自动化学报
2000年6月　ACTA AUTOMATICA SINICA　增刊B

非线性系统的模糊反馈线性化控制及其稳定性分析

高卫华　谢剑英

(上海交通大学自动化所　上海　200030)

摘　要　研究了基于 T-S 模糊模型的模糊反馈线性化系统的设计方法,对包含不确定性的系统,分析了使闭环渐近稳定的充分条件,并给出了使不确定性非线性系统能实现完全反馈线性化的不确定信息的界.

关键词　模糊系统，反馈线性化，稳定性，不确定系统.

1　引言

线性系统理论经过许多年的发展已形成了一套成熟完整的理论体系，而非线性系统由于其结构的复杂性至今还有许多理论方面的工作尚待完善，因而使得对非线性系统的分析和设计成为突出的困难. 目前非线性控制理论中一种简单而又有效的方法是对非线性系统进行反馈线性化，然后用强大的线性系统理论使线性化后的系统很容易就能达到期望的控制指标. 但是，当有干扰出现或者存在参数不确定情况时，反馈线性化不能保证整个系统的鲁棒稳定性，使控制品质明显下降，因而，对鲁棒或自适应反馈线性化的研究就成为必然.

模糊系统由于其对复杂非线性的逼近能力使得模糊系统理论在非线性系统中得到广泛应用，近年来，用模糊模型作为非线性系统模型的模糊反馈线性化方法也有了一定的发展. 本文用[1]中的 T-S 型模糊模型，在[2][3]的基础上对非线性系统的反馈线性化方法进行了研究，并借鉴[4][5]的稳定性分析方法对模糊闭环系统的鲁棒稳定性进行了分析.

2　基于 T-S 模糊模型的模糊反馈线性化控制

考虑 n 阶 SISO 不确定性非线性系统

$$x(k+1)=f(\mathbf{x}(k))+\Delta f(\mathbf{x}(k))+(g(\mathbf{x}(k))+\Delta g(\mathbf{x}(k)))u(k) \tag{1}$$

其中，$f(\mathbf{x}(k))$、$g(\mathbf{x}(k))$是非线性函数，$\Delta f(\mathbf{x}(k))$ 、$\Delta g(\mathbf{x}(k))$为不确知部分，$\mathbf{x}(k)\in R_n$是系统的状态向量，假定可获得. 设用 L 条 T-S 型模糊规则描述非线性系统如下：

$$R_l:\ \text{IF}\ x_1(k)\ \text{is}\ X^l_1\ \text{and}\ \ldots\ \text{and}\ x_n(k)\ \text{is}\ X^l_n$$

$$\text{THEN}\quad x^l(k+1)=(A_l+\Delta A_l)^T\mathbf{x}(k)+(b_l+\Delta b_l)u(k) \tag{2}$$

其中，R_l是表示第 l 条模糊规则(l=1，2，…，L)，$\mathbf{x}(k)=[x_1(k),x_2(k),\ldots,x_n(k)]^T$是系统的状态变量，$x^l(k+1)$是规则 l 的输出，$X^l_i$(i = 1，2，…，n)是状态变量的模糊

集，$A_l \in R_n$、$b_l \in R$ 是规则结论部分的线性方程的系数，$\Delta A_l(k) \in R_n$、$\Delta b_l(k) \in R$ 是反映模型参数不确定性的时变函数.

