第26卷 第2期
2000年3月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 26, No. 2
Mar., 2000

研究简报

秩-1型不确定性时滞系统鲁棒控制器设计——LMI 方法[1)]

程储旺　　汤兵勇
（中国纺织大学智能系统研究中心　上海　200051）

关键词　不确定性系统，时滞系统，鲁棒控制，线性矩阵不等式.

DESIGNING ROBUST STABILIZATION CONTROLLER FOR DELAYED SYSTEMS WITH RANK-1 TYPE UNCERTAINTIES——LMI APPROACH

CHENG Chuwang　TANG Bingyong
(*Intelligent System Research Center, China Textile University, Shanghai* 200051)

Key words　Uncertain systems, delay systems, robust control, linear matrix inequality.

1　引言

由于工程系统中大量存在时滞现象，有关时滞系统的报道愈来愈多，采用黎卡提方程方法研究时滞系统的鲁棒控制问题在近一、二十年一直是控制领域的研究热点之一[1]. 应用黎卡提方程方法时，有关参数的选取直接关系到所得结果的好坏，但如何找到合适参数的问题至今没有解决. 而近几年发展成熟的线性矩阵不等式(LMI)方法不需要调整参数就可得到问题的解，因此用 LMI 方法研究时滞系统鲁棒控制问题的文献相继出现[2—3].

尽管不确定性时滞系统鲁棒控制方面的报道很多，但大部分结果与系统时滞无关[1—3]，这些独立于时滞的结论无疑是保守的，而依赖于时滞的结论至今仍不多见[4—5]，并且这些文献只考虑了单一常值状态时滞的情形. 特别是对于秩-1型不确定性时滞系统，还未见到依赖于时滞的结论. 本文用 LMI 方法研究秩-1型不确定性时滞系统的鲁棒镇定问题，得到了系统可状态反馈镇定的充分条件：某 LMI 有解，并可很容易得到状态反馈控制器的构造.

1）中国博士后基金和上海博士后基金资助课题.
收稿日期　1998-04-28　收修改稿日期　1998-12-10

2 预备知识

考虑下述不确定性时滞系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[A_0+\Delta A_0(\boldsymbol{r}_0(t))]\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{N}[A_i+\Delta A_i(\boldsymbol{r}_i(t))]\boldsymbol{x}(t-d_i)+[B+\Delta B(\boldsymbol{s}(t))]\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{x}(t)=\phi(t),\qquad t\in[-\tau,0],\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{R}^n$ 是状态向量,$\boldsymbol{u}\in\mathscr{R}^m$ 是输入向量,A_i,B 是已知的常值矩阵. 系统时滞满足

$$0<d_i\leqslant\tau_i\leqslant\bar{d}<\infty.$$

假设

$$\boldsymbol{r}_i(t)\in R^{l_n},\quad i=0,\cdots,N,\quad \boldsymbol{s}(t)\in R^{l_u},$$

是 Lebsque 可测向量,R_i,S 满足

$$R_i=:\{\boldsymbol{r}\,\|\,r_{ik}|\leqslant\bar{r}_i,k=1,\cdots,l_{xi}\},\quad i=0,\cdots,N,\quad S=:\{\boldsymbol{s}\,\|\,s_k|\leqslant\bar{s},k=1,\cdots,l_u\}.\tag{2}$$

进一步假设系统不确定性是秩-1型的,即

$$\Delta A_i(\boldsymbol{r}_i(t))=\sum_{k=1}^{l_{xi}}A_{ik}r_{ik},\quad i=0,\cdots,N,\quad \Delta B(\boldsymbol{s}(t))=\sum_{k=1}^{l_u}B_ks_k,\tag{3}$$

其中 A_{ik},B_k 可分解为以下形式

$$A_{ik}=\boldsymbol{d}_{ik}\boldsymbol{e}_{ik}^{\mathrm{T}},\quad B_k=\boldsymbol{f}_k\boldsymbol{g}_k^{\mathrm{T}},\tag{4}$$

$\boldsymbol{d}_{ik},\boldsymbol{e}_{ik},\boldsymbol{f}_k,\boldsymbol{g}_k$的秩均为1.

首先,引入以下符号

$$D_i=:\bar{r}_i\sum_{k=1}^{l_{xi}}\boldsymbol{d}_{ik}\boldsymbol{d}_{ik}^{\mathrm{T}},\quad E_i=:\bar{r}_i\sum_{k=1}^{l_{xi}}\boldsymbol{e}_{ik}\boldsymbol{e}_{ik}^{\mathrm{T}},\quad i=0,\cdots,N,$$

$$F=:\bar{s}\sum_{k=1}^{l_u}\boldsymbol{f}_k\boldsymbol{f}_k^{\mathrm{T}},\quad G=:\bar{s}\sum_{k=1}^{l_u}\boldsymbol{g}_k\boldsymbol{g}_k^{\mathrm{T}}.\tag{5}$$

