第25卷 第6期 自动化学报 Vol. 25, No. 6
1999年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1999

研究简报

一类非线性预测控制系统的鲁棒稳定性

李阳春 许晓鸣 杨煜普
(上海交通大学自动化研究所 上海 200030)

关键词 标称稳定，标称控制器，鲁棒域.

THE ROBUST STABILITY FOR A TYPE OF NONLINEAR PREDICTIVE CONTROL SYSTEM

LI Yangchun XU Xiaoming YANG Yupu
(*Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)

Key words Nominal stability, nominal controller, robust domain.

1 引 言

作为预测控制技术核心之一的滚动优化算法的非线性，导致系统稳定性和鲁棒性分析变得很困难. 然而，闭环稳定性和鲁棒性对大量的系统来说都是不容忽视的问题，即使对于线性系统，滚动优化策略并不一定能保证系统闭环稳定. 当存在模型误差或干扰时，闭环鲁棒性更是未得到彻底解决. 对非线性系统来说，这类问题的讨论才刚刚开始. 基于对闭环稳定性(或鲁棒性)的考虑，系统设计可分两步：1)建立标称稳定系统(参见文[1～4])；2)考虑建模误差和干扰，同时确定闭环系统的鲁棒域及鲁棒裕度. 本文集中讨论第二步，即控制器受扰时，闭环系统的鲁棒性条件及其几何意义. 本文所讨论对象限于一类特定的非线性系统. 文中的定理推广了文献[2]的相应结论，讨论了受扰稳定控制器应该满足的条件，并给出了所得结论的几何直观意义.

2 预测控制系统

考虑非线性系统

$$x(k+1)=f(x(k),u(k)), \tag{1}$$

其中 $f(0,0)=0, x\in R^n, u\in R^p$. 在时刻 k，优化

收稿日期 1997-12-22 收修改稿日期 1998-09-08

$$J(k) = \sum_{i=0}^{N-1}\{l(\boldsymbol{x}(k+i)) + m(\boldsymbol{u}(k+i))\}, \tag{2}$$

得到序列 $\boldsymbol{u}(k),\cdots,\boldsymbol{u}(k+N-1)$，使终态 $\boldsymbol{x}(k+N)=0$，其中 $\boldsymbol{u}(k)$ 作为当前时刻的控制输入. 假设 $l(\boldsymbol{x})>0,\forall\ \boldsymbol{x}\neq 0, l(\boldsymbol{0})=0$ 且 $m(\boldsymbol{u})>0,\forall\ \boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}, m(\boldsymbol{0})=0$. 在时刻 $k+1$，优化 $J(k+1)$ 得到 $\boldsymbol{u}(k+1)$，并且 $\boldsymbol{x}(k+N+1)=0$. 在当前时刻 k，$\boldsymbol{u}(k)$ 依赖于当前状态 $\boldsymbol{x}(k)$，记 $\boldsymbol{u}(k)=K(\boldsymbol{x}(k))$. 相应的标称闭环系统成为

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k), K(\boldsymbol{x}(k))) = \boldsymbol{f}_c(\boldsymbol{x}). \tag{3}$$

当控制器受到加性干扰 $\Psi(\boldsymbol{x})$ 或增益扰动 $\varphi(\cdot)$ 时（$\varphi(\cdot),\Psi(\boldsymbol{x})$ 未知），可分为如图1、图2所示的两种情况. 干扰信号作用到标称控制器 $\boldsymbol{u}(k)=K(\boldsymbol{x}(k))$，实际控制律成为 $\boldsymbol{u}(k)=\varphi(K(\boldsymbol{x})+\Psi(\boldsymbol{x}))$（图1）和 $\boldsymbol{u}(k)=\varphi(K(\boldsymbol{x}))+\Psi(\boldsymbol{x})$（图2）. 为了方便，对两种控制器统一记为 $\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$，相应的闭环状态方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}(k))) = \boldsymbol{f}_s(\boldsymbol{x}). \tag{4}$$

