

研究简报

混合 H_2/H_∞ 控制问题的降阶控制器¹⁾

曾建平 程鹏

(北京航空航天大学自动控制系 北京 100083)

(E-mail: jpzeng@hotmail.com)

关键词 混合 H_2/H_∞ 控制, 线性矩阵不等式, 降阶控制器.

THE REDUCED-ORDER CONTROLLERS FOR MIXED H_2/H_∞ CONTROL PROBLEMS

ZENG Jianping CHENG Peng

(Dept. of Automatic Control, Beijing Univ. of Aero. & Astro., Beijing 100083)

Key words Mixed H_2/H_∞ control, LMI, reduced-order controller.

1 引言

考虑 n_p 广义被控对象

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ y \end{bmatrix} = P(\delta) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_0 & D_{01} & 0 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} := C(\delta I - A)^{-1}B + D$, δ 在连续和离散情形分别表示拉氏变换算子 s , Z -变换算子 z , $x \in \mathcal{R}^{n_p}$, $y \in \mathcal{R}^{n_y}$, $w \in \mathcal{R}^{n_w}$, $u \in \mathcal{R}^{n_u}$ 分别为广义对象、量测、外部输入和控制变量. $z_0 \in \mathcal{R}^{n_{z_0}}$, $z_1 \in \mathcal{R}^{n_{z_1}}$ 分别为与 H_2, H_∞ 指标相关的控制输出信号. 所谓混合 H_2/H_∞ 控制是指: 设计控制器 K , 使得 $\|T_{z_0w}\|_2$ 极小, 且 $\|T_{z_1w}\|_\infty < 1$. 其中 $T_{z_iw}(\delta)$ 是从 w 到 z_i 的闭环传递函数 ($i=0, 1$). 其意义在于可使系统在具有稳定性和鲁棒性的前提下, 保持良好的性能.

1) 国家自然科学基金(69574013)及山西省青年基金(19991018)资助项目.

2 主要结果

$$\text{对闭环系统 } T_{zw}(\delta) := \begin{bmatrix} T_{z0w}(\delta) \\ T_{z1w}(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl0} & D_{cl0} \\ C_{cl1} & D_{cl1} \end{bmatrix}, \text{混合 } H_2/H_\infty \text{ 性能指标定义为}^{[1,2]}$$

$$J(T_{zw}) := \begin{cases} \infty, & D_{cl0} \neq 0, \\ \text{tr}(C_{cl0}PC'_{cl0}), & D_{cl0} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中 P 是如下 Riccati 方程的镇定解

$$R(P) := A_{cl}P + PA'_{cl} + (PC'_{cl1} + B_{cl}D'_{cl1})(1 - D_{cl1}D'_{cl1})^{-1}(C_{cl1}P + D_{cl1}B'_{cl}) + B_{cl}B'_{cl}. \quad (3)$$

引理1^[3]. 连续系统(1)的混合 H_2/H_∞ 性能指标 $J(T_{zw}) = \inf\{\text{tr}(C_0XC'_0) : (X, Y) \in L_D\}$. 其中

$$L_D := \left\{ (X, Y) : X \in L_B, Y \in L_C, \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \right\}, \quad (4)$$

$$L_B := \left\{ X \in \mathfrak{R}^{n_p \times n_p} : X = X' > 0, \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} AX + AX' + B_1B'_1XC'_1 + B_1D'_{11} \\ C_1X + D_{11}B'_1 & D_{11}D'_{11} - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix}^\perp < 0 \right\}, \quad (5)$$

$$L_C := \left\{ Y \in \mathfrak{R}^{n_p \times n_p} : Y = Y' > 0, \begin{bmatrix} C_2 \\ D'_{21} \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} YA + A'Y + C'_1C_1YB_1 + C'_1D_{11} \\ B'_1Y + D'_{11}C_1 & D'_{11}D_{11} - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \\ D'_{21} \end{bmatrix}^\perp < 0 \right\}. \quad (6)$$

注记1. 广义对象(1)与文献[3]略有不同,文献[3]之定理1对于本文考虑的被控对象(1)仍能成立,证明可参考文献[3]定理1给出.

定理1. 对连续系统(1),若 $D_{21} = 0$,则以下陈述等价:

- 1) 混合 H_2/H_∞ 控制问题可解;
- 2) 存在一个阶数 $n_c \leq n_p - n_y$ 的降阶控制器.

证明. 2) \Rightarrow 1) 显然. 1) \Rightarrow 2): 不失一般性,可设 $C_2 = [I \ 0]$,类似文献[3]思路, $\forall (X, Y) \in L_D$,可构造出 $(X, \hat{Y}) \in L_D$,且 $\text{rank}(X - \hat{Y}^{-1}) \leq n_p - n_y$,由文献[5]知2)成立.

与连续情形类似可得

定理2. 对离散系统(1),若 $D_{21} = 0$,则以下陈述等价:

- 1) 混合 H_2/H_∞ 控制问题可解;
- 2) 存在一个阶数 $n_c \leq n_p - n_y$ 的降阶控制器.

推论. 若状态反馈混合 H_2/H_∞ 控制问题可解,则必存在一个静态状态反馈控制器.

注记2. 众所周知,若状态反馈 H_∞ 控制问题可解,则必可由静态状态反馈控制器实现.上述推论表明,这一结果对于混合 H_2/H_∞ 控制问题仍然成立.

3 结语

对量测输出不显含外部扰动的广义对象,其输出反馈问题等价于部分状态反馈问题.

基于这一概念,在文献[3,4]基础上,进一步可以证明,若连续和离散系统混合 H_2/H_∞ 控制问题可解,则必存在一个阶数 $n_c \leq n_p - n_y$ 的降阶控制器.

参 考 文 献

- 1 Bernstein D S, Haddad W M. LQR control with an H_∞ performance bound: A riccati equation approach. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1989, **AC-34**(3):293~305
- 2 Khargonekar P P, Rotea M A. Mixed H_2/H_∞ control: A convex optimization approach. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1991, **AC-36**(7):824~837
- 3 郭雷,忻欣,冯纯伯. 基于LMI的一类混合 H_2/H_∞ 控制问题的降阶控制器设计——连续情形. *自动化学报*, 1998, **24**(3):294~299
- 4 郭雷,忻欣,冯纯伯. 基于LMI的一类混合 H_2/H_∞ 控制问题的降阶控制器设计——离散情形. *自动化学报*, 1998, **24**(3):355~358
- 5 Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 1994, **30**(8):1307~1317

曾建平 男,1966年生,分别于1989年和1992年在东北大学和华北工学院获学士和硕士学位.现为北京航空航天大学博士生.目前感兴趣的研究领域有:鲁棒控制、 H_∞ 控制理论、线性系统.

程 鹏 男,1938年生,1962年毕业于北京大学数学力学系,现任北京航空航天大学自动控制系教授、博士生导师.研究领域为:线性系统理论、多变量系统理论、鲁棒控制和运动稳定性.