

摄像机自标定方法的研究与进展¹⁾

孟晓桥 胡占义

(中国科学院自动化研究所模式识别国家重点实验室 北京 100080)

(E-mail: {mengxq, huzy}@nlpr.ia.ac.cn)

摘要 该文回顾了近几年来摄像机自标定技术的发展,并分类介绍了其中几种主要方法.同传统标定方法相比,自标定方法不需要使用标定块,仅根据图像间图像点的对应关系就能估计出摄像机内参数.文中重点介绍了透视模型下的几种重要的自标定方法,包括内参数恒定和内参数可变两种情形;最后还简要介绍了几种非透视模型下的摄像机自标定方法.

关键词 摄像机自标定,小孔模型,无穷远平面,绝对二次曲线(曲面)

中图分类号 TP391

Recent Progress in Camera Self-Calibration

MENG Xiao-Qiao HU Zhan-Yi

(National Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation

Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

(E-mail: {mengxq, huzy}@nlpr.ia.ac.cn)

Abstract We present a review and classification of camera self-calibration techniques developed in recent years. Compared with traditional calibration techniques, self-calibration does not require a calibration object with known 3D geometry, but only needs point correspondences from images to solve for the intrinsic parameters. Our main focus is on dealing with the pinhole camera model with either constant or varying intrinsic parameters. In the end, we also give a brief review of self-calibration techniques under other camera models.

Key words Camera self-calibration, pinhole model, the plane at infinity, the absolute conic(quadric)

1 引言

摄像机标定是计算机视觉领域里从二维图像提取三维空间信息必不可少的步骤,被广

1) 国家自然科学基金(60175009,60033010)和中国科学院交叉学科重大创新项目(KJCZ1-07)资助

Supported by the Natural Science Foundation of P. R. China (60175009,60033010) and Multidisciplinary Research Program of CAS(KJCX1-07)

本文通讯作者胡占义 Corresponding author: HU Zhan-Yi

收稿日期 2001-08-28 收修改稿日期 2002-01-16

Received August 28, 2001; in revised form January 16, 2002

泛应用于三维重建、导航、视觉监控等领域. 广义上摄像机标定可分为三种: 传统标定方法、基于主动视觉的标定方法和自标定方法. 传统标定方法^[1~3]需要使用经过精密加工的标定块, 通过建立标定块上三维坐标已知的点与其图像点间的对应, 来计算摄像机的内外参数; 该方法的优点在于可以获得较高的精度, 但标定过程费时费力, 不适用于在线标定和不可能使用标定块的场合. 基于主动视觉的标定方法需要控制摄像机做某些特殊运动, 如绕光心旋转^[4]或纯平移^[5,6]等, 利用这种运动的特殊性可以计算出内参数. 该方法的优点是算法简单, 往往能获得线性解, 缺点是不能适用于摄像机运动未知或无法控制的场合(如手持摄像机等). 以上两种标定方法均利用到场景或摄像机运动的信息, 对于场景任意、摄像机运动未知的最一般的情形, 则都无能为力.

20 世纪 90 年代初, Faugeras, Luong, Maybank 等^[7,8]首先提出了自标定的概念, 使得在场景未知和摄像机任意运动的一般情形下标定成为可能. Faugeras 等^[7]从射影几何的角度出发证明了每两幅图像间存在着两个形如 Kruppa 方程的二次非线性约束, 通过直接求解 Kruppa 方程组可以解出内参数. 鉴于直接求解 Kruppa 方程的困难, 人们又提出了分层逐步标定的思想, 即首先对图像序列做射影重建, 在此基础上再仿射标定和欧氏标定. 分层逐步标定的方法以 Hartley 的 QR 分解法^[9]、Triggs 的绝对二次曲面法^[10]、Pollefeys 的模约束法^[11]等为代表. 针对在实际应用中摄像机内参数会实时改变的情形, 人们进一步提出了可变内参数下摄像机自标定的概念. Heyden, Åström, Pollefeys 等^[12,13]从理论上证明: 在内参数满足一定条件的前提下, 可变内参数下的自标定是完全可能的, Pollefeys 等^[13]还给出了一种比较实用的可变内参数下的摄像机自标定方法. 从本质上说, 所有自标定方法都只是利用了摄像机内参数自身存在的约束, 这些约束与场景和摄像机的运动无关, 这也是自标定方法较前两种标定方法更灵活的原因.

2 预备知识

2.1 符号约定

为表示三维欧氏空间中的无穷远量, 通常把该空间中任意一点记作 $x = (X, Y, Z, t)^T$, 并称之为该点的齐次坐标, 齐次项 $t=0$ 对应着无穷远平面上的元素, 补充了无穷远元素的欧氏空间被称为扩充的欧氏空间. 相应地, 二维平面上的点对应的齐次坐标为 $m = (x, y, t)^T$, $t=0$ 对应着无穷远直线上的元素. 除非特别申明, 本文所用到的坐标(包括点、矢量、平面方程、直线方程等)均为齐次坐标, 用小写黑体表示. 矩阵则用大写白体表示.

2.2 摄像机模型

通常使用的是针孔模型^[14]. 在该模型下, 摄像机按透视射影变换将空间点 $x = (X, Y, Z, 1)^T$ 投影到像点 $m = (x, y, 1)^T$, 用公式写成

$$\lambda m = Px \quad (1)$$

投影矩阵 P 可进一步分解成 $P = K[R \quad -Rt]$ ($K = \begin{bmatrix} \alpha f & s & u_0 \\ 0 & f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$). 这里 R, t 分别是世界

坐标系到摄像机坐标系的旋转矩阵和平移矢量, 被称为摄像机外参数; K 是将摄像机坐标系变换到图像坐标系所需的只与摄像机自身有关的参数矩阵, 称之为摄像机内参数矩阵;

(u_0, v_0) 为主点坐标 (principle point); f 为有效焦距 (effective focal length); α 为纵横比 (aspect ratio); s 为倾斜因子 (skew factor). 摄像机自标定的目的就是要求解矩阵 K .

2.3 绝对二次曲线

与摄像机自标定密切相关的两个重要概念是绝对二次曲线 Ω (absolute conic) 和绝对二次曲面 (absolute quadric) Ω^* [15]. 在扩展欧氏坐标系 (无穷远平面方程为 $t=0$) 中, 绝对二次曲线被定义为无穷远平面上的一个虚二次曲线, 令 $x=(X, Y, Z, 0)^T$ 是它上面的任一点, 则 x 满足 $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0, t=0$.

点 x 在摄像机投影矩阵 $P=K(R \quad -Rt)$ 的作用下成像为 $m \cong KRx$ (这里“ \cong ”表示相差一个常数因子下的相等), 则得到 $x \cong R^T K^{-1} m$, 代入绝对二次曲线的方程 $x^T x = 0$ 可得 $m^T K^{-T} R R^T K^{-1} m = m^T K^{-T} K^{-1} m = 0$. 通常用 ω 记矩阵 $K^{-T} K^{-1}$ 所代表的绝对二次曲线的像, 用 ω^* 记 ω 的对偶 [15] (指所有与 ω 相切的直线族组成的包络). 上式表明, 在内参数恒定的前提下, Ω 相当于一个虚拟的标定块, 无论摄像机如何运动, 它均能被“看到”, 且所成的像 ω 保持不变. Ω 的这种不变性是几乎所有自标定方法的基础. 自标定的目标就是要寻找 ω (或 ω^*) 并计算出 $K^{-T} K^{-1}$, 再对 $K^{-T} K^{-1}$ 取逆得到 KK^T , 对 KK^T 做 Cholesky 分解 [16], 即可求出内参数矩阵 K .

2.4 绝对二次曲面

绝对二次曲面 Ω^* 是空间中一个特殊的虚二次曲面. 从代数角度考虑, Ω^* 在扩展欧氏坐标系 (无穷远平面方程为 $t=0$) 中的二次型为

$$\Omega^* = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

在任意射影坐标系下, 该二次型将成为一个形式不固定、半正定、秩为 3 的 4×4 矩阵. 如果再从几何角度考虑, (2) 式所代表的几何元素有两种理解方式: (I) Ω^* 可以被看成一个由点的轨迹组成的曲面, 该曲面上的任意点 x 均满足方程 $x^T \Omega^* x = 0$, 此时该曲面是被压缩到无穷远平面上的一个退化的二次曲面, 它落在无穷远平面上的边缘即为绝对二次曲线, 它所成的像等同于 ω ; (II) Ω^* 也可被理解成由一组平面族组成的包络, 该包络中任意平面的法向矢量 n^T 均满足方程 $n^T \Omega^* n = 0$, 容易证明, 该包络中任意平面均与绝对二次曲线 Ω 相切, 所以 Ω^* 等同于 Ω 的对偶 (absolute dual quadric), 且该包络的成像也等同于绝对二次曲线像的对偶 ω^* . 在第二种理解方式下, 若设 P 为投影矩阵, 则 Ω^* 应满足 $\omega^* \cong P \Omega^* P^T$.