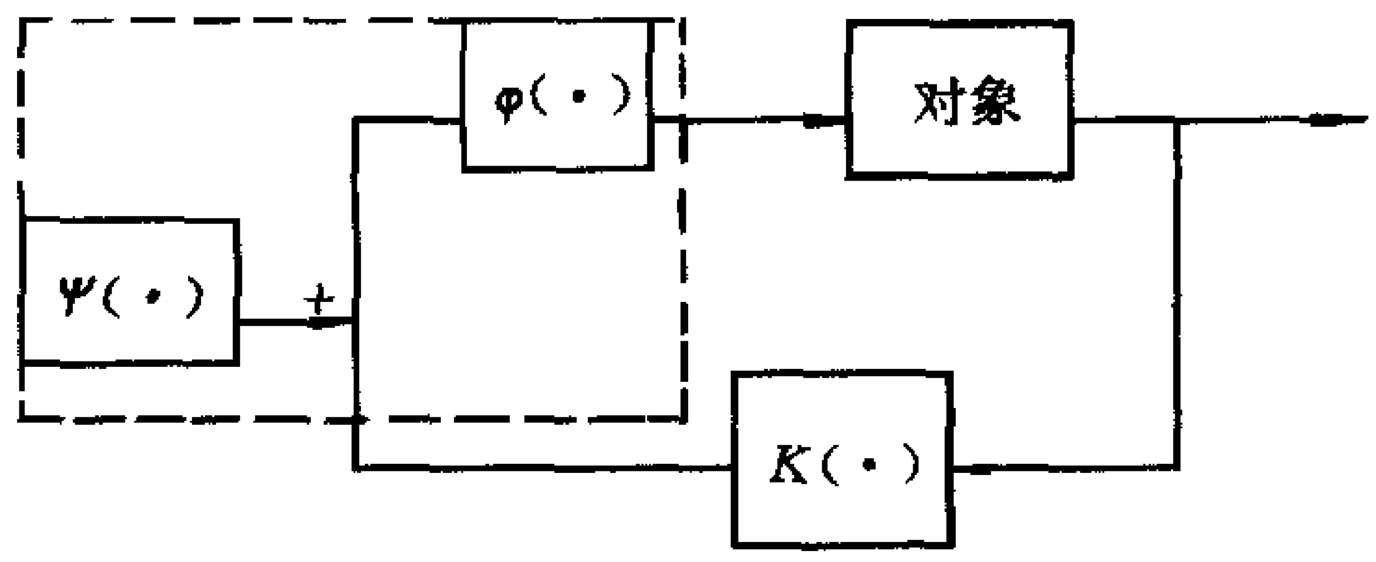

图1

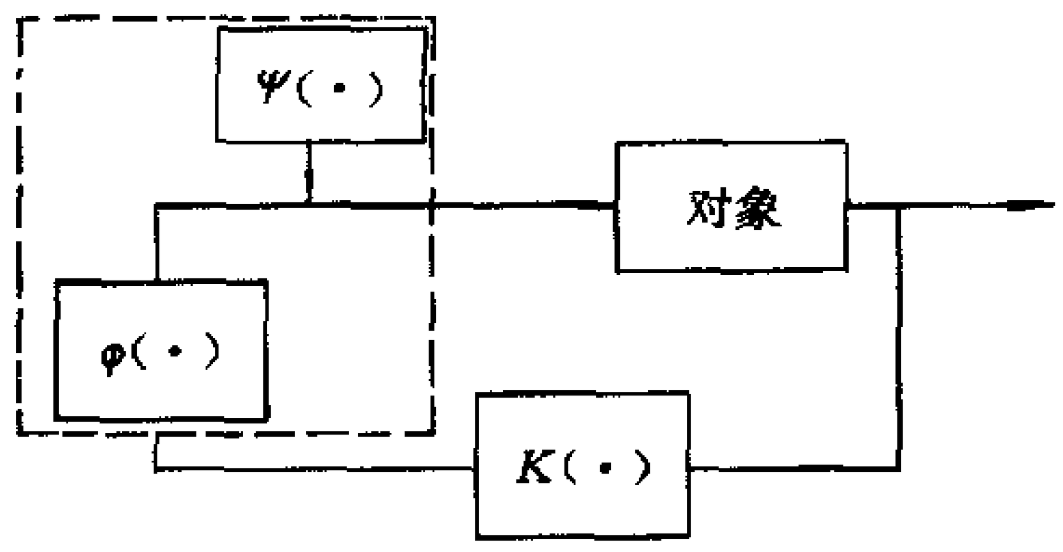

图2

当控制器只受到加性干扰或只受到增益扰动时，相应的控制器及结论将相应简化.