整个 T-S 模糊模型的输出为：

$$x(k+1)=\frac{\sum_{l=1}^{L}\omega_l(x(k))\{(A_l+\Delta A_l)^T x(k)+(b_l+\Delta b_l)u(k)\}}{\sum_{l=1}^{L}\omega_l(x(k))} \tag{3}$$
$$=\sum_{l=1}^{L}\mu_l(x(k))\{(A_l+\Delta A_l)^T x(k)+(b_l+\Delta b_l)u(k)\}$$

其中，ω_l 是第 1 条模糊规则的隶属度，μ_l 是归一化的隶属度，其计算公式为：

$$\omega_l(x(k))=\prod_{j=1}^{n}X_j^l(x(k)),\qquad \mu_l(x(k))=\frac{\omega_l(x(k))}{\sum_{l=1}^{L}\omega_l(x(k))} \tag{4}$$

由文[1][2]的研究可知，若要得到理想的线性化系统如下式：

$$\hat{x}(k+1)=\hat{A}^T x(k) \tag{5}$$

设 $\sum_{l=1}^{L}\mu_l(x(k))b_l \neq 0$，则要取反馈线性化调节器如下：

$$u(k)=\frac{\hat{A}^T x(k)-\sum_{l=1}^{L}\mu_l(x(k))A_l^T x(k)}{\sum_{l=1}^{L}\mu_l(x(k))b_l}=\frac{\sum_{l=1}^{L}\mu_l(x(k))(\hat{A}^T-A_l^T)x(k)}{\sum_{l=1}^{L}\mu_l(x(k))b_l}=\frac{u_1(k)}{u_2(k)} \tag{6}$$

为了用模糊控制实现以上对非线性系统反馈线性化的目的，取模糊反馈线性化调节器的规则如下：

C_l ： IF $x_1(k)$ is X^l_1 and … and $x_n(k)$ is X^l_n

THEN $u_1^l(k)=(\hat{A}-A_l)\mathbf{x}(k)$

$$u_2^l(k)=b_l \tag{7}$$

由上式得到对于所有模糊规则的控制量 $u_1(k)$ 和 $u_2(k)$ 后，将整个模糊控制作用取为 $u(k)$ 与 $u_1(k)$ 的比值，即 $u(k)= u_1(k)/ u_2(k)$，如图 1 所示：

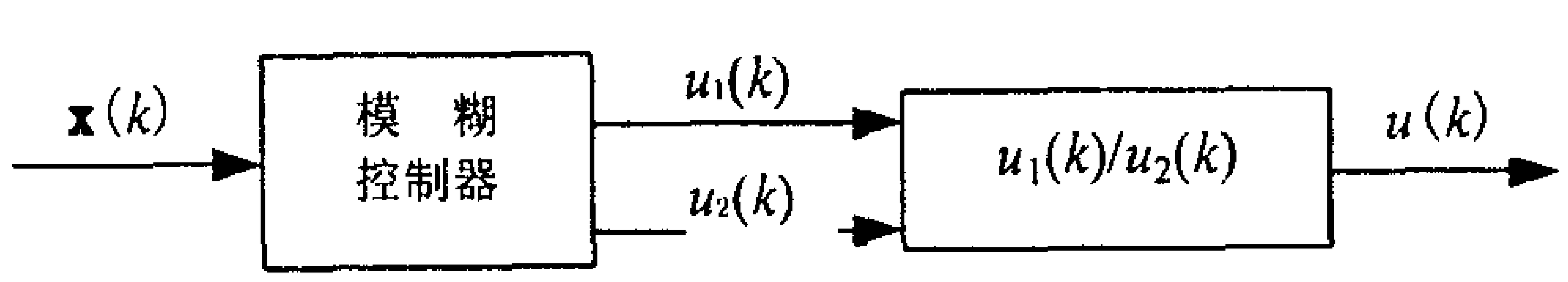

图 1 模糊反馈线性化调节器结构

在这样的控制作用下，(2)式所描述的非线性系统在没有不确定信息的情况下（即 $\Delta A_l(k)=0$，$\Delta b_l(k)=0$），就能反馈线性化为(5)式所示的理想线性系统.