上式非常重要, 它是在第 3 节中将介绍的许多自标定方法的基础. 与 Ω 类似, Ω^* 也是欧氏变换¹⁾ 下的几何不变量, 但 Ω^* 在代数处理上较 Ω 有更多的优越性, 这是因为我们已由 2.3 节知 Ω 是一个二维几何元素, 它的定义需要两个方程, 其中包括支持它的无穷远平面方程; 而 Ω^* 则是三维几何元素, 它的定义很自然地将无穷远平面方程和自身方程合为一体, 因此可以直接把 Ω^* 放在三维射影坐标系中加以研究, 这在许多场合会带来便利.

2.5 单应矩阵

设 π 为空间中任意平面, 在 π 上建立二维射影坐标系后, 用 x 记落在 π 上的任意一点的齐次坐标, 用 m, m' 记该点在两图像上的对应像点, 则关系式 $m \cong H_1 x, m' \cong H_2 m$ 成立. 当平面 π 不通过任一光心时, 上式中的 H_1, H_2 均是 3×3 的非奇异矩阵, 习惯上我们称 H_1 为 π

1) 这里的欧氏变换 = 标准欧氏变换 (旋转和平移) + 总体尺度因子变换. 下同.

到第一幅图像的单应矩阵(homography), H_2 为 π 在两幅图像间的单应矩阵.

2.6 多视点间的几何关系

1) 双视点. 在双视点结构下, 图像间的对应点遵循着众所周知的对极几何关系^[14] (epipolar geometry). 如图 1, 摄像机分别在不同的光心位置 C, C' 摄取图像, 给定第一幅图像上的点 m , 则它的对应点 m' 必然落在由 xCC' 三点确定的平面 π 与第二个图像平面的交线 l'_m 上, 同理, m 必然落在平面 π 与第一个图像平面的交线 l_m 上. 这种约束关系是两幅图像间最基本的几何关系, 习惯上称为极线约束, 从数学上可以描述为

$$m'^T F m = 0$$

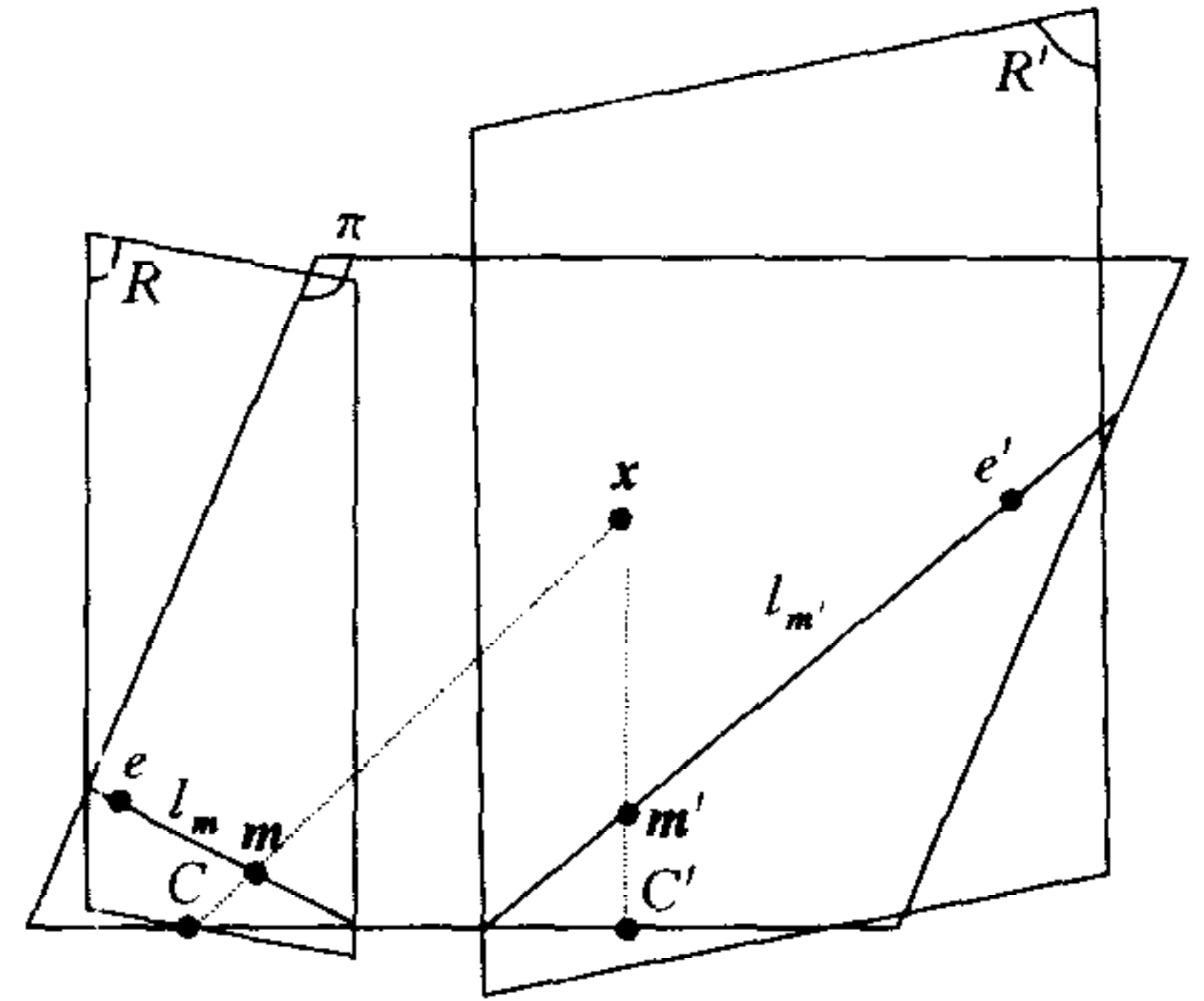


图 1 两幅图像间的对极几何关系

(3) Fig. 1 Epipolar geometry between two images

式中 F 是秩为 2 的 3×3 矩阵, 习惯上被称为基础矩阵(fundamental matrix). 关于 F 的性质的讨论, 请参阅文献[17,18]. 由于基础矩阵 F 包含了两幅图像间的所有几何信息, 因此精确地计算 F 对于摄像机标定和三维重建具有重要意义. 常用计算 F 的方法是直接基于(3)式的 8 点算法, 原理如下: 设 $m = [u \ v \ 1]^T$, $m' = [u' \ v' \ 1]^T$, 将 F 写成由各分量组成的列矢量形式, 即 $f = [F_{11} \ F_{12} \ F_{13} \ F_{21} \ F_{22} \ F_{23} \ F_{31} \ F_{32} \ F_{33}]^T$, 则对每一对对应点对 (m, m') , 可写出方程 $[uu' \ vu' \ u' \ uv' \ vv' \ v' \ u \ v \ 1]f = 0$. 将 $n(n \geq 8)$ 个这样的方程叠加起来得到线性方程组 $Af = 0$, 再利用 SVD 分解^[19] 可求出该方程组的最小二乘解. 8 点算法简单易行, 但实验表明图像中有噪声时, 矩阵 A 的条件数极大, 不容易得到精确解. 为克服这一弊端, Hartley 在文献[17]中将图像点坐标规一化到区间 $[-1, 1]$, 大大降低了矩阵 A 的条件数, 提高了求解的精度. 关于其它求解 F 的方法请参见文献[20].