3　鲁棒性分析

记目标函数的标称最优值为 $V(\boldsymbol{x},k,k+N-1)$. 定义

$$V(\boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{x},k,k+N-1), V^*(\boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{x},k+1,k+N-1).$$

可以证明[2]

$$V(\boldsymbol{x}) > V^*(\boldsymbol{f}_c(\boldsymbol{x})) \geqslant V(\boldsymbol{f}_c(\boldsymbol{x})), \forall\ \boldsymbol{x}\neq 0. \tag{5}$$

由式(5)，$V(\boldsymbol{x})$ 是标称闭环系统在平衡点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 处渐近稳定的 Lyapunov 函数. 定义集合

$$D_s = \{\boldsymbol{z}: V(\boldsymbol{f}_s(\boldsymbol{x})) - V(\boldsymbol{x}) < 0; \forall\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\in R^n, \boldsymbol{f}_s(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}))\}.$$

对于 $\forall\ \boldsymbol{z}\in D_s$，在平衡点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 处保证闭环鲁棒稳定性，D_s 是系统(1)的稳定控制器集合.

考察标称控制器受到加性干扰或增益扰动时系统的闭环鲁棒稳定性，有如下定理.

定理. 设 $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$ 表示受到加性干扰或增益扰动“污染”的控制器，$V(\cdot)\in C^2, m(\cdot)\in C^1$，并且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$. 如果

$$\{\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) - K(\boldsymbol{x}) - (D(\boldsymbol{x}))^{-1}m_u(K(\boldsymbol{x}))\}^{\mathrm{T}}D(\boldsymbol{x})\{\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) - K(\boldsymbol{x}) - (D(\boldsymbol{x}))^{-1}m_u(K(\boldsymbol{x}))\} < m_u(K(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}(D(\boldsymbol{x}))^{-1}m_u(K(\boldsymbol{x})) + 2(m(K(\boldsymbol{x})) + l(\boldsymbol{x})), \tag{6}$$

其中 $D(\boldsymbol{x})>0$，使得 $\boldsymbol{f}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})V_{xx}^*(\omega)\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})\leqslant D(\boldsymbol{x}),\forall\ \boldsymbol{x},\forall\ \omega$，则 $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})\in D_s$.

本定理是对文[2]中相应结论的推广. 对式(2)关于 $\boldsymbol{u}$ 取导数，令其等于$\boldsymbol{0}$，可以得到

$$V_x^*(\boldsymbol{f}_c(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) = -m_u(K(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}.$$

利用 $V^*(\boldsymbol{f}_s(\boldsymbol{x}))$的 Taylor 展式，以及 $V^*(\boldsymbol{f}_c(\boldsymbol{x}))=V(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-m(K(\boldsymbol{x}))$，经整理得到

$$V(\boldsymbol{f}_s(\boldsymbol{x})) \leqslant V^*(\boldsymbol{f}_s(\boldsymbol{x})) < V(\boldsymbol{x}).$$

4 几何解释

在控制器受扰时，条件(6)有复杂的形式，却有简单的几何意义.

记
$$\boldsymbol{p}(K(\boldsymbol{x})) = K(\boldsymbol{x}) + (D(\boldsymbol{x}))^{-1}m_u(K(\boldsymbol{x})), \tag{7}$$

$$r(K(\boldsymbol{x})) = m_u(K(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}(D(\boldsymbol{x}))^{-1}m_u(K(\boldsymbol{x})) + 2(m(K(\boldsymbol{x})) + l(\boldsymbol{x})). \tag{8}$$

于是，式(6)可以改写成

$$(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p}(K(\boldsymbol{x})))^{\mathrm{T}}D(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{p}(K(\boldsymbol{x}))) < r(K(\boldsymbol{x})). \tag{9}$$

可以验证，式(9)表示 R^p 空间内以 $\boldsymbol{p}(K(\boldsymbol{x}))$为中心的超椭球 O_d，径向长度为 $\sqrt{r(K(\boldsymbol{x}))}$. 椭球 O_d 在 R^p 空间可以用图3表示（虚线表示是开椭球）. 若记 $D=\{D(\boldsymbol{x}):\boldsymbol{f}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})V_{xx}^*(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})\leqslant D(\boldsymbol{x}),\forall\ \boldsymbol{\omega},\forall\ \boldsymbol{x}\}$. 在当前时刻 k，相应于测得的状态 $\boldsymbol{x}(k)$，让 $D(\boldsymbol{x})$在 D 内变动，构成椭球集合 $F=\{O_d:D(\boldsymbol{x})\in D\}$，$\forall\ O_d\in F$ 在 R^p 空间如图4分布. 记

$$O = \bigcup_{O_d\in F} O_d, \tag{10}$$

此式描述了控制器受扰时闭环系统的鲁棒稳定性域(图4中由虚椭球所围区域)，它是在 R^p 空间中控制器受到加性干扰或增益扰动时闭环系统的鲁棒稳定区域，简称鲁棒域.