3 参数不确定时的模糊反馈线性化控制

当参数有不确定信息时，即(2)式中的 $\Delta A_l(k) \neq 0$，$\Delta b_l(k) \neq 0$，将(6)式的控制量带入(3)式，得到闭环控制系统：

$$x(k+1)=\hat{A}^{T}x(k)+\sum_{l=1}^{L}\mu_l(x(k))\Delta A_l(k)x(k)$$
$$+\frac{\sum_{l=1}^{L}\mu_l(x(k))\Delta b_l(k)}{\sum_{l=1}^{L}\mu_l(x(k))b_l}\left\{\sum_{l=1}^{L}\mu_l(x(k))(\hat{A}-A_l)^{T}x(k)\right\} \tag{8}$$
$$=\hat{A}^{T}x(k)+A_e(k)x(k)$$

这里，$A_e(k)x(k)$ 是不确定信息的存在使闭环系统出现的误差，其中

$$A_e(k)=\sum_{l=1}^{L}\mu_l(x(k))\Delta A_l(k)+\frac{\sum_{l=1}^{L}\mu_l(x(k))\Delta b_l(k)}{\sum_{l=1}^{L}\mu_l(x(k))b_l}\left\{\sum_{l=1}^{L}\mu_l(x(k))(\hat{A}-A_l)^{T}\right\} \tag{9}$$

为使闭环系统渐进稳定，有下面定理成立.

定理 1 假定存在某种范数$\|\cdot\|$和常数 C，使得

$$\left\|\hat{A}^{T}\right\|\le C<1 \tag{10}$$

那么，模糊系统(8)整体渐进稳定的充分条件是

$$\|A_e(k)\|<1-C \tag{11}$$

证明 对(8)式两边取范数，有

$$\|x(k+1)\|=\left\|\hat{A}^{T}x(k)+A_e(k)x(k)\right\|\le\left\|\hat{A}^{T}+A_e(k)\right\|\|x(k)\|$$

进而有：

$$\left\|\hat{A}^{T}+A_e(k)\right\|\le\left\|\hat{A}^{T}\right\|+\|A_e(k)\|$$

根据假设（10）可知，当（11）式成立时有

$$\left\|\hat{A}^{T}+A_e(k)\right\|<1$$

成立，也就有 $\lim_{k\to\infty}\|x(k)\|=0$，即从任意初始状态出发$\|x(k)\|$都收敛于零，故系统(8)整体渐近稳定，定理得证.

为了进一步得到使模糊系统能反馈线性化成理想线性系统的不确定信息$\Delta A_l(k)$、$\Delta b_l(k)$的界限，有以下定理成立：

定理 2 假定存在 n 维向量α、η和常数 C，使得

$$\max_l\left|\hat{A}^{T}-A_l^{T}\right|\le\eta \tag{12}$$

$$\max_l(|\Delta A_l(k)|)<\alpha,\qquad \max_l(|\Delta b_l(k)/b_l|)\le C<1, \tag{13}$$

则模糊系统(8)能反馈线性化成理想线性系统(5)的充分条件是

$$\|(\alpha+C\eta)\|<1 \tag{14}$$

证明 对(9)式两边取范数，有

$$\|A_e(k)\| = \left\| \sum_{l=1}^{L} \mu_l(x(k))\Delta A_l(k) + \frac{\sum_{l=1}^{L}\mu_l(x(k))\Delta b_l(k)}{\sum_{l=1}^{L}\mu_l(x(k))b_l} \left\{ \sum_{l=1}^{L} \mu_l(x)(\hat{A} - A_l)^T \right\} \right\|$$

$$< \left\| \max_l(|\Delta A_l(k)|) + \max_l\left(\left|\frac{\Delta b_l(k)}{b_l}\right|\right) \max_l \left|(\hat{A} - A_l)^T\right| \right\|$$

在假定(12)、(13)的基础上，上式成为：

$$\|A_e(k)\| < \|\alpha + C\eta\|$$

在(14)式成立的条件下，显然有

$$\|A_e(k)\| < 1$$

成立，这就使得(8)式中的误差项满足 $\lim_{k\to\infty}\|A_e(k)\mathrm{x}(k)\| = 0$，故模糊系统(8)能反馈线性化成理想线性系统(5)，定理得证.