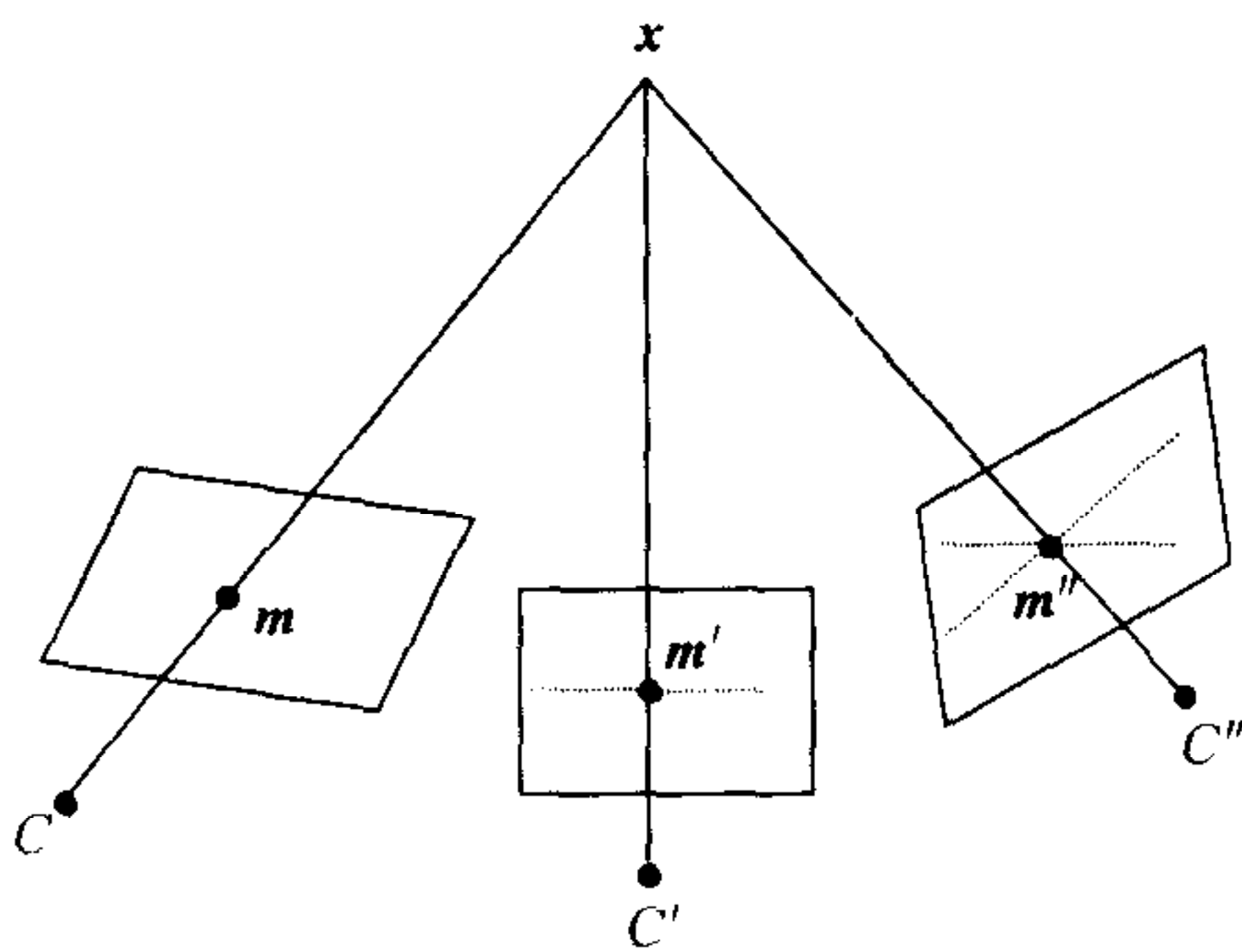


图 2 三幅图像间的张量关系(trifocal tensor)

Fig. 2 Trifocal tensor among three images

2) 三视点. 令 (m, m', m'') 是三视点间的一组对应点, 它们之间的线性关系可以用一个 $3 \times 3 \times 3$ 的三视点张量 T (trifocal tensor) 来描述^[21] (如图 2), 关系式如下:

$$m''_i = m'_i \sum_{k=1}^3 m_k T_{kjl} - m'_j \sum_{k=1}^3 m_k T_{kil}.$$

上式遵循 Einstein 约定, 下标 i, j, k 表示坐标分量, 取值范围为 1, 2, 3, 相互之间的取值遵循着叉乘规定. 相应地, 直线也有类似关系^[22,23], 若令 (I, I', I'') 是三视点间的一组对应直线, 则它们满足

$$I_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 I'_j I''_k T_{ijk}.$$

关于三视点张量的性质和计算的进一步讨论请参见文献[24,25].

3) 更多视点. 与三视点类似, 四视点间的几何关系可以用四视点张量(quadrifocal tensor)来描述, Hartley 在文献[26]中讨论了四视点张量的性质并给出了计算方法. 由于射影空间中点的齐次坐标只有 4 个分量, 多于四视点的图像对应点之间将不再有新的约束关系, 具体证明请参见文献[27]. 对多视点间几何关系的深入讨论请参见文献[25,28,29]. 另外,

最近 Ma Y 在文献[30]中证明,从代数的观点看,四视点张量不是一个独立的约束,它可以分解成基本矩阵约束和三视点张量的组合.

2.7 分层重建

与摄像机标定紧密联系的是三维欧氏重建,在这里我们将简要地介绍分层重建的概念.通常我们所建立的世界坐标系是欧氏意义下的,但在某些场合,建立比欧氏坐标系更广泛的仿射,甚至射影坐标系可能会带来便利. Faugeras 在文献[31]中首先提出了将三维欧氏重建分解成三步:1)根据图像对应点得到射影重建(也称为射影标定),并计算出射影意义下的摄像机投影矩阵.实现射影重建的方法很多,请参阅文献[32~37]等;2)在射影重建所恢复的射影空间中,确定无穷远平面的位置,把射影空间升级到仿射空间,这一步也称为仿射标定;3)在仿射重建的基础上,进一步施加约束,确定绝对二次曲线(面)像的方程并计算出内参数,从而最终恢复出欧氏结构.

射影重建也称为射影标定,其定义如下:设空间中第 k 个点的齐次坐标为 x_k ,它在第 i 幅图像上的像点为 m_{ik} ,射影重建即是要找到一组 3×4 的矩阵 P_i ,满足

$$\lambda_{ik} m_{ik} = P_i x_k \quad (4)$$

显然,从射影重建恢复出的射影坐标系不是唯一的,因为对于空间中任意一个射影变换(用一个 4×4 的非奇异矩阵 H 表示),形如 $(\{P_i H^{-1}\}, \{H x_k\})$ 的射影重建都满足(4)式.摄像机的完全自标定和欧氏重建要求找到唯一的 H ,能将 P_i 变换到欧氏意义下的摄像机投影矩阵,即要对所有的 i 满足

$$P_i H^{-1} = K(R_i \quad -R_i t_i) \quad (5)$$

如果以第一幅图像为基准做射影对齐,将(4)式改写成

$$P_1 \cong [I \quad \mathbf{0}], \quad P_i \cong [H_{1i} \quad e_{1i}] (i \geq 2) \quad (6)$$

上式中的 e_{1i} 是极点, H_{1i} 是参考面的单应矩阵,此参考面被证明^[38]可以是射影空间中的任意平面.作射影对齐后,在(6)式右边做具有如下形式的 H_A 变换

$$H_A = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}^T & \sigma \end{bmatrix}^{-1} \quad (7)$$

将不会改变 P_1 . 上式中的 σ 是尺度因子, \mathbf{a} 是某一平面的法向矢量,这意味着作形如(7)式的射影变换其实就是改变了参考面.如果确定了法向量为 \mathbf{a}_∞ 的某平面为无穷远平面,并作形如(7)式的变换将无穷远平面变为参考面,则射影空间被升级到仿射空间,此时无穷远平面的单应矩阵可通过式

$$H_{1i}^\infty \cong H_{1i} + e_{1i} \mathbf{a}_\infty^T \quad (8)$$

与 H_{1i} 联系起来.从(8)式确定出 H_{1i}^∞ 后即得到了仿射重建,此时摄像机成像矩阵为

$$P_1 \cong [I \quad \mathbf{0}], \quad P_i \cong [H_{1i}^\infty \quad e_{1i}] \quad (9)$$

如果进一步求出了摄像机内参数矩阵 K ,则在(9)式规定的仿射空间里作仿射变换 H_E 可将仿射重建升级到欧氏重建, H_E 具有形式

$$H_E = \begin{bmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma \end{bmatrix}^{-1} \quad (10)$$

将(10)式中的 H_E 作用于(9)式的右边,可以得到欧氏意义下的摄像机成像矩阵

$$P_{E1} \cong K[I \quad \mathbf{0}], \quad P_{Ei} \cong K[R_i \quad -R_i t_i] \quad (11)$$

3 自标定方法综述

在这一节里,我们按照自标定方法提出的时间和方法的共性分类.所有自标定方法均是

针对运动的单个摄像机而言,摄像机采用的是针孔模型,并假定匹配点对应已经确定.以下除非特殊申明,摄像机的内参数均保持恒定.

3.1 直接求解 Kruppa 方程的自标定

Faugeras, Luong, Maybank 等提出的自标定方法是直接基于求解 Kruppa 方程的一种方法^[5,32],该方法利用绝对二次曲线像和极线变换的概念推导出了 Kruppa 方程.

