第26卷 第6期 自 动 化 学 报 Vol. 26, No. 6
2000年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 2000

控制系统的哈密顿实现[1)]

程代展 席在荣
(中国科学院系统科学研究所 北京 100080)
(E-mail: dcheng@isso3.iss.ac.cn)

摘 要 考虑了非线性系统的反馈哈密顿实现问题，主要讨论两类系统：平面系统和输入通道由拉格朗日子空间张成的系统. 得到了一些公式和一个一般性的结果，该结果在某些情形下变为更直接可验证条件.

关键词 哈密顿实现，辛流形，拉格朗日子分布.

HAMILTONIAN REALIZATION OF CONTROL SYSTEMS

CHENG Daizhan XI Zairong
(*Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Abstract This paper considers the Hamiltonian realization of feedback nonlinear systems. Two kinds of systems are considered: a plane system and a system with input channels spanning a Lagrangian subspace. Certain formulas are obtained. A general result is obtained and it is applied to some special cases to get some directly verifiable conditions.

Key words Hamiltonian realization, symplectic manifold, Lagrangian sub-distribution.

1 基础知识

近年来，辛几何方法被广泛用于哈密顿系统[1,2]，这里首先给出一些相关的结果.

定义1[3]. M 是一个维数为 $n=2m$ 的流形，ω 是 M 上的一个非退化的、闭的、反对称的2-形式，则(M,ω)称为辛流形，ω 称为辛流形上的辛形式.

在(M,ω)上可以定义映射 $\phi: V(M)\to V^*(M)$ 如下：

$$\phi(X) = \omega(X, \cdot) := \mu \in V^*(M), \tag{1}$$

也记作 $\mu=i_X\omega$(一般地说，$i_X: \Omega^k(M)\to\Omega^{k-1}(M)$是 k 阶外代数到 $k-1$阶外代数的一个同态映射). 由于 ω 非退化，(1)式定义的映射 ϕ 是 $V(M)$和 $V^*(M)$之间的一个同构，这种同

1) 国家自然科学基金(G59837270, G1998020308, G69774008)及国家攀登计划资助项目.
收稿日期 1998-08-11 收修改稿日期 1999-05-27

构关系通常用 $X^b=\mu$ 和 $\mu^\#=X$ 表示.

设 $H\in C^\infty(M)$，则 $\mathrm{d}H\in V^*(M)$，由 H 可以定义一个如下的向量场 $X=(\mathrm{d}H)^\#$. 这样的向量场记为 X_H，称为哈密顿向量场.

定义2[1]. 设 (M,ω) 为一个辛流形，称 (M,ω,H) 为一个哈密顿系统，其中 $H\in C^\infty(M)$ 为系统的哈密顿函数，该哈密顿系统的动态方程为 $\dot{x}=X_H$. 达布定理表明存在一个局部坐标卡 $p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_m$，使得在该局部坐标卡下，辛形式可以表示为 $\omega=\sum_{i=1}^m \mathrm{d}p_i\wedge \mathrm{d}q_i$. 这样的坐标卡称为标准坐标卡.

事实上，在局部坐标下二阶协变张量场可以由矩阵表示. 设 M_ω 是 ω 的矩阵表示，即

$$\omega(X,Y)=X^{\mathrm{T}}M_\omega Y,\quad \forall\, X,Y\in V(M),\tag{2}$$

在标准坐标卡下，辛形式的矩阵表示为 $M_\omega=\begin{pmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{pmatrix}$，哈密顿系统表示为 $\begin{cases}\dot{q}=\dfrac{\partial H}{\partial p},\\ \dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial q}.\end{cases}$

下面考虑哈密顿控制系统. 这里采用文[4]的定义.

定义3[4]. 设 (M,ω) 为一个辛流形，称 $(M,\omega,H_0,H_1,\cdots,H_m)$ 为哈密顿控制系统，其中 $H_i\in C^\infty(M)$，$\forall\, i$. H_0 称为系统的状态哈密顿函数，而 $H_i(i=1,\cdots,m)$ 称为输出哈密顿函数，哈密顿控制系统的动态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}=X_{H_0}-\sum_{i=1}^m X_{H_i}u_i,\\ y_i=H_i,\quad i=1,\cdots,m.\end{cases}\tag{3}$$

实际上，哈密顿控制系统有多种定义，如文[5]. 采用这种定义的理由是基于如下的能量守恒定律

$$\frac{\mathrm{d}H_0}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^m u_i\dot{y}_i,$$

将 y_i 作为广义位移及 u_i 为相应的广义外力，则上式表明作用在系统上的暂态功等于系统能量的增长率.