4 设计举例

考虑非线性系统的 T-S 模糊模型如下：

IF x(k) is X^1

THEN $x^1(k+1)=(2.178+\Delta A^1_1)x(k)-(0.588+\Delta A^1_2)x(k-1)+(0.603+\Delta b_1)u(k)$

IF x(k) is X^2

THEN $x^2(k+1)=(2.256+\Delta A^2_1)x(k)-(0.361+\Delta A^2_2)x(k-1)+(1.120+\Delta b_2)u(k)$

其中，X^1、X^2是如图 2 所示的模糊集合. 设反馈线性化后的理想系统方程为：

$$x(k+1) = 0.6x(k) - 0.4x(k-1)$$

则按(7)式取模糊控制规则为：

IF x(k) is X^1 THEN $u_1^1(k)=-1.578x(k)-0.188x(k-1)$

$u_2^1(k)=0.603$

IF x(k) is X^2 THEN $u_1^2(k+1)=-1.656x(k)-0.039x(k-1)$

$u_2^2(k+1)=1.120$

若不存在不确定信息，闭环系统的输出响应如图 3 所示. 在图 3 中，实线代表理想系统响应曲线，虚线代表模糊反馈线性化系统的输出，可以看出，闭环响应与理想线性系统的响应完全一致. 若存在不确定信息，由定理 2 可知，当不确定信息在一定范围内时，不确定模糊系统仍能反馈线性化成理想线性系统. 例如，取$\Delta A^1_1=0.2$，$\Delta A^1_2=0.1$，$\Delta b_1=0.2$，$\Delta A^2_1=0.1$，$\Delta A^2_2=0.1$，$\Delta b_1=0.2$，闭环系统的输出响应如图 4 所示. 同样，在图 4 中，实线代表理想系统响应曲线，虚线代表模糊反馈线性化系统的输出，从图中可以看出，只要不确定部分不是很严重，模糊系统仍能近似反馈线性化成理想线性系统.

5 结论

本文研究了基于 T-S 型模糊模型的模糊反馈线性化控制系统，当非线性系统为确定性系统时，该控制系统可将非线性系统完全反馈线性化成理想的线性系统，当存在

不确定信息时，给出了使闭环系统渐进稳定的充分条件，并给出了使非线性系统能反馈线性化成理想线性系统的不确定信息的界限.