如图 3,在光心 C 对应的图像平面 1 上,存在着两极线 l_1, l_2 与 ω 相切,在光心 C' 对应的图像平面 2 上也存在着两极线 l'_1, l'_2 与 ω' 相切(ω, ω' 分别是绝对二次曲线 Ω 在图像平面 1, 2 上的像). 根据射影几何^[15]的原理, l_1 与 l'_1, l_2 与 l'_2 分别对应着无穷远平面 π_∞ 上两条与绝对二次曲线相切的直线,这种对应被称为极线变换^[7]. 如果将极线 l_1 表示成 $e \times m$, 其切点 m 在图像平面 2 上形成的极线即为 l'_1 , 而 l'_1 的方程可用基础矩阵表示为 Fm , 则根据极线变换得

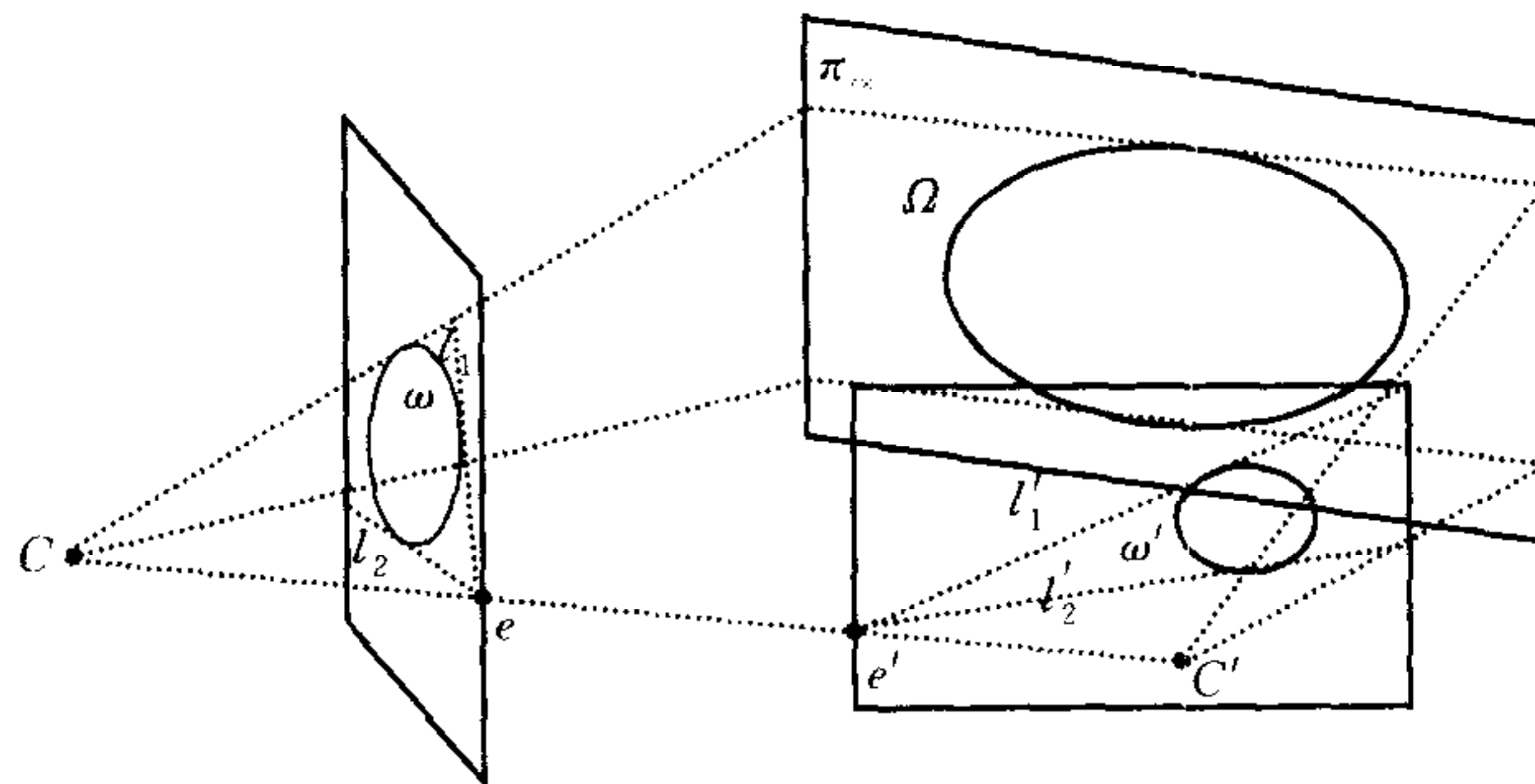


图 3 Kruppa 方程根据绝对二次曲线满足的几何关系推导出来,即通过光心 C, C' 且与无穷远平面上 π_∞ 的绝对二次曲线 Ω 相切的两个平面必定同时与 Ω 的象 ω, ω' 相切

Fig. 3 There exist two planes both going through the two optical centers C and C' and being tangent to the absolute conic. These two planes will intersect with the two image planes at lines $l_1(l_2)$ and $l'_1(l'_2)$, respectively, $l_1(l_2)$ and $l'_1(l'_2)$ will be tangent to the image of the absolute conic ω and ω' , respectively. From the above facts, the Kruppa equation can be derived

$$(e \times m)^T K K^T (e \times m) = m^T [e]_{\times}^T K K^T [e]_{\times} m \Leftrightarrow (Fm)^T K K^T (Fm) = m^T F^T K K^T Fm, \quad \forall m,$$

即

$$[e]_{\times}^T K K^T [e]_{\times} \cong F^T K K^T F \quad (12)$$

式中 $[\]_{\times}$ 表示矢量的反对称矩阵. 从(12)式可以得到 5 个关于 ω 分量的二次方程, 但其中只有 2 个是独立的^[39]. (12)式常由于其形式的特殊被称为 Kruppa 方程. 容易看出, 从两幅图像总共可以得到 2 个 Kruppa 方程, 在给定 3 幅图像的情形下, 原则上通过联立求解可解出摄像机的全部 5 个内参数.

围绕着求解 Kruppa 方程, 文献中存在着不同的途径. Faugeras, Maybank 等^[7,8] 最早提出的算法完全基于代数几何的概念, 该算法对噪声极其敏感, 普通计算机的浮点运算已不足以满足其要求. Luong^[39] 提出了一套基于连续同伦算法^[40] 的较实用的求解策略, 降低了对噪声的敏感度, 但该策略要求拐点的提取精度达到子像素级(0.2 个像素). 这两种直接求解 Kruppa 方程的方法存在着共同的弊端: 求解困难, 而且是针对两两图像之间列方程, 当图像数目增加时, 可能解的个数呈指数增长, 使得直接求解失去意义. 另一类求解 Kruppa 方程的途径是间接的非线性优化算法, Zeller 等^[41] 利用 Kruppa 方程计算出多幅图像上的所有

点到对应极线距离之和,再利用 Levenberg-Marquardt 优化算法^[42]减小该距离,并求出相应的内参数;文献[27]则首先令(12)式两边的模相等以消去常数因子,再直接对两边的代数距离进行优化,优化函数如下(令 $F(A) = A / \|A\|_F$, $\|\cdot\|_F$ 表示 Frobenius 模):

$$c_K(K) = \sum_{i>j} \|F(KK^T) - F(F_{ji}^T K K^T F_{ji})\|_F.$$

上述优化算法的缺点在于,待优化参数过多,且容易陷入局部最优值.部分学者^[43,44,39]还通过简化摄像机模型以降低 Kruppa 方程的求解难度,如 Hartley 在文献[44]中假设除焦距 f 外的其它内参数均已知,利用对基础矩阵 F 的 SVD 分解从两幅图像中计算 f .

我们注意到在 2000 年的 ECCV 会议上, Ma 等^[45]对 Kruppa 方程的奇异性和可解性做了详细的分析. Ma 等在文献[45]中证明:在某些特殊情形下(如摄像机的旋转轴平行或垂直于平移矢量),Kruppa 方程可以被归一化为线性方程,相应的自标定算法也成为线性方法.文献[45]还给出了利用 Kruppa 方程自标定的充分性证明.

基于 Kruppa 方程的自标定方法不需要对图像序列做射影重建,而是对两两图像之间建立方程,在某些很难将所有图像统一到一个一致的射影框架的场合,该方法会较下面将介绍的分层逐步标定法更具有优势,但获得这种优势的代价是:在从(12)式推导出 Kruppa 方程时,隐含将无穷远平面的 3 个未知数消去了,这意味着无法保证无穷远平面在所有图像对确定的射影空间里的一致性,从而也部分解释了当图像序列较长时,基于 Kruppa 方程的自标定方法不稳定的现象.雷成等指出了基于 Kruppa 方程标定摄像机存在的三种不鲁棒性原因^[65].