2　平面系统

考虑光滑的非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^m g_i(x)u_i,\quad x\in R^n,\\ y=h(x);\quad y\in R^m,\end{cases}\tag{4}$$

其中 $f(0)=0$，$g_i(0)(i=1,\cdots,m)$ 是线性独立的.

定义4. 称系统(4)具有反馈哈密顿实现，如果存在微分同胚 $z=z(x)$ 和状态反馈 $u=\alpha(x)+\beta(x)v$（其中 $\beta(x)$ 非奇异），使得反馈系统为哈密顿控制系统. 如果微分同胚和状态反馈是全局的（局部的），则该实现称为全局的（局部的）.

该问题是经典力学中逆问题的推广. 首先考虑平面系统.

定理1. 设 $n=2$ 及 $m=1$，系统(4)具有局部反馈哈密顿实现，当且仅当 $L_gh=0$.

证明. 因为 $g(0)\neq 0$，所以存在局部坐标系使得 $g(x)=(1,0)^{\mathrm{T}}$[6]. 由于 ω 是反对称的，在该局部坐标下，可设辛形式 ω 的矩阵表示为

$$M_{\omega}=\begin{pmatrix} 0 & t(x) \\ -t(x) & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

因为二维流形上的任一2-形式都是闭的，于是当 $t(x)\neq 0$时，由(5)式定义的2-形式是辛形式. 根据(5)式有 $\omega=t(x)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2$，因此，为得到 $g\beta=X_h$，当且仅当 $\mathrm{d}h=i_{g\beta}(\omega)=t(x)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2(g\beta,\cdot)=t(x)\beta(x)\mathrm{d}x_2$.

关于充分性，仅需证明存在 α 使得 $f+g\alpha$ 为一哈密顿向量场. 直接计算得

$$i_{f+g\alpha}\omega=(-tf_2,t(f_1+\alpha)). \tag{6}$$

根据庞卡莱引理，$f+g\alpha$ 是哈密顿向量场当且仅当(6)式是闭的. 不失一般性，可以选取 t 为非零常数. 这样(6)式是闭的当且仅当

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}=-\frac{\partial f_2}{\partial x_2}-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}. \tag{7}$$

显然，总可以选取适当的反馈 $\alpha(x)$满足(7)式. 证毕.

注. 如果状态空间是 R^2或任意的单连通流形，庞卡莱引理在全空间上成立. 但是，在一般情况下表达式 $g=(1,0)^{\mathrm{T}}$ 仅在局部意义下成立. 从上面的证明过程可以看到，如果该表达式是全局成立的，则可得到全局实现.

3 拉格朗日输入分布

定义5. 辛流形(M,ω)上的分布 G 称为拉格朗日分布，如果 G 满足下面的两个等价条件中的一个：

*LD*1. 在每一点 $x\in M$，$G(x)$是辛空间$(T_x(M),\omega(x))$的拉格朗日子空间[7]；

*LD*2. G 的积分流形是(M,ω)的拉格朗日子流形[1].

由定义可得如下命题.

命题1. 设(M,ω)是维数为 $n=2m$ 的流形. $G(x)$为拉格朗日分布，当且仅当 $\dim(G(x))=m$ 及

$$\omega(G(x),G(x))=0. \tag{8}$$

下面对系统(4)作如下的假设：

A1. $n=2m$；

A2. 设 $G(x)=\mathrm{span}\{g_1,\cdots,g_m\}$是拉格朗日分布.

A1和 A2的物理意义是很清楚的. 考虑一个由 m 个质点组成的系统，每个质点受到一个外力作用. 此时，模型的动力学方程在相平面上就满足 A1和 A2.

引理1. 如果系统(4)满足 A1和 A2且具有反馈哈密顿实现，则 $L_{g_i}h_j=0$，$i,j=1,\cdots,m$.

证明. 存在一个局部坐标卡(V,x)(参看文[3]或[7])，使得拉格朗日子流形 N 可以表示为 $N\cap V=\{x\in V\mid x_{m+1}=\cdots=x_n=0\}$. 因此，在局部坐标下，$G$ 可以表示为 $G=\mathrm{span}\{\frac{\partial}{\partial x_i},i=1,\cdots,m\}$.

记

$$M_\omega = \begin{pmatrix} A(x) & B(x) \\ -B^{\mathrm{T}}(x) & C(x) \end{pmatrix},$$

其中 $A(x)$和 $C(x)$是反对称的.