引理1. 对具有适当维数的任意向量或矩阵 Z,Y 和任意正常数 $\alpha>0$总成立不等式

$$|Z^{\mathrm{T}}Y+Y^{\mathrm{T}}Z|\leqslant\alpha Z^{\mathrm{T}}Z+\frac{1}{\alpha}Y^{\mathrm{T}}Y.$$

引理2. Schure 补(Schure complements):假设对称矩阵 $F=F^{\mathrm{T}}\in R^{(N+M)\times(N+M)}$的分块表示为

$$F=\begin{bmatrix}A & B^{\mathrm{T}}\\ B & C\end{bmatrix}.$$

若 $C\in R^{M\times M}$是非奇异的,则 $F>0$的充分必要条件是$C>0$且 $A-B^{\mathrm{T}}C^{-1}B>0$;若 $A\in R^{N\times N}$是非奇异的,则 $F>0$的充分必要条件是 $A>0$且 $C-BA^{-1}B^{\mathrm{T}}>0$.

3 主要结果

考虑形如 $\boldsymbol{u}(t)=K\boldsymbol{x}(t)$的状态反馈控制器,使得系统(1)渐近稳定,则对应的闭环系统为

$$\dot{x}_c(t) = \widetilde{A}_0 x_c(t) + \sum_{i=1}^{N} \widetilde{A}_i x_c(t-d_i), \qquad (6)$$
$$x_c(t) = \Psi(t), \qquad t \in [-2\tau, 0],$$

其中 $\widetilde{A}_0 = A_0 + \Delta A_0(t) + [B + \Delta B(t)]K, \widetilde{A}_i = A_i + \Delta A_i(t).$

定理1. 考虑不确定性时滞系统(1). 给定正常数 $\tau_i, i=1,2,\cdots,N$, 假设系统时滞 d_i 满足, $0<d_i\leqslant\tau_i\leqslant\bar{d}<\infty$, 则系统(1)可鲁棒镇定的充分条件是存在正定对称矩阵 X 和矩阵 Y 以及正常数 $\gamma,\gamma_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_{ij},i,j=1,2,\cdots,N$ 满足下述 LMI

$$\begin{bmatrix} \Omega & Y^{\mathrm{T}}G^{1/2} & \Omega_1^{\mathrm{T}} & \Omega_2^{\mathrm{T}} & \Omega_3^{\mathrm{T}} \\ G^{1/2}Y & -\gamma I & & & \\ \Omega_1 & & \Theta_1 & & \\ \Omega_2 & & & \Theta_2 & \\ \Omega_3 & & & & \Theta_3 \end{bmatrix} < 0, \qquad (7)$$

其中

$$\Omega = (\sum_{i=0}^{N} A_i)X + X(\sum_{i=0}^{N} A_i)^{\mathrm{T}} + BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + \sum_{i=0}^{N}\gamma_i D_i + \gamma F +$$
$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\tau_i[A_iA_i^{\mathrm{T}} + (D_i + A_iE_iA_i^{\mathrm{T}}) + (D_i + E_i)^2] +$$
$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\beta_{ij}\tau_i[A_iA_i^{\mathrm{T}} + (D_i + A_iE_iA_i^{\mathrm{T}}) + (D_i + E_i)^2],$$
$$\Omega_1 = [XE_0^{1/2}, XE_1^{1/2}, \cdots, XE_N^{1/2}]^{\mathrm{T}}, \Theta_1 = \mathrm{diag}(\gamma_0 I, \gamma_1 I, \cdots, \gamma_N I),$$
$$\Omega_2 = [\tau_1 X\Lambda_0, \tau_2 X\Lambda_0, \cdots, \tau_N X\Lambda_0]^{\mathrm{T}}, \Theta_2 = \mathrm{diag}(\tau_1\alpha_1 I, \tau_a\alpha_2 I, \cdots, \tau_N\alpha_N I),$$
$$\Omega_{3i} = [\tau_i X\Lambda_1, \tau_i X\Lambda_2, \cdots, \tau_i X\Lambda_N]^{\mathrm{T}}, \Theta_{3i} = \mathrm{diag}(\tau_i\beta_{i1} I, \tau_i\beta_{i2} I, \cdots, \tau_i\beta_{iN} I),$$
$$\Omega_3 = [\Omega_{31}^{\mathrm{T}}, \Omega_{32}^{\mathrm{T}}, \cdots, \Omega_{3N}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \Theta_3 = \mathrm{diag}(\Theta_{31}, \Theta_{32}, \cdots, \Theta_{3N}),$$
$$\Lambda_k^2 = A_k^{\mathrm{T}}A_k + (E_k + A_k^{\mathrm{T}}D_kA_k) + (D_k + E_k)^2, k = 0,1,\cdots,N.$$

对应的镇定控制器为

$$\boldsymbol{u}(t) = YX^{-1}\boldsymbol{x}(t).$$

证明. 采用文献[6]中的方法并利用引理1,2可证明定理1成立,从略.