3.2 分层逐步标定

近年来,分层逐步标定法成为自标定研究中的热点,并在实际应用中逐渐取代了直接求解 Kruppa 方程的方法.分层逐步标定法首先要求对图像序列做射影重建(参见 2.7 节),再通过绝对二次曲线(面)施加约束,定出仿射参数(即无穷远平面方程)和摄像机内参数.限于篇幅,下面仅列出其中几种较有代表性的方法.

1) Hartley 的方法. Hartley 在文献[9]中提出了一种直接对摄像机投影矩阵进行 QR 分解的自标定方法,首先进行射影重建,做射影对齐后得到形如(6)式的摄像机投影矩阵序列.自标定的目标即是要寻找合适的射影变换 H_E ,将 P_i 变换到欧氏意义下的投影矩阵,即

$$P_i H_E \cong K [R_i \quad -R_i t_i] \quad (13)$$

在 $P_1 \cong [I_{3 \times 3} \quad \mathbf{0}_3]$ 的前提下, H_E 共有 8 个未知数,且具有如下形式:

$$H_E \cong \begin{bmatrix} K & 0 \\ \mathbf{a}_\infty^T & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

将(14)式代入(13)式,并取前三列得

$$P_i \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{a}_\infty^T \end{bmatrix} K \cong K_i R_i \quad (15)$$

文献[9]首先通过预估计得到 K, \mathbf{a}_∞^T ,再利用 QR 分解法^[16]分解(15)式的左边得到 K_i .由于摄像机内参数保持恒定, K_i 应接近于 K ,利用 Levenberg-Marquardt 算法^[42]对式

$$\sum_{i>0} \| \alpha_i K_i K^{-1} - I \|^2 \quad (16)$$

进行优化可以解出 K . Hartley 方法利用了 QR 分解法消去旋转矩阵 R ,这是该方法的最大特色.该方法的优点在于当输入图像序列较长时,往往能取得较好的效果;不足之处在于其初始值必须预先知道.

2) Heyden 和 Åström 的方法. Heyden 和 Åström 在文献[46]中提出了类似的方法. 与 Hartley 方法相同, 文献[46]也利用了(6)式, 但区别在于 Heyden 等将(14)代入(13)式后, 利用了 $R_i R_i^T = I$ 消去 R_i 和 t_i 并得到

$$\lambda_i P_i \begin{bmatrix} KK^T & K^T \mathbf{a}_\infty \\ \mathbf{a}_\infty^T K & \pi_\infty^T \mathbf{a}_\infty \end{bmatrix} P_i^T = KK^T \quad (17)$$

通过优化下式可以解出内参数矩阵 K

$$f(K, \mathbf{a}_\infty, \lambda_i) = \sum_i \left\| \lambda_i P_i \begin{bmatrix} KK^T & K^T \mathbf{a}_\infty \\ \mathbf{a}_\infty^T K & \pi_\infty^T \mathbf{a}_\infty \end{bmatrix} P_i^T - KK^T \right\|^2 \quad (18)$$

该方法也存在着计算量大, 优化的收敛性难以保证的弊端. 必须指出的是, (18)式非常重要, 它其实也是下面将介绍的 Triggs 的基于绝对二次曲面、Pollefeys 的分层重建等方法的基础.

3) Pollefeys 的方法. Pollefeys 等^[47]从单应矩阵和绝对二次曲线出发推导出了类似文献[46]的结果. 由于无穷远平面上的绝对二次曲线的像不随摄像机运动而改变, 利用(8)式得

$$\lambda_i KK^T = [H_{1i} + \mathbf{e}_{1i} \mathbf{a}_\infty^T] KK^T [H_{1i} + \mathbf{e}_{1i} \mathbf{a}_\infty^T]^T \quad (19)$$

文献[48]建议利用 Levenberg-Marquardt 算法优化式

$$\sum_{i=2}^n \left\| \frac{1}{\lambda_i} F([H_{1i} + \mathbf{e}_{1i} \mathbf{a}_\infty^T] KK^T [H_{1i} + \mathbf{e}_{1i} \mathbf{a}_\infty^T]^T) - F(KK^T) \right\|_F \quad (20)$$

以解出 K . 可以看出, 优化函数(20)与(18)在形式上类似, 都存在着未知的常数因子 λ_i , 但在处理该常数因子上, Pollefeys 和 Heyden 采用了不同的途径: Heyden 是将 λ_i 看作独立的未知数与其它参数同时优化, 而 Pollefeys 则利用(19)式两边的模相等估计出

$$\lambda_i = \| H_{1i} + \mathbf{e}_{1i} \mathbf{a}_\infty^T \|^2 \quad (21)$$

由于减少了待优化的未知数个数, 优化函数将更易于收敛.

Pollefeys 在文献[49]中还证明: 该方法与基于 Kruppa 方程的方法^[7]、Heyden 等的方法^[47]、Triggs 的基于绝对二次曲面的方法^[10]等在本质上是相同的.

以上我们介绍的三种方法有着共同的特点: 都是在射影标定的基础上, 以某一幅图像为基准做射影对齐, 从而将未知数缩减至 8 个(无穷远平面参数 3 个和摄像机内参数 5 个, 不包括总体常数因子), 再通过非线性优化算法同时解出所有未知数. 缺点在于: 1) 非线性优化算法的初值只能通过预估得到, 不能保证收敛性; 2) 射影重建时均是以某参考图像为基准, 参考图像的选取不同, 标定的结果也不同, 这不满足一般情形下噪声均匀分布的假设.

3.3 基于绝对二次曲面的自标定

Triggs^[10]最早将绝对二次曲面的概念引入到自标定的研究中来, 该方法的原理如下.

由 2.4 节知, 绝对二次曲面 Ω^* 对应着图像上的绝对二次曲线像的对偶 ω^* , 即下式成立

$$\omega^* \cong KK^T = \lambda_i P_i \Omega^* P_i^T \quad (22)$$

(22)式非常重要, 它是将摄像机内参数的自身约束转移到对 Ω^* 的约束的纽带. 不难看出, (22)式与 Heyden 等给出的(17)式在本质上是相同的, 但 Heyden 等并未给出其相应的几何解释.

原则上通过联立求解(22)式组成的方程组可以计算出 ω^* . 由于(22)式中的常数因子 λ_i 随图像不同而改变, 为消去 λ_i , 对(22)式两边矩阵的对应项作叉乘

$$[\omega]_{kl} [P_i \Omega^* P_i^T]_{k'l'} - [\omega]_{k'l'} [P_i \Omega^* P_i^T]_{kl} = 0 \quad (23)$$

上式中的 $[\dots]_{kl}$ 表示矩阵第 k 行第 l 列元素. 对于每一幅图像, 可得到 15 个形如(23)式的方

程,但其中最多只有 5 个是独立的^[58].

Triggs 提出了两种方法求解该方程组:第一种方法利用了 SQP 优化算法(sequential quadratic programming),在 $\det(\Omega^*)=0$ 的约束下直接求解代价函数 $\sum_i \|\omega \wedge (P_i \Omega^* P_i^T)\|^2$ 的最小值,利用该方法,给定至少 3 幅图像即可完全标定,初始值由预估得到;第二种方法被称为半线性方法(quasi-linear),将 ω, Ω^* 的分量分别组织成列矢量 $\bar{\omega}_{6 \times 1}, \bar{\Omega}_{10 \times 1}$,并以 $\bar{\omega} \bar{\Omega}^{*T}$ 的 59 个分量为未知数,则此时(23)式成为线性方程,再联立从多幅图像(≥ 4)得到的所有这样的线性方程,在最小二乘意义下解出 59 个未知数.半线性方法存在着过分参数化的倾向,噪声大时误差也较大.

基于 Ω^* 的自标定方法与基于 Kruppa 方程的方法在本质上是一致的,都是利用了绝对二次曲线在欧氏变换下的不变性,但在输入多幅图像并能得到一致射影重建的情形下,前者较后者更具有优势,其根源在于 Ω^* 包含了无穷远平面和绝对二次曲线的所有信息,且基于 Ω^* 的自标定方法又是在对所有图像做射影重建的基础上计算 Ω^* 的,从而保证了无穷远平面对所有图像的一致性.与此相比,基于 Kruppa 方程的方法是在两两图像之间建立方程,在列方程过程中已将支持绝对二次曲线的无穷远平面参数消去,所以当输入更多的图像对时,不能保证该无穷远平面的一致性.

3.4 Pollefeys 的模约束

以上介绍的分层逐步标定法有一个共同的特点:在得到射影重建后,将仿射标定和欧氏标定合为一步,一次性地求解出 3 个仿射参数(即无穷远平面参数)和 5 个摄像机内参数.而 Pollefeys^[11]提出的模约束法则是将仿射标定和欧氏标定分开进行,其原理如下.