利用条件(8)直接计算,得到 $A(x)=0$,这样 $\mathrm{d}h_i=i_{g_i}\omega=(0_{1\times m}\xi_i)$, $\xi_i\in R^m$, $i=1,\cdots,m$.

证毕.

由引理的证明,只要考虑具有如下矩阵表示的辛形式 ω

$$M_\omega = \begin{pmatrix} 0 & B(x) \\ -B^{\mathrm{T}}(x) & C(x) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

其中 $C(x)$是反对称的.

以下将看到,为了使得 $f+g\alpha$ 是哈密顿向量场,B 要满足某些条件,而 C 可以任意选取. 因此,考虑这样一个问题:如果 C 可以任意选取,(9)式何时决定一闭形式?

引理2. 给定一个 $m\times m$ 矩阵 $B(x)$,存在 $C(x)$使得(9)式决定一闭形式当且仅当

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} = 0(i,j=1,\cdots,m;\quad k\neq i), \tag{10a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial b_{\beta j}}{\partial x_{m+i}} - \frac{\partial b_{\beta i}}{\partial x_{m+j}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial b_{\alpha j}}{\partial x_{m+i}} - \frac{\partial b_{\alpha i}}{\partial x_{m+j}}\right)$$
$$(\alpha,\beta=1,\cdots,m;\alpha\neq\beta;1\leqslant i<j\leqslant m), \tag{10b}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{m+t}}\left(\frac{\partial b_{kj}}{\partial x_{m+i}} - \frac{\partial b_{ki}}{\partial x_{m+j}}\right) = 0(t,k=1,\cdots,m;1\leqslant i<j\leqslant m;t\neq i,j). \tag{10c}$$

证明. 由(9)式得到

$$\omega = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_{m+j} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} c_{ij}\mathrm{d}x_{m+i} \wedge \mathrm{d}x_{m+j},$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega = & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1,k\neq i}^{m}\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_{m+j} + \\ & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1,k\neq j}^{m}\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_{m+k}}\mathrm{d}x_{m+k}\wedge\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_{m+j} + \\ & \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial c_{ij}}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{m+i}\wedge\mathrm{d}x_{m+j} + \\ & \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}\sum_{k=1,k\neq i,k\neq j}^{m}\frac{\partial c_{ij}}{\partial x_{m+k}}\mathrm{d}x_{m+k}\wedge\mathrm{d}x_{m+i}\wedge\mathrm{d}x_{m+j} = 0.\end{aligned}$$

对非交叉项得到

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} = 0(i,j,k=1,\cdots,m;k\neq i), \frac{\partial c_{ij}}{\partial x_{m+k}} = 0(1\leqslant i<j\leqslant m;k\neq i,k\neq j). \tag{11}$$

至于交叉项,选取具有$1\leqslant k\leqslant m$ 和$1\leqslant i<j\leqslant m$ 的每一项,得到

$$\frac{\partial b_{kj}}{\partial x_{m+i}}\mathrm{d}x_{m+i}\wedge\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{m+j} + \frac{\partial b_{ki}}{\partial x_{m+j}}\mathrm{d}x_{m+j}\wedge\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{m+i} + \frac{\partial c_{ij}}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{m+i}\wedge\mathrm{d}x_{m+j}$$

$$= \left(-\frac{\partial b_{kj}}{\partial x_{m+i}} + \frac{\partial b_{ki}}{\partial x_{m+j}} + \frac{\partial c_{ij}}{\partial x_k}\right)\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_{m+i}\wedge\mathrm{d}x_{m+j}.$$

因此得到第三个条件

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial b_{kj}}{\partial x_{m+i}} - \frac{\partial b_{ki}}{\partial x_{m+j}} (k = 1,\cdots,m; 1 \leqslant i < j \leqslant m), \tag{12}$$

(12)式有解 c_{ij},当且仅当

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial b_{\alpha j}}{\partial x_{m+i}} - \frac{\partial b_{\alpha i}}{\partial x_{m+j}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial b_{\beta j}}{\partial x_{m+i}} - \frac{\partial b_{\beta i}}{\partial x_{m+j}}\right) \quad (\alpha,\beta = 1,\cdots,m; \alpha \neq \beta; 1 \leqslant i < j \leqslant m).$$

如果 $\tilde{c}_{ij}$是(12)式的任意一个解,则

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} + \phi_{ij}(x_{m+1},\cdots,x_n). \tag{13}$$

下面证明存在 ϕ_{ij}使 $\tilde{c}_{ij}$满足(11)式,当且仅当(12)式的任意解满足

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial c_{ij}}{\partial x_{m+t}}\right) = 0 (k,t = 1,\cdots,m; 1 \leqslant i < j \leqslant m). \tag{14}$$

必要性由(13)式直接得到. 为证充分性,就是选取 ϕ_{ij}使得$\frac{\partial c_{ij}}{\partial x_{m+t}} + \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_{m+t}} = 0$.