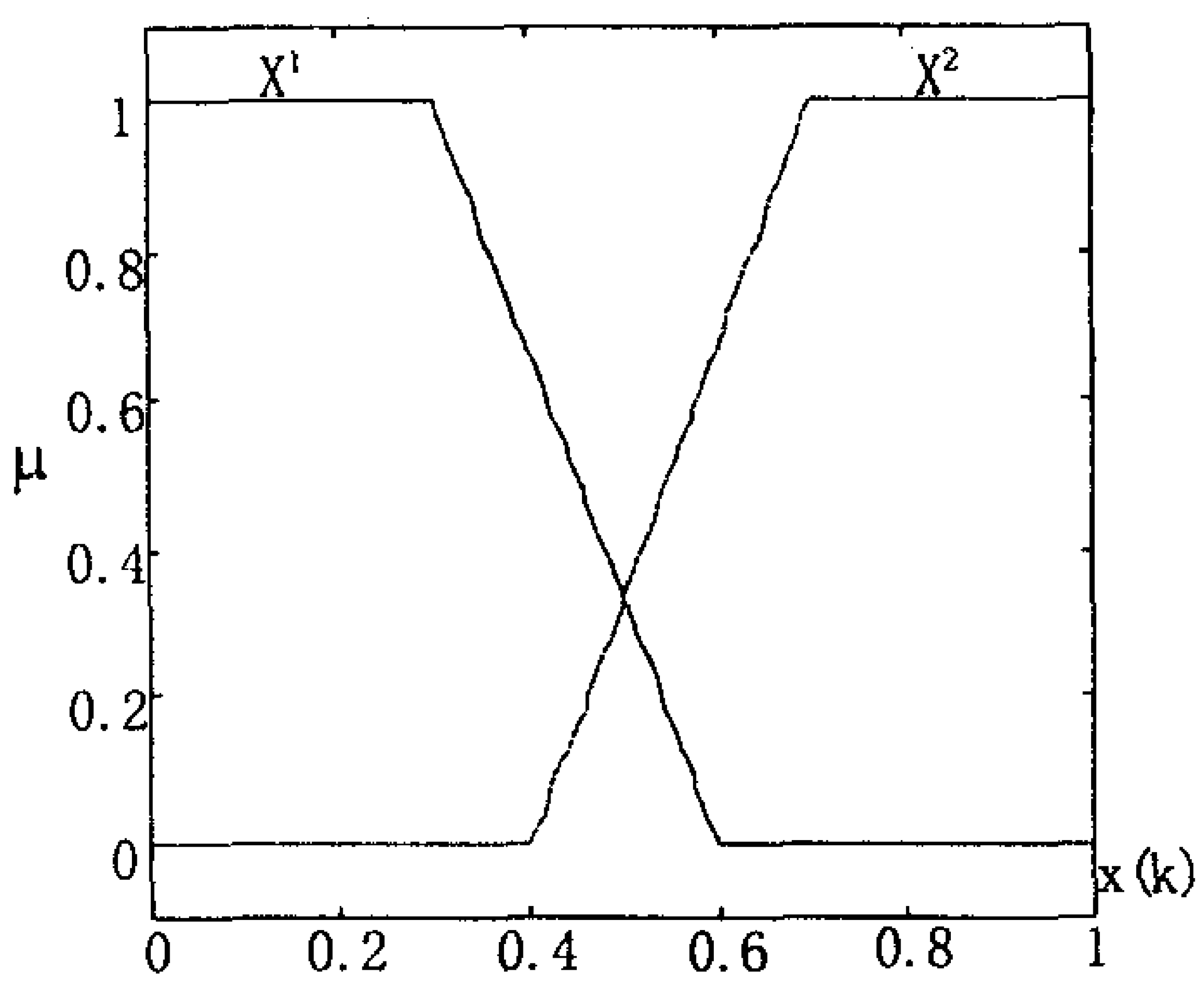

图 2 输入变量的隶属函数

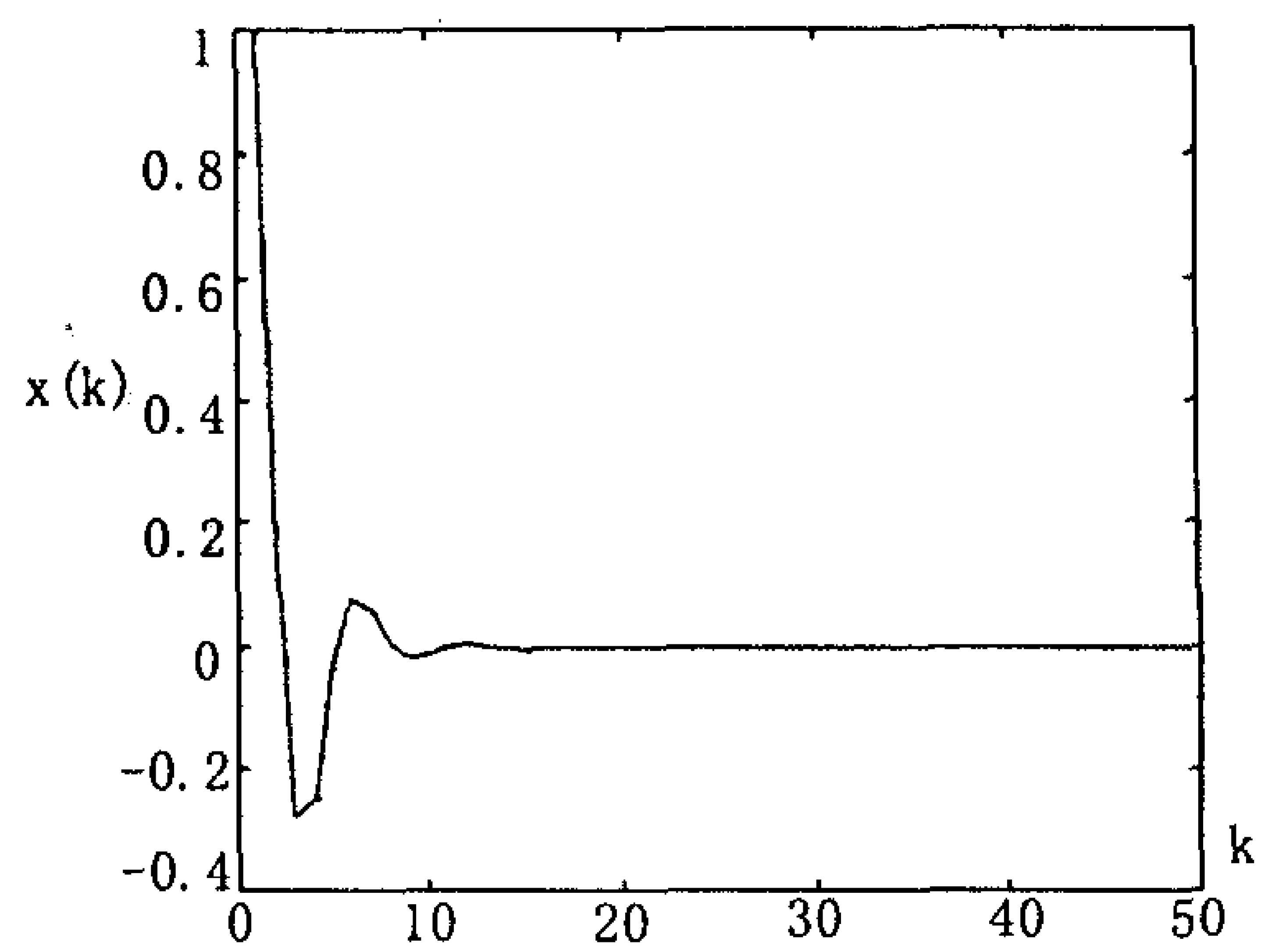

图 3 确定系统的模糊反馈线性化输出

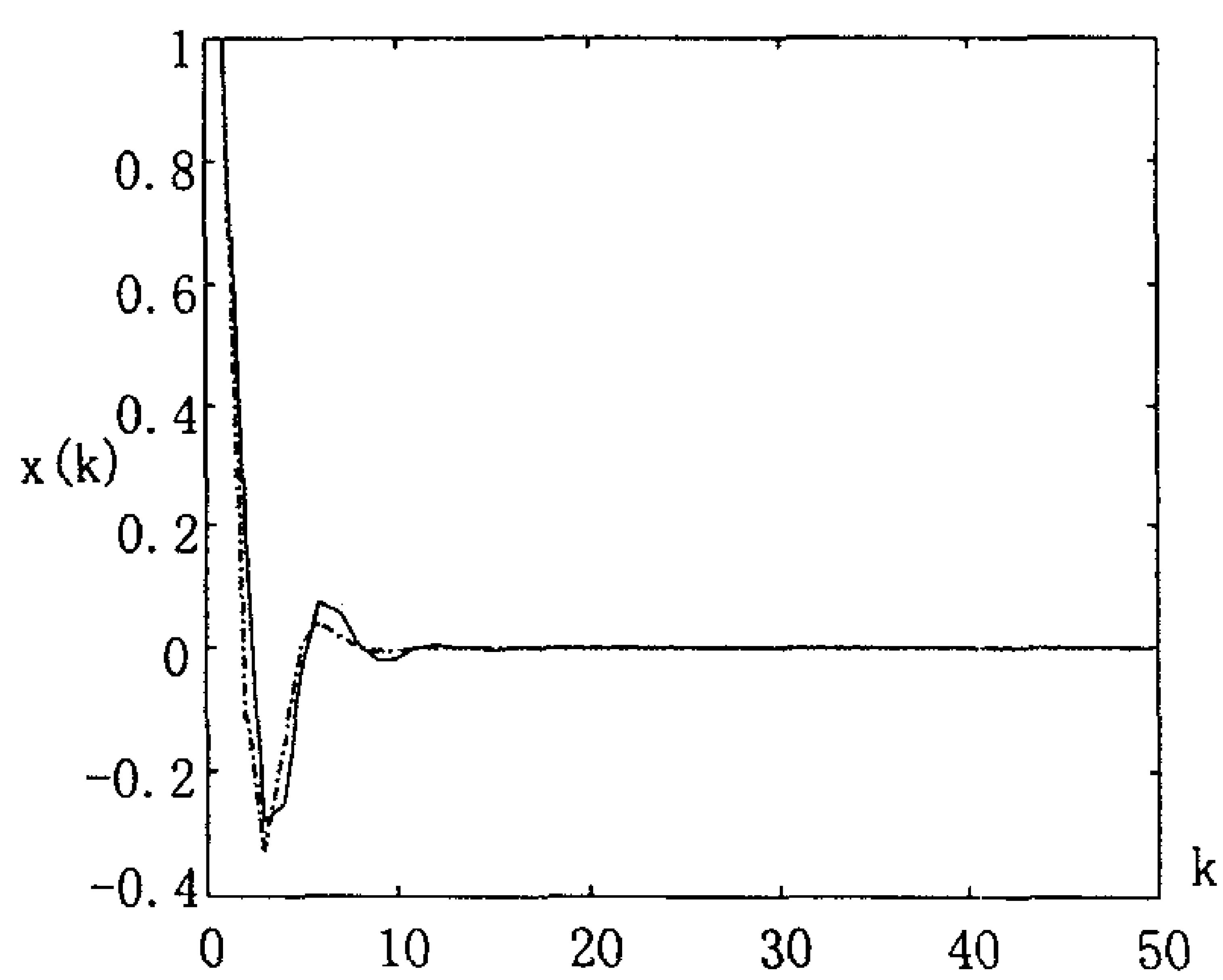

图 4 不确定系统的模糊反馈线性化输出

参 考 文 献

1. Takagi T,Sugeno M.Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control.*IEEE Trans.S.M.C* ,1985,**15**(1):116－132
2. Wong L K,Leung F H F,Tam P K S.Stability design of TS model based fuzzy systems. *FUZZ-IEEE'97*:83－86
3. Kang H J,Kwon Cheol.Robust stability analysis and design method for the fuzzy feedback linearization regulator. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*,1998,6(4):464－472
4. Cao S G,Rees N W.Stability analysis of fuzzy control systems. *IEEE Trans.S.M.C.*,1996, **26**(1). 201－204
5. 吴方向, 史忠科. T-S 型模糊系统的稳定性分析及其应用. 控制与决策, 1999, **14**(1):65－68

高卫华 女, 1973 年生. 1997 年毕业于西安理工大学自动化系, 获自动控制专业硕士学位, 现在上海交通大学自动化研究所攻读博士, 并已获得博士学位. 主要研究方向为模糊控制理论与应用、神经网络等.

谢剑英 男, 1940 年生, 1964 年毕业于上海交通大学自动化系, 教授, 博士生导师. 研究领域为复杂工业过程建模、控制与优化、网络工程与信息系统集成. 著有《微型计算机控制技术》等.