设 H_{ij}^∞ 表示无穷远平面在图像 i, j 间的单应矩阵,联系 H_{ij}^∞ 在欧氏坐标系下的表达式(11)和在射影坐标系下的表达式(8)可得到

$$H_{ij}^T \cong H_{1j}^\infty H_{1i}^{\infty -1} \cong KR_j^T R_i^{-T} K^{-1} \cong (H_{1j} + e_{1j} a_\infty^T)(H_{1i} + e_{1i} a_\infty^T)^{-1} \quad (24)$$

Pollefeys 由(24)式发现, H_{ij}^∞ 与一个旋转矩阵 $R_j^T R_i^{-T}$ 在相差一个尺度因子下共轭,则根据旋转矩阵的性质, H_{ij}^∞ 的 3 个特征值的模应相等,这就是所谓的“模约束”.必须指出的是,这种模约束只是在内参数矩阵 K 恒定的情形下才成立.

文献[11]进一步将模约束用 H_{ij}^∞ 的特征多项式系数表达,即如果设 H_{ij}^∞ 的特征多项式为

$$\det(H_{ij}^\infty - \lambda I) = l_3 \lambda^3 + l_2 \lambda^2 + l_1 \lambda + l_0 = 0 \quad (25)$$

则由模约束可推出如下必要条件

$$l_3 l_1^3 = l_2^3 l_0 \quad (26)$$

利用(24)式,将 l_i 写成关于 a_∞ 的三个分量的表达式,从而由(26)式得到了关于 a_∞ 的 4 次多项式约束,在最少 3 幅图像下,可通过联立求解 4 次多项式方程组计算出 a_∞ ,将计算出的 a_∞ 代入(19)式即可线性求解出绝对二次曲线的像 KK^T .此后,可以构造形如(20)的优化函数,并利用 Levenberg-Marquardt 等算法对求解结果精化.

3.5 可变内参数下的分层逐步标定

所有以上讨论的自标定方法,均是针对摄像机内参数恒定的情形,但在某些实际应用场合,经常需要改变摄像机内参数,如缩放焦距等,此时以上的自标定方法不再适用.为解决此问题,近年来人们提出了可变内参数下自标定的概念. Pollefeys 等^[49]给出了一种变焦距下的自标定方法,他们采用类似 Moons 等^[6]的方法,首先控制摄像机保持焦距不变做一次纯平移,从而获得仿射标定^[6],计算出初始焦距后,再利用模约束在焦距变化时标定. Sturm^[36]

提出了一种针对可变焦距摄像机的自标定方法,该方法需要预标定,先确定出 5 个内参数的互相关模型,从而将焦距变化时的自标定过程简化到只需计算一个内参数. Hartley 等^[50]首先利用射影重建中的“前后性”(chirality)^[51]将 \mathbf{a}_∞ 的取值限制到三维参数空间中的一个立方体范围,再利用穷举法直接搜索出合适的 \mathbf{a}_∞ 并计算 H_{ij}^∞ ,接下来的自标定过程则非常简单.

以上方法均是采用了简化的透视摄像机模型,并没有从理论上回答可变内参数下自标定的可能性问题. Heyden 和 Åström 在解决该问题上迈出了第一步,他们在文献[12]中证明在倾斜因子 s 为零,纵横比 α 恒定的前提下,可以实现可变内参数下的自标定. 文献[12]中的证明不够完善,而且给出的自标定方案是对所有参数,包括点的三维坐标、摄像机内外参数、常数因子等,同时进行优化,这在实际应用中难以做到,另外,文献[12]无法解决优化的初始值问题. 1998 年,Pollefeys 等^[13]在 Heyden 工作的基础上进一步从理论和实践上较完美地解决了可变内参数下的自标定问题,并相应地给出了一种比较实用的基于优化的自标定方法. Pollefeys 本人也因此项工作获得 1998 年度计算机视觉界的最高奖——David Marr 奖.

Pollefeys 等^[13]首先证明,在 s 为零且其它内参数可任意变化的前提下,可以实现完全的自标定和欧氏重建. 下面简要介绍其原理.

设第 i 幅图像对应的内参数矩阵为 K_i ,由(22)式可得

$$K_i K_i^T \cong P_i \Omega^* P_i^T \quad (27)$$

考虑到 Ω^* 矩阵的对称型和秩为 3,满足(27)式的 Ω^* 可以具有如下形式

$$\lambda_i P_i \begin{bmatrix} K K^T & K^T \mathbf{a}_\infty \\ \mathbf{a}_\infty^T K & \mathbf{a}_\infty^T \mathbf{a}_\infty \end{bmatrix} P_i^T = K K^T \quad (28)$$

则通过优化下式可以解出所有未知数

$$c_F(K_i, K, \mathbf{a}_\infty) = \sum_i \| F(K_i K_i^T) - F(P_i \Omega^* P_i^T) \|_F \quad (29)$$

为保证(29)式的收敛,必须获得良好的 K_i 的初始值,文献[13]的做法是,假定倾斜因子 s 为零且主点坐标 (u_0, v_0) 已知,则此时基于(27)式的自标定成为线性过程,将该线性标定的结果作为(29)式的初始值,可以保证优化过程收敛.

Heyden 和 Åström 在文献[52]中将可变内参数下自标定的条件进一步减弱,证明了在摄像机任意一个内参数恒定的条件下,即可实现可变内参数下的自标定. 至此,可变内参数下自标定的可能性问题得到彻底解决. 当然,当 5 个内参数均变化时,从理论上来说,此时是无法进行摄像机自标定的.

3.6 自标定中的临界运动

自标定中的临界运动(critical motion)是自标定研究中必须特别关注的问题,它是指由于摄像机作了某些特殊运动,导致所拍摄的图像序列不足以唯一正确地解出内参数. 临界运动是由摄像机运动太“特殊”或内参数本身的约束太少等原因导致的退化情形,在自标定过程中应该尽力避免. Sturm 在文献[53]中详细讨论了内参数恒定时自标定过程中可能出现的临界运动,并具体分析了几种现有自标定算法的退化情形. Ma 在文献[54]中对于临界运动也有详尽的分析并因此获得 1999 年度的 David Marr 奖. 对于可变内参数下自标定的临界运动,Pollefeys 在文献[26]中作了具体的讨论,并给出了识别临界运动的具体算法.

4 非透视模型下的摄像机自标定

4.1 仿射摄像机的自标定

第3节中的自标定均是针对针孔模型下的透视摄像机而言,当物体的深度远大于摄像机运动的基线长时,可以考虑用其它更简单的模型来近似针孔模型,例如正交投影、弱透视、准透视投影等^[14],而所有这些近似,都可以统一到仿射摄像机(affine camera)的模型下.

仿射摄像机的概念由 Mundy 和 Zisserman 首先引入^[55].类似于透视摄像机的成像公式(1),仿射模型下的成像公式可写成

$$\lambda \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = P_{3 \times 4} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & 0 & p_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

用非齐次坐标将(30)式改写成

$$\lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M_{2 \times 3} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_u \\ l_v \end{pmatrix} (M_{ij} = P_{ij}/P_{34}, l_u = P_{14}/P_{34}, l_v = P_{24}/P_{34}, \lambda = P_{34}),$$

与透视摄像机下的做法相同,可利用 QR 算法^[16]将 $M_{2 \times 3}$ 作如下分解

$$M_{2 \times 3} = A_{2 \times 2} R_{2 \times 3} = k \begin{pmatrix} \xi_a & 0 \\ s_a & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \end{bmatrix},$$

这里的 $A_{2 \times 2}, R_{2 \times 3}$ 分别被称为仿射摄像机的内外参数矩阵, k 是总体尺度因子, ξ_a, s_a 分别是纵横比和倾斜因子. 仿射摄像机的自标定问题比透视摄像机更为简单, 权龙在这方面做了大量的工作, 下面简要地介绍他在文献[56]中提出的方法.

文献[56]首先采用类似于文献[57]中的 SFM 方法(structure from motion)恢复出仿射结构, 得到视点 i 仿射意义下的投影矩阵 M_i . 显然, M_i 与欧氏意义下的投影矩阵之间存在着一个线性变换 $D_{3 \times 3}$ 满足 $M_i D_{3 \times 3} = A_i R_i$. 令 $X = D_{3 \times 3} D_{3 \times 3}^T$, 从上式得到

$$M_i X M_i^T = M_i D_{3 \times 3} D_{3 \times 3}^T M_i^T = A_i A_i^T \quad (31)$$

给定至少 4 幅图像, 即可联立多个形如(31)式的方程解出 X , 原则上再利用 Cholesky 分解法可解出 $D_{3 \times 3}$, 继而求出内参数矩阵 A . 但文献[56]指出, 前面计算出的 X 在大多数情形下不是正定的, 不满足 Cholesky 分解的条件. 为此, 文献[56]中采用了优化方法, 将 X 的正定分解作为优化的强制性约束, 优化函数如下:

$$\min f(z) = \sum_i \left(\frac{m_i^T X m_i}{n_i^T X n_i} - \frac{m_{i+1}^T X m_{i+1}}{n_{i+1}^T X n_{i+1}} \right)^2 + \left(\frac{m_i^T X n_i}{n_i^T X n_i} - \frac{m_{i+1}^T X n_{i+1}}{n_{i+1}^T X n_{i+1}} \right)^2, \text{ 当 } X = Z Z^T \text{ 时,}$$

上式中的 m_i^T, n_i^T 分别是 M_i 的两个行矢量, Z 是下三角正定矩阵, 优化方法可选择 Levenberg-Marquart 等, 优化初始值由预估得到.