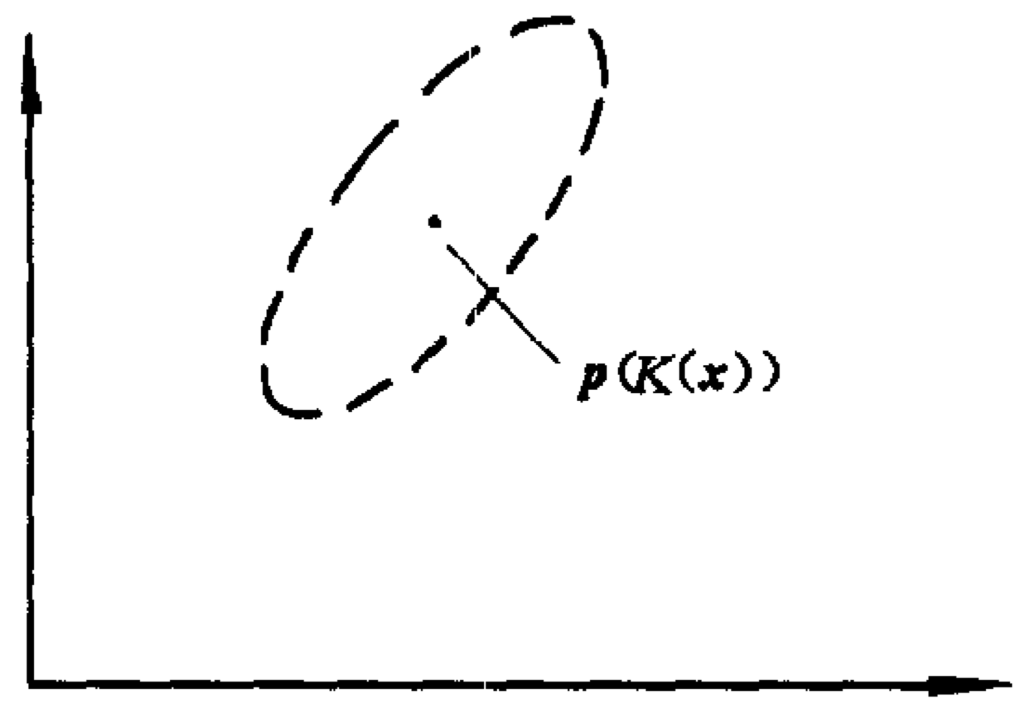

图3 相应于取定 $D(x)$的稳定区域

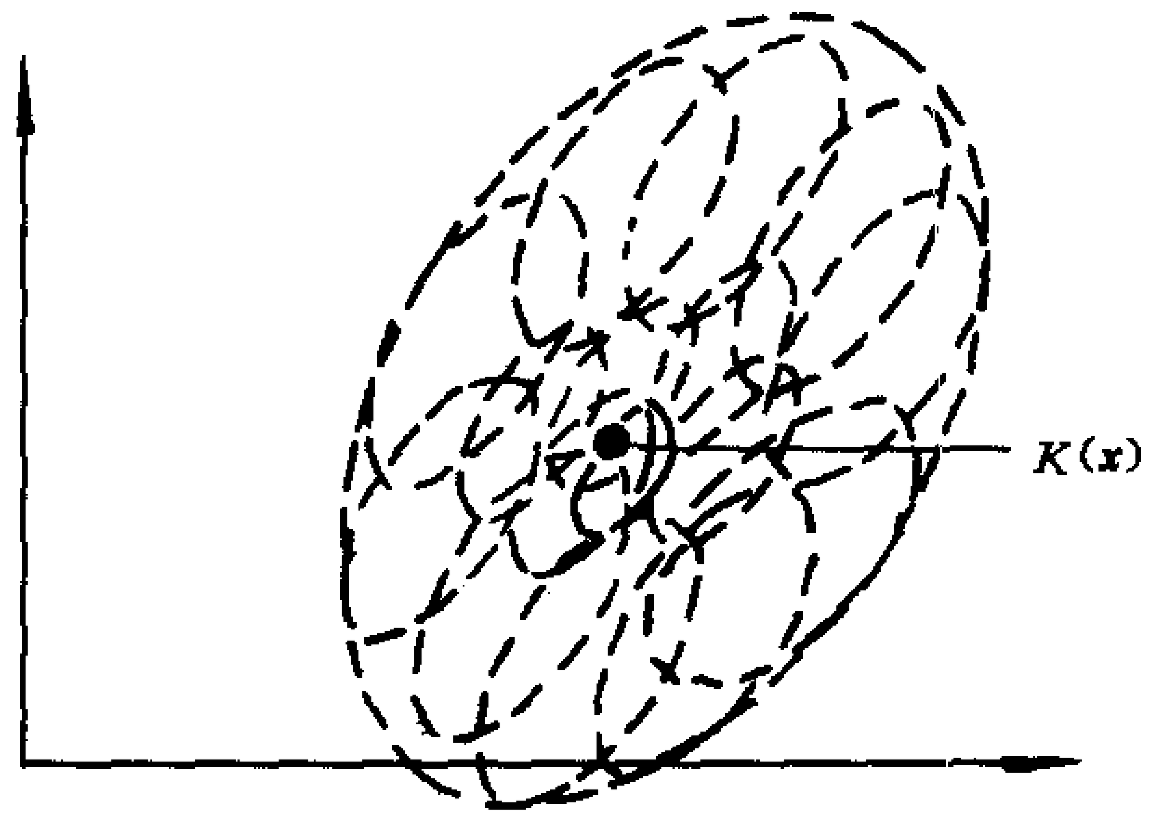

图4 相应于任意 $D(x)$的稳定区域

展开式(9)并整理，得到椭球 O_d 的另一种表述形式

$$(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) - K(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}D(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) - K(\boldsymbol{x})) <$$
$$2m_u(K(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) - K(\boldsymbol{x})) + 2(l(\boldsymbol{x}) + m(K(\boldsymbol{x}))),$$

在当前时刻 k，上式右边与 $D(\boldsymbol{x})$无关，于是 $D(\boldsymbol{x})$存在上界 $d_{\max}$. 由 $D(\boldsymbol{x})$的定义，$D(\boldsymbol{x})$存在下界，记为 $d_{\min}$.

由式(7)，受扰控制量 $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$所属的椭球 O_d 的中心经标称控制 $K(\boldsymbol{x})$在 R^p 空间的平移得到，平移量 $\Delta K(\boldsymbol{x})=(D(\boldsymbol{x}))^{-1}m_u(K(\boldsymbol{x}))$，即干扰驱动标称控制器发生了重心偏移. 当 $D(\boldsymbol{x})$逐渐增大，$\Delta K(\boldsymbol{x})$逐渐减小，$\boldsymbol{p}(K(\boldsymbol{x}))$向 $K(\boldsymbol{x})$逼近. $D(\boldsymbol{x})$越大，对这种偏移的抑制作用越大. 