由上式可知,ϕ_{ij}的可积性自然满足,因此 ϕ_{ij}存在,而(14)式保证 ϕ_{ij}不依赖于 $x_i, i=1,\cdots,m$. 因此存在 $\tilde{c}_{ij}$满足(11).

将(12)代入(14)式得到

$$\frac{\partial}{\partial x_{m+t}}\left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_{m+i}} - \frac{\partial b_{ki}}{\partial x_{m+j}}\right) = 0 \quad (t,k = 1,\cdots,m; 1 \leqslant i < j \leqslant m).$$

证毕.

下面考虑这个问题:给定 $\Lambda=(\lambda_1(x),\cdots,\lambda_m(x))$,何时存在 $Q=(q_1(x),\cdots,q_m(x))$使得(Λ,Q)是闭的?

记 $x^1=(x_1,\cdots,x_m)$和 $x^2=(x_{m+1},\cdots,x_{2m})$,得到如下引理.

引理3. 给定 $\Lambda=(\lambda_1(x),\cdots,\lambda_m(x))$. 存在 $Q=(q_1(x),\cdots,q_m(x))$使得(Λ,Q)是闭的充要条件为

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j^1} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i^1}, \quad i,j = 1,\cdots,m. \tag{15}$$

证明. 必要性显见. 设(15)式成立,将 x^2作为参数,则由庞卡莱引理,存在 ϕ,使$\frac{\partial \phi}{\partial x_i^1} = \lambda_i, i=1,\cdots,m$,取 $q_j(x)=\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j^2}$即可.

证毕.

称坐标 x 对 G 是友好的,如果 $G=\mathrm{span}\{\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_m}\}$.

总括上面的讨论得到如下定理.

定理2. 假设系统(4)满足 A1和 A2,则系统(4)具有局部哈密顿实现当且仅当

1)$L_{g_i}h_j=0, i,j=1,\cdots,m$;

2)存在非奇异矩阵 $B(x)$满足(10)式. 且 $\Lambda=(f^2)^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$ 满足(15)式. 这里 $f=((f^1)^{\mathrm{T}},(f^2)^{\mathrm{T}})$,$x$ 是对 G 友好的坐标卡.

证明. 由引理得到1). 已知 $\mathrm{span}\{(\mathrm{d}h_1)^\#,\cdots,(\mathrm{d}h_m)^\#\}=G$,因此存在 β 使得

$$(g_1,\cdots,g_m)\beta = (X_{h_1},\cdots,x_{h_m}).$$

关于2),有

$$(f + g\alpha)^b = ((f^1 + I_m\alpha)^{\mathrm{T}},(f^2)^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} 0 & B(x) \\ -B^{\mathrm{T}}(x) & C(x) \end{pmatrix} = (-f^2)^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} \quad Q),$$

既然 α 和 Q 是任意的，由引理2和3可以得到2)．　　证毕．

4　某些特殊情形的应用

本节讨论一些特殊系统，使得定理2的条件具体化．

推论1. 假设系统(4)满足(i)A1和 A2；(ii)存在非奇异矩阵 B 满足(10)式；(iii)$[f,G]\subset G$，则(4)式有反馈哈密顿实现．

证明．与定理2的条件比较，仅需证明如下两件事

首先要证明$(f^2)^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$ 满足(15)式．因为 $G=\mathrm{span}\{(I_m\quad 0)^{\mathrm{T}}\}$，易验证条件(iii)隐含着 f^2 与 x^1无关．由(10)式也可知 $b_{ji}=b_{ji}(x_j^1,x^2)$，$i,j=1,\cdots,m$，则 $(f^2)^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=(\sum\limits_{i=1}^{m}f_i^2(x^2)b_{1i}(x_1^1,x^2),\cdots,\sum\limits_{i=1}^{m}f_i^2(x^2)b_{mi}(x_m^1,x^2))$，从而(15)式显然满足．　　证毕．

设 G 是非奇异对合分布，$x=(x^1,x^2)$，且 $G=\mathrm{span}\{\frac{\partial}{\partial x^1}\}$．$f=\mathrm{col}(f^1,f^2)$是在局部坐标 x 下表示的向量场．$z=z(x)$是 G 的另一个友好坐标．我们考查 f 在 G 的两个友好坐标之间的坐标变换下的表达式．