4.2 一维摄像机的自标定

一维摄像机的概念(1D camera)最早由权龙、Faugeras 等在研究仿射摄像机模型下直线的成像时引入的^[19,58,59]. 普通的摄像机是将三维射影空间中的点投影到二维射影平面(即成像平面), 我们称之为二维摄像机, 而一维摄像机则是将二维射影平面 P^2 中的点 $x = (x^1 \ x^2 \ x^3)^T$ 投影到一维射影直线 P^1 上的点 $u = (u^1 \ u^2)^T$, 成像公式为 $\lambda u = M_{2 \times 3} x$. 在一

维摄像机模型下,同一空间点在三幅图像中所成的像点之间存在着如下的基本约束

$$T_{ijk}u^i u'^j u''^k = 0 \quad (32)$$

上式遵循 Einstein 约定,其中的 T_{ijk} 是 $2 \times 2 \times 2$ 的张量,共有 8 个分量,它的作用相当于二维摄像机模型下的基本矩阵 F ,描述了三幅图像间的最基本的几何关系. 给定至少 7 对匹配点,即可利用(32)式线性解出 T_{ijk} . 在一维摄像机模型下,二维射影平面 P^2 上存在着两个特殊的圆环点 I 和 J ,它们的像点在摄像机运动下保持不变,因此一维摄像机的标定等同于确定这两个特殊点的像点. 这一点与前面介绍的绝对二次曲线很相似. 一维摄像机的标定过程完全是线性求解(外加求解一个 3 次方程的根),简单方便,可以应用于以下场合:1) 在某些采用激光、红外线、超声波的主动视觉系统中,成像系统可以归结为一维摄像机模型;2) 在二维仿射摄像机模型下直线的成像等同于在一维摄像机模型下的成像;3) 摄像机做平面运动(planar motion)的二维摄像机自标定问题已被证明^[8]等价于一维摄像机的标定问题.

4.3 摄像机对的自标定

摄像机对(stereo rig)由两台固定在平台上的摄像机组成,两台摄像机之间的基线一般较短,以保证摄取的景物大部分能重叠. 摄像机对可以相对于平台做刚体运动,但两台摄像机之间的相对位姿(R, t)保持不变. 摄像机对被广泛地应用于机器人导航、监控、三维重建等视觉领域.

摄像机对的自标定原理与单个摄像机基本相同,但摄像机对有其特殊性:它的两台摄像机之间的相对位姿始终保持不变,这种特殊性导致了针对摄像机对的匹配、标定过程较单个摄像机更为简单. 文献中已有多种针对摄像机对的自标定方案^[60~63],其中文献[63]采用简化了的摄像机模型(主点坐标已知,倾斜因子为零),利用非线性优化方法减小图像序列上的所有点到对应极线距离之和,从而解出内参数. 其它方法^[60~62]则大多采取了类似 3.2 节的分层逐步自标定方法.

5 总结和展望

在摄像机自标定研究方面,国际上有代表性的研究组有:英国牛津大学的 Zisserman 组,比利时的 Van Gool 组,瑞典的 Heyden 组,法国的 Faugeras 组和 Triggs 及 Sturm 组,美国 Illinois 大学的 Ma Yi, Microsoft 研究院的张正友,澳大利亚的 Hartley,以色列的 Shashua 等. 在这方面,最完善的参考书首推 2000 年出版的由 Hartley 和 Zisserman 合著的《Multiple View Geometry in Computer Vision》一书^[66].

就摄像机自标定的研究而言,通过十多年的不懈努力,理论上的问题已基本解决. 目前研究的重点是如何提高标定算法的鲁棒性以及如何很好地用这些理论来解决实际视觉问题.

结合当前自标定技术的研究和实际应用,我们有以下建议:

1) 推荐使用分层逐步自标定方法,因为它较其它方法具有更好的鲁棒性,并且和分层重建紧密结合;事实上已有不少成功的视觉系统应用了分层逐步自标定方法,如牛津大学 Zisserman 研究组的主动视觉导航系统^[64],Pollefeys 研究组的物体表面自动生成系统等^[13];在特殊情况下,如无法得到一致射影重建时,才应考虑直接求解 Kruppa 方程;

2) 由于自标定方法较经典标定方法精度要差,有必要对自标定方法的结果进行非线性优化;

3) 随着摄像机硬件技术的发展,某些内参数已非常接近理想值(如主点坐标近似于图像

中心, s 近似于 0, α 近似于 1), 在精度要求不是很高的场合, 可以考虑采用这些理想值以简化摄像机模型, 从而大大简化自标定过程, 这方面的例子可参见文献[12, 48];

References

- 1 Tsai R. An efficient and accurate camera calibration technique for 3D machine vision. In: Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition. USA: Miami Beach, Fl, 1986. 364~374
- 2 Zhang Z. Flexible camera calibration by viewing a plane from unknown orientations. In: Proceedings of the 7th International Conference on Computer Vision. Greece: Corfu, 1999. 666~673
- 3 Meng X Q, Li H, Hu Z Y. A new camera calibration technique based on circular points. In: Proceedings of British Machine Vision Conference. UK: Bristol, 2000. 496~505
- 4 Hartley R. Self-calibration of stationary cameras. *International Journal of Computer Vision*, 1997, **22**(1):5~23
- 5 Ma S D. A self-calibration technique for active vision system. *IEEE Transactions on Robot Automation*, 1996, **12**(1):114~120
- 6 Moons T, Van Gool L, Proesmans M, Pauwels E. Affine reconstruction from perspective image pairs with a relative object-camera translation in between. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1996, **18**(1):77~83
- 7 Faugeras O, Luong Q T, Maybank S. Camera self-calibration: Theory and experiments. In: Proceedings of the 2nd European Conference on Computer Vision, Italy, 1992. 321~334
- 8 Maybank S, Faugeras O. A theory of self-calibration of a moving camera. *International Journal of Computer Vision*, 1992, **8**(2):123~151
- 9 Hartley R. Euclidean reconstruction and invariants from multiple images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1994, **16**(10):1036-1041
- 10 Triggs B. Auto-calibration and the absolute quadric. In: Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition, 1997. 609~614
- 11 Pollefeys M, Van Gool L, Oosterlinck A. The modulus constraint: A new constraint for self-calibration. In: Proceedings of International Conference of Pattern Recognition, Vienna, 1996. 349~353
- 12 Heyden A, Åström K. Euclidean reconstruction from image sequences with varying and unknown focal length and principal point. In: Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition, 1997. 438~443
- 13 Pollefeys M, Koch R, Van Gool L. Self-calibration and metric reconstruction in spite of varying and unknown internal camera parameters. In: Proceedings of the 6th International Conference on Computer Vision. India, 1998. 90~95
- 14 Xu G, Zhang Z. Epipolar Geometry in Stereo, Motion and Object Recognition: A Unified Approach. Kluwer Academic Publisher, 1996
- 15 Semple J G, Kneebone G T. Algebraic Projective Geometry. Oxford: Clarendon Press, 1952
- 16 Golub G, Loan C van. Matrix Computations. third edition. Baltimore, Maryland: The John Hopkins University Press, 1996
- 17 Hartley R. In defense of the eight-point algorithm. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, **19**(6):580~593
- 18 Luong Q-T, Faugeras O. The fundamental matrix: Theory, algorithms, and stability analysis. *International Journal of Computer Vision*, 1996, **17**(1):43~76
- 19 Faugeras O, Quan L, Sturm P. Self-calibration of a 1D projective camera and its application to the self-calibration of a 2D projective camera. In: Proceedings of the 5th European Conference on Computer Vision, Germany, 1998. 36~52
- 20 Torr P, Murray D. The development and comparison of robust methods for estimating the fundamental matrix. *International Journal of Computer Vision*, 1997, **24**(3):271~300
- 21 Shashua A. Trilinearity in visual recognition by alignment. In: Proceedings of the 3rd European Conference on Computer Vision. Sweden, 1994. 479~484
- 22 Hartley R. Projective reconstruction from line correspondences. In: Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition. Seattle: WA, 1994. 103~109
- 23 Hartley R. A linear method for reconstruction from points and lines. In: Proceedings of the 5th International Con-