由式(8)，$D(\boldsymbol{x})$增大，$r(K(\boldsymbol{x}))$变小，中心越靠近标称控制量的椭球，其径向长度越小，相应的闭环系统鲁棒裕度越小. 于是，$\forall\ O_d\in O$ 在标称控制器周围的分布如图4.

本节讨论了上述定理的几何意义，从直观上给出了鲁棒控制器在空间 R^p 中的分布情况.

参 考 文 献

1 Nicolao G D *et al*. Robust predictive control of systems with uncertain impulse response. *Automatica*, 1996, **32**(10):1475～1479

2 Nicolao G D *et al*. On the robustness of receding-horizon control with terminal constraints. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1996, **41**(3):451～453

3 Genceli H. Robust stability analysis of contrained l_1-norm model predictive control. *AICHE J.*, 1993, **39**(12): 1954～1965

4 Kothare M V *et al*. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 1996, **32**(10):1361～1379

李阳春　1970年生，上海交通大学自动化研究所博士研究生. 目前研究兴趣为预测控制、鲁棒控制.

许晓鸣　1957年生，现为上海交通大学教授，博士导师. 研究领域为预测控制、智能机器人、智能控制等.

杨煜普　1957年生，博士后，现为上海交通大学自动化系副教授. 研究领域为非线性控制系统、智能控制等.