记 z 的雅可比矩阵为

$$J_z=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial z^1}{\partial x^2}\\[2mm] \dfrac{\partial z^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial z^2}{\partial x^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{pmatrix},$$

不难看出 z 对 G 是友好的，则 $J_{21}=0$．因此

$$J_z=\begin{pmatrix}J_{11} & J_{12}\\ 0 & J_{22}\end{pmatrix},$$

而且 J_{22}与 z^1无关．在 z 坐标下 f 为

$$f^2(z)=J_{22}(z^2)f^2(x^1(z),x^2(z^2)).\tag{16}$$

推论2. 设满足 A1和 A2，且(a)$L_{g_i}h_j=0(i,j=1,\cdots,m)$；(b)$\frac{\partial f^2}{\partial x^1}$非奇异．则方程(4)有反馈哈密顿实现．

证明．首先要证明条件(b)与坐标的选取无关．由(16)式可知

$$\frac{\partial f^2}{\partial z^1}=J_{22}\frac{\partial f^2}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial z^1},$$

它非奇异当且仅当$\frac{\partial f^2}{\partial x^1}$非奇异．

选取坐标

$$z^1=f^2(x),\quad z^2=x^2.$$

显然该坐标对 G 是友好的．随后选取 $B=-I_m$ 和 $Q=0$，则易验证定理2的条件满足．

证毕．

注. 事实上，推理2中反馈系统的状态哈密顿函数是

$$H_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(x_i^1)^2,$$

这正是系统的动能.

例. 考虑线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in R^n, \quad y \in R^m \tag{17a}$$

$$y = Cx, \quad n = 2m. \tag{17b}$$

设 x 对 B 友好,则不妨设 $B=(I,0)^{\mathrm{T}}$,由 $L_{g_i}h_j=0$得

$$C = (0,I). \tag{18}$$

记 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$,设 $B(x)=P_0+P_1(x)$,这里 $P_1(x)=O(\|x\|)$. 则易证,如果$(f^2)^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}(x)$满足(15)式,$(f^2)^{\mathrm{T}}P_0^{\mathrm{T}}$也满足(15)式. 因此不失一般性,可选(9)式中 $B(x)=P=\mathrm{const}$. 则(10)式显然成立. 令$(f^2)^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}=[(x^1)^{\mathrm{T}}A_{21}^{\mathrm{T}}+(x^2)^{\mathrm{T}}A_{22}^{\mathrm{T}}]P^{\mathrm{T}}$ 满足(15)式. 容易证明它等价于 $A_{21}^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}$ 为对称阵,即

$$PA_{21} = A_{21}^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}, \tag{19}$$

故线性系统(17)式有哈密顿实现,当且仅当(18)式成立,且存在非奇异 P,使(19)式成立.

证毕.

5 结论

控制系统的反馈哈密顿实现是力学中哈密顿系统的逆问题的推广[4]. 本文考虑了两种特殊情形:1)平面系统;2)输入分布为拉格朗日子分布. 得到了几个有用的判据.

由于哈密顿系统在系统镇定、H_∞控制设计等方面有许多方便之处[5],哈密顿实现为非线性控制系统的设计提供了一条新的途径.

参 考 文 献

1 Abraham R A, Marsden J E. Foundations of Mechanics, 2nd Ed. Benjamin/Cummings Pub. Com. Inc., 1978

2 Arnold V I. Mathematical Methods of Classical Mechanics, New York:Springer, 1978

3 Libermann P C Marle. Symplectic Geometry and Analytical Mechanics, Translated by B. E. Schwarzbach, D. Reidel Pub. Comp. 1987

4 Crouch P E, van der Schaft A J. Variational and Hamiltonian Control Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences 101, Springer-Verlag, 1987

5 van der Schaft A J. L_2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control, Springer-Verlag, 1996

6 Spivak M. Differential Geometry, Publish or Perish Inc., 1979

7 Koszul J *et al*. 辛几何,北京:科学出版社,1997

8 李继彬,赵晓华,刘正荣. 广义哈密顿系统理论及其应用,北京:科学出版社,1997

程代展 1946年生,1970年于清华大学,1985年于 Washington University 获博士学位. 1990年到1993年为国际杂志 J. Math. Systems, Estimation and Control 及 Automation 副主编,现为中科院系统所研究员,博士生导师. 主要研究兴趣为非线性控制与数值方法.

席在荣 1969年生,1988年毕业于湖南常德师范学校,1997年于郑州大学获硕士学位. 现为中科院系统所博士生. 主要研究兴趣为非线性控制.