- ference on Computer Vision. Boston; MA, 1995. 882~887
- 24 Torr P, Zisserman A. Robust parametrization and computation of the trifocal tensor. *Image and Vision Computing*, 1997, **15**:591~605
- 25 Torr P, Zisserman A. Robust computation and parameterization of multiple view relations. In: Proceedings of the 6th International Conference on Computer Vision, India, 1998. 727~732
- 26 Hartley R. Computation of the quadrifocal tensor. In: Proceedings of the 5th European Conference on Computer Vision, LNCS 1406, Germany, 1998. 20~35
- 27 Pollefeys M. Self-calibration and Metric 3D Reconstruction from Uncalibrated Image Sequences[Ph. D. thesis]. Katholieke Universiteit Leuven, 1999
- 28 Faugeras O, Mourrain B. On the geometry and algebra of point and line correspondences between n images. In: Proceedings of the 5th International Conference on Computer Vision. Boston; MA, 1995. 951~962
- 29 Heyden A. Geometry and Algebra of Multiple Projective Transformations[Ph. D. thesis]. Lund University, 1995
- 30 Ma Y, Kosecka J, Huang K. Rank deficiency condition of the multiple view matrix for mixed point and line features. In: Proceedings of the 5th Asian Conference on Computer Vision. Australia; Melbourne, 2002. 338~341
- 31 Faugeras O. Stratification of 3-d vision; Projective, affine and metric representations. *Journal Optical Society of America*, 1995, **12**(3):465~484
- 32 Hartley R, Gupta R, Chang T. Stereo from uncalibrated cameras. In: Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition, 1992. 761~764
- 33 Mclauchlan P F, Murray D W. A unifying framework for structure and motion recovery from image sequences. In: Proceedings of the 5th International Conference on Computer Vision, Boston; MA, 1995. 314~320
- 34 Mohr R, Boufama B, Brand P. Accurate projective reconstruction. In: Proceedings of 2nd Europe-U. S. workshop on Invariance, Ponta Delgada, Azores, 1993. 257
- 35 Mohr R, Veillon F, Quan L. Relative 3D reconstruction using multiple uncalibrated images. In: Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition, New-York, 1993. 543~548
- 36 Sturm P, Triggs B. A factorization based algorithm for multi-image projective structure and motion. In: Proceedings of the 4th European Conference on Computer Vision, UK; Cambridge, 1996. 709~720
- 37 Triggs B. Factorization methods for projective structure and motion. In: Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition, CA; San Francisco, 1996. 845~851
- 38 Luong Q-T, Vieville T. Canonic representation for the geometry of multiple projective views. In: Proceedings of the 3rd European Conference on Computer Vision, Sweden, 1994. 589~600
- 39 Luong Q-T. Matrix Fondamentale et Calibration Visuelle Sur les Vironnements[Ph D thesis], Centre D'Orsay; Universite de Paris-Sud, 1992
- 40 Wampler C, Morgan A, Sommese A. Numerical continuation methods for solving polynomial systems arising in kinematics. Technical Report GMR-6372, General Motors Research Labs, 1988
- 41 Zeller C, Faugeras O. Camera self-calibration from video sequences: The Kruppa equations revisited. Research Report 2793, INRIA Sophia-Antipolis, France, 1996
- 42 Press W H, Flannery B P, Teukolsky S A, Vetterling W T. Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. Cambridge; Cambridge University Press, 1988
- 43 Enciso R, Vieville T. Experimentally self-calibration from four views. In: Proceedings of 1995 International Conference on Image Analysis and Processing. Italy, San Remo, 1995
- 44 Hartley R. Extracting of focal lengths from the fundamental matrix. GE internal report, G. E. CRD, Schenectady, NY, 1993
- 45 Ma Y, Vidal B, Kosecka J, Sastry S. Kruppa equation revisited: Its renormalization and degeneracy, ECCV'00, Springer-Verlag, 2000. 561~577
- 46 Heyden A, Åström K. Euclidean reconstruction from constant intrinsic parameters. In: Proceedings of International Conference of Pattern Recognition, Vienna, 1996. 339~343
- 47 Pollefeys M, Van Gool L. Self-calibration from the absolute conic on the plane at infinity. In: Proceedings of Computer Analysis of Images and Patterns, Lecture Notes in Computer Science, Spring-Verlag, 1997, **1296**:175~182
- 48 Pollefeys M, Van Gool L, Proesmans M. Euclidean 3D reconstruction from image sequences with variable focal lengths. In: Proceedings of the 4th European Conference on Computer Vision, UK, Cambridge, 1996. 31~42

- 49 Sturm P. Self-calibration of a moving camera by pre-calibration. In: Proceedings of British Machine Vision Conference. Scotland; Edinburgh, 1996. 675~684
- 50 Hartley R. Camera calibration and the search for infinity. In: Proceedings of the 7th International Conference on Computer Vision, Greece, 1999. 510~517
- 51 Hartley R. Chirality. *International Journal of Computer Vision*, 1998, **26**(1):41~61
- 52 Heyden A, Åström K. Flexible calibration; Minimal cases for auto-calibration. In: Proceedings of the 7th International Conference on Computer Vision, Greece, 1999. 350~355
- 53 Sturm P. Critical motion sequences for monocular self-calibration and uncalibrated Euclidean reconstruction; In Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition. USA; Puerto Rico, 1997. 1100~1105
- 54 Ma Y, Soatto S, Kosecka J, Sastry S. Euclidean reconstruction and reprojection up to subgroups. In: Proceedings of the 7th International Conference on Computer Vision, Greece, 1999. 773~780
- 55 Mundy J, Zisserman A. Geometric Invariance in Computer Vision. Massachusetts; Cambridge, MIT Press, 1992
- 56 Quan L. Self-calibration of an affine camera from multiple views. *International Journal of Computer Vision*, 1996, **19**(1):93~110
- 57 Tomasi C, Kanade T. Shape and motion from from image streams under orthography: A factorization method. *International Journal of Computer Vision*, 1992, **8**(2):137~154
- 58 Quan L. Uncalibrated 1D projective camera and 3D affine reconstruction of lines. In: Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition, USA, 1997. 60~65
- 59 Quan L, Kanade T. Affine structure from line correspondences with uncalibrated affine cameras. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, **19**(8):834~845
- 60 Faugeras O. What can be seen in the three dimensions with an uncalibrated stereo rig? In: Proceedings of the 2nd European Conference on Computer Vision, Italy, 1992. 563~578
- 61 Horaud R, Csurka G. Self-calibration and Euclidean reconstruction using motions of a stereo rig. In: Proceedings of the 6th International Conference on Computer Vision, India; Bombay, 1998. 96~103
- 62 Zhang Z, Luong Q-T, Faugeras O. Motion of an uncalibrated stereo rig: Self-calibration and metric reconstruction, Research Report 2079, INRIA Sophia-Antipolis, France, 1993
- 63 Zisserman A, Beardsley P, Reid L. Metric calibration of a stereo rig. In: Proceedings IEEE Workshop on Representation of Visual Scenes, Cambridge, 1995. 93~100
- 64 Beardsley P, Zisserman A, Murray D. Sequential update of projective and affine structure from motion. *International Journal of Computer Vision*, 1997, **23**(3):235~259
- 65 Lei C, Wu F C, Hu Z Y. Kruppa equations and camera self-calibration. *Acta Automatica Sinica*, 2001, **27**(5):621~630(in Chinese)
- 66 Hartley R, Zisserman A. Multiple View Geometry in Computer Vision. Cambridge; Cambridge University Press, 2000

孟晓桥 1998年获中国科技大学工学学士学位,2001年获中科院自动化所工学硕士学位,现为美国加州大学洛杉矶分校计算机系在读博士研究生. 硕士期间主要研究方向为计算机视觉、模式识别及机器人导航.

(**MENG Xiao-Qiao** Currently a Ph. D. candidate in the University of California, Los Angeles. He received his B. S. degree from the University of Science and Technology of China in 1998, and his Master's degree from the Institute of Automation of Chinese Academy of Sciences. His research interests include computer vision, pattern recognition, and robot navigation.)

胡占义 见本刊第27卷第6期.

(**HU Zhan-Yi** Professor of the Institute of Automation of Chinese Academy of Sciences. He received his B. S. degree in Automation from the North China University of Technology in 1995, and his Ph. D. Degree (Docteur d'Etat) in Computer Science from the University of Liege, Belgium in 1993. His current research interests include camera calibration and 3D reconstruction, Hough Transform, and active vision.)