真结果表明, 切换组合系统(9)在切换律(11)下渐近稳定(见图 1).

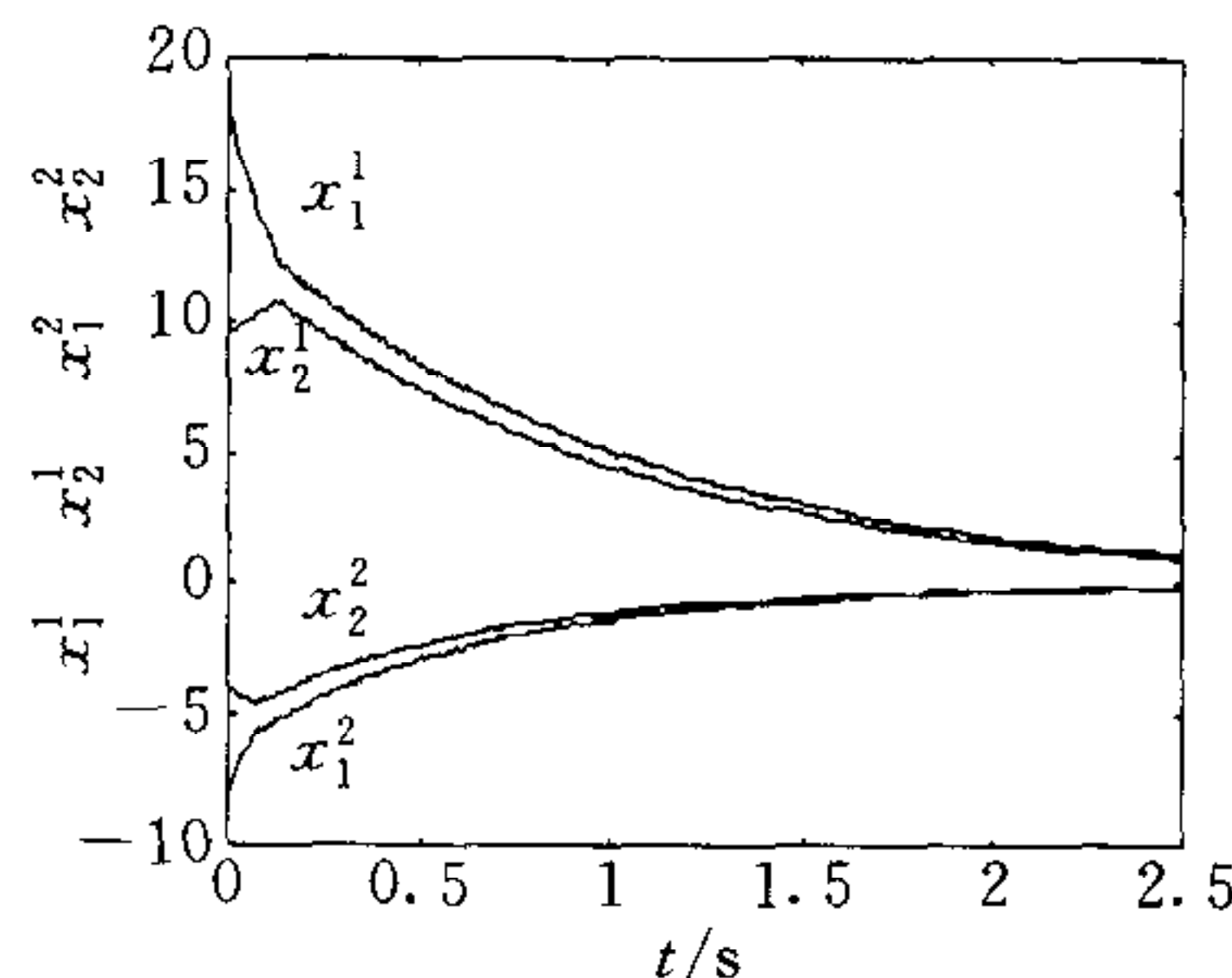


图 1 切换组合系统(9)在切换律(11)下的状态曲线

Fig. 1 The state curves of switched composite system(9) under switching law(11)

5 结束语

分散控制以其简单易实现而倍受工程技术人员的普遍欢迎. 切换技术的引入, 为大系统的稳定性及稳定化提供了一个新的手段, 为之注入了新的活力. 另外, 为了镇定一个大系统, 如果采用单一的控制器不一定能达到目的. 即使可行, 也往往需要高增益, 而高增益必将对控制元件的寿命造成极大的影响, 同时也会浪费能量. 因此可采用在若干个低增益控制器间切换的办法来完成控制要求. 因此, 分散混杂反馈镇定是一个很有研究价值的问题.

References

- 1 Daniel Liberzon, Stephen Morse A. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, **19**(1):59~70
- 2 Petterson S, Lennartson B. Stability and robustness for hybrid systems. In: Proceedings 35th IEEE Conference on Decision and Control. Kobe Japan; 1996. 1202~1207
- 3 Brannicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(2):475~482
- 4 Riedinger P, Kratz F, Jung C, Zanne C. Linear quadratic optimization for hybrid systems. In: Proceedings 38th IEEE Conference on Decision and Control. USA; Phoenix, Arizona, 1999. 3059~3064
- 5 Efstratios Skafidas, Robin J Evans, Andrey V Savkin. Stability results for switched controller systems. *Automatica*, 1999, **35**(4):553~564
- 6 Wicks M A, Peteties P. Construction of piecewise Lyapunov function for stabilizing switched systems. In: Proceedings 33rd IEEE Conference on Decision and Control. Lake Buena, 1994. 3492~3497
- 7 Wicks M A, Peteties P, Decarlo R A. Switched control synthesis for the quadratic stabilization of a pair of unstable linear systems. *European Journal of Control*, 1998, **4**(1):140~147

孙洪飞 厦门大学自动化系副教授, 博士. 研究方向为复杂大系统的理论研究、切换系统的稳定性研究.

(**SUN Hong-Fei** Received the Ph. D. degree in Control Theory and Engineering at Northeastern University, P. R. China, in 2002. He is currently an associated professor of Automation Department of Xiamen University. His main research interests include the theory of composite system, the stability of switched systems.)

赵 军 东北大学信息科学与工程学院教授, 博士生导师, 中国自动化学会控制理论委员会委员. 主要研究方向为混杂系统、非线性控制和鲁棒控制.

(**ZHAO Jun** Professor of Northeastern University, P. R. China. He is a member of Control Theory Committee of Chinese Automation Council. His main research interests include hybrid systems, nonlinear control systems, and robust control.)