考虑两个特殊情形

假设 $\Delta A_0 = \Delta A_i = 0, i=1,\cdots,N, \Delta B=0$, 则系统(1)变成

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_0\boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{N} A_i\boldsymbol{x}(t-d_i) + B\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), \qquad t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \qquad (8)$$

由定理1易得:

定理2. 考虑标称系统(8). 给定正常数 $\tau_i, i=1,2,\cdots,N$, 假设系统时滞 d_i 满足 $0\leqslant d_i\leqslant\tau_i\leqslant\bar{d}<\infty$, 则系统(8)可镇定的充分条件是存在正定对称矩阵 X 和矩阵 Y 以及正常数 $\alpha_i,\beta_{ij},i,j=1,2,\cdots,N$ 满足下述 LMI

$$\begin{bmatrix} \Pi & \Pi_1^{\mathrm{T}} & \Pi_2^{\mathrm{T}} \\ \Pi_1 & -\Xi_1 & \\ \Pi_2 & & -\exists_2 \end{bmatrix} < 0, \qquad (9)$$

其中

$$\prod = (\sum_{i=0}^{N} A_i)X + X(\sum_{i=0}^{N} A_i)^{\mathrm{T}} + BY + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\tau_i A_i A_i^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \beta_{ij}\tau_i A_i A_i^{\mathrm{T}},$$

$$\prod\nolimits_1 = [\tau_1 X A_0^{\mathrm{T}}, \tau_2 X A_0^{\mathrm{T}}, \cdots, \tau_N X A_0^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \Xi_1 = \mathrm{diag}(\tau_1\alpha_1 I, \tau_2\alpha_2 I, \cdots, \tau_N\alpha_N I),$$

$$\prod\nolimits_{2i} = [\tau_i X A_1^{\mathrm{T}}, \tau_i X A_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \tau_i X A_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \Xi_{2i} = \mathrm{diag}(\tau_i\beta_{i1} I, \tau_{i\beta} I, \cdots, \tau_i\beta_{iN} I),$$

$$\prod\nolimits_2 = [\prod\nolimits_{21}^{\mathrm{T}}, \prod\nolimits_{22}^{\mathrm{T}}, \cdots, \prod\nolimits_{2N}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \Xi_2 = \mathrm{diag}(\Xi_{21}, \Xi_{22}, \cdots, \Xi_{2N}).$$

且对应的镇定控制器为:$\boldsymbol{u}(t) = YX^{-1}\boldsymbol{x}(t)$.

注1. 如果系统(8)不包含时滞项和控制输入,则 LMI(9)变成

$$A_0 X + X A_0^{\mathrm{T}} < 0.$$

注意到 $X = P^{-1}$,上述不等式等价于

$$PA_0 + A_0^{\mathrm{T}} P < 0,$$

即标准的李雅普诺夫不等式.

注2. 本文方法亦可用于研究指数稳定性和有外界干扰输入时的鲁棒 H_∞ 控制问题. 因研究过程类似,本文从略.

注3. 当(A_0, B)不可控时,本文方法仍可能有效,而那些要求(A_0, B)可控的方法就无法使用.

参 考 文 献

1 Cheng C W, Sun Y X, Dong J. Memoryless stabilizing controller designing of uncertain time-delayed systems, In: Proc. of IEEE ICIT'96, Shanghai, China: 1996, 66～70

2 Lu W M, Doyle J C. H_∞ Control of nonlinear systems: A convex characterization. *IEEE Trans. Autom. Control.*, 1995, **AC-40**:1668～1675.

3 Cheng C, Sun Y X. Robust stabilization of uncertain dynamic systems with multiple time-varying delayed states and controls——LMI approach. In: Proc. of SISCTA'97. Singapore: 1997, 67～71

4 Mori T, Kokame H. Stability of $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau)$. *IEEE Trans. Autom. Control.*, 1989, **AC-34**:460～462

5 Su J H. Further results on the robust stability of linear systems with a single time delay. *Syst. Contr. Lett.*, 1994, **23**:375～379

6 Cheng C, Tang B. Y *et al.* Decentralized Robust H-infinite Control of Uncertain Large-Scale Systems with State-Delay——LMI Approach. In: Proc. of American Control Conference. USA: 1998, 3111～3115

程储旺　1965年生. 1994年7月于杭州大学数学系几何专业毕业,获硕士学位;1997年5月于浙江大学工业控制技术研究所获博士学位;现为中国纺织大学博士后. 目前主要研究兴趣为:时滞不确定性(大)系统的鲁棒控制理论及应用.

汤兵勇　1950年生. 1982年毕业于呼兰师专高师本科数学班. 曾任黑龙江大学应用数学研究所副所长、教授. 现为中国纺织大学旭日工商管理学院百路宝研究所所长、智能系统研究中心主任、教授、博士生导师. 主要研究方向是智能系统、经济系统的辨识与控制.