第26卷 第5期
2000年9月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 26, No. 5
Sep., 2000

研究简报

非线性不确定系统的鲁棒性研究[1)]

费树岷　冯纯伯　宋士吉
(东南大学自动化研究所　南京　210096)
(E-mail　infcon@seu.edu.cn)

关键词　非线性系统，不确定性，匹配条件，模有界条件，鲁棒性.

RESEARCH ON ROBUSTNESS FOR NONLINEAR UNCERTAIN SYSTEMS

FEI Shumin　FENG Chunbo　SONG Shiji
(*Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing* 210096)

Key words　Nonlinear system, uncertainty, matching condition, norm-bounded condition, robustness.

1 引言

非线性不确定系统的鲁棒性研究，早期是以在匹配条件(matching condition)和广义匹配条件下，设计控制器使闭环系统达到实际稳定(practical stabitity)为主[1~3]. 近些年利用 H^{∞} 控制理论的结果，出现了对具有有界结构的非线性不确定系统的鲁棒性讨论[4~9]. 模有界结构条件下，非线性不确定系统的鲁棒性有可能达到使状态趋于平衡点，而非仅仅实际稳定. 在文献[4]中所讨论的非线性系统，要求其非线性部分具有线性界. 文献[5]首次将模有界结构条件引入到线性不确定系统的鲁棒性研究中. 文献[6]进一步讨论了这一结构下的鲁棒 H^{∞} 控制问题. 而文献[7]则研究了另一种有界结构的不确定非线性系统的鲁棒 H^{∞} 控制问题.

2 问题的提出

考虑如下非线性不确定系统

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f(x) + (g(x) + \Delta g(x))u, f(0) = 0, \Delta f(0) = 0, \tag{1}$$

1) 国家攀登计划(970211017)、国家自然科学基金(69934010, 69603004)资助项目.
收稿日期　1998-12-25　　收修改稿日期　1999-06-15

其中 $x\in R^n$ 为状态，$u\in R^m$ 为控制输入，$f:R^n\mapsto R^n$，$g:R^n\mapsto R^{n\times m}$ 为已知，$\Delta f:R^n\mapsto R^n$，$\Delta g:R^n\mapsto R^{n\times m}$ 未知，代表系统的不确定性.

本文将对系统(1)的不确定性 $\Delta f,\Delta g$ 分两种情况讨论.

A1.（匹配条件）存在连续函数 $\Delta E_1(x)$，$\Delta E_2(x)$ 以及常数 $k<1$，使

$$(\Delta f\ \Delta g)=g(x)(\Delta E_1(x)\Delta E_2(x)),\ |\Delta E_2(x)|\leqslant k; \tag{2}$$

A2.（模有界条件）存在适当维数的连续向量和矩阵函数 $L(x)$，$E_1(x)$，$E_1(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，$E_2(x)$，使

$$(\Delta f,\Delta g)=L(x)F(x)(E_1(x),E_2(x)). \tag{3}$$

$$F(\cdot)\in M=\{(F^{\mathrm T}F(\cdot)\leqslant I,\forall\ x:F(\cdot)\text{ 中的每个元均是勒贝格可测的}\}.$$

3 主要结果

定理1. 设 A1成立，则系统(1)实际可稳定的充分必要条件为存在可微的李雅普诺夫函数 $V(x)>0,x\neq0,V(\mathbf{0})=0,\varepsilon>0$，使

$$\frac{\partial V}{\partial x}f<0,\text{当}\frac{\partial V}{\partial x}g(x)=0,|x|\geqslant\varepsilon, \tag{4}$$

其中$\frac{\partial V}{\partial x}\triangleq\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)$.（有关实际稳定的定义参见文献[2]).

证明. 若存在 $\varepsilon>0$以及连续函数 $u_\varepsilon(x)$使 $u=u_\varepsilon(x)$时，闭环系统(1)是实际稳定的，则由函数的连续性和李雅普诺夫逆定理知，存在可微的正定函数 $V(x)$，$\phi\in\mathscr{K}$，使 $|x|\geqslant\varepsilon$ 时，$\frac{\partial V}{\partial x}f(x)+\frac{\partial V}{\partial x}g(x)(\Delta E_1(x)+u_\varepsilon(x)+\Delta E_2(x)u_\varepsilon(x))\leqslant-\phi(|x|)$，其中 $\phi\in\mathscr{K}$，($\mathscr{K}$ 类函数的定义参见文献[2]). 故当$\frac{\partial V}{\partial x}g(x)=0$，$|x|\geqslant\varepsilon$ 时有式(4)成立.

反之，若存在可微的正定函数 $V(x)$，$V(\mathbf{0})=0$，使式(4)成立. 记 $\omega^{\mathrm T}=\frac{\partial V}{\partial x}g(x)$，$\bar{x}$ 为 ω 在 x 处的正交补，即 $x=(\bar{x}^{\mathrm T},\omega^{\mathrm T})^{\mathrm T}$，则根据式(4)知，存在 $\phi\in\mathscr{K}$，$\rho_1(x)\geqslant0$，$\rho_1(\bar{x})\equiv0$，$\rho_2(x)\geqslant0$使 $|\Delta E_1(x)|\leqslant\rho_2(x)$，故当 $|\bar{x}|\geqslant\varepsilon$ 时，有

$$\begin{aligned}\dot V_{(1)}&=\frac{\partial V}{\partial x}f(x)+\frac{\partial V}{\partial x}g(\Delta E_1(x)+(I+\Delta E_2(x))u\leqslant\\&-\phi(|x|)+\rho_1(x)+\rho_2(x)|\omega|+\omega^{\mathrm T}(I+\Delta E_2(x))u.\end{aligned}$$

由式(2)知，如果取 $u=-\lambda(x)\omega$，$\lambda(x)\geqslant0$为待选函数，则

$$\dot V_{(1)}\leqslant-\phi(|x|)+\rho(x)-(1-k)\lambda(x)|\omega|^2, \tag{5}$$

其中 $\rho(x)=\rho_1(x)+\rho_2(x)|\omega|$. 因为当 $|x|\geqslant\varepsilon$，$\omega=\mathbf{0}$时 $\dot V_{(1)}\leqslant-\phi(|\bar{x}|)$ 且 $\rho_1(\bar{x})\equiv0$，故存在 $\varepsilon_1>0$，$\bar\phi\in\mathscr{K}$ 使当 $|x|\geqslant\varepsilon$，$|\omega|\leqslant\varepsilon_1$时，有 $\dot V_{(1)}\leqslant-\bar\phi(|x|)$，对于 ε_1，当 λ 取为

$$\lambda(x)\geqslant\begin{cases}\rho(x)/(1-k)|\omega|^2, & \text{当}|\omega|>\varepsilon_1\\ \rho(x)/(1-k)\varepsilon_1^2, & \text{当}|\omega|\leqslant\varepsilon_1\end{cases}\text{时},\dot V_{(1)}\leqslant\begin{cases}-\phi(|x|), & \text{当}|x|\geqslant\varepsilon,|\omega|>\varepsilon_1,\\ -\bar\phi(|x|), & \text{当}|x|\geqslant\varepsilon,|\omega|\leqslant\varepsilon_1,\end{cases} \tag{6}$$

即 $|x|\geqslant\varepsilon$ 时，V 沿闭环系统(1)解的导数负定，故闭环系统(1)的解是最终有界的. 证毕.

定理2. 假设 A2成立. 如果(f,g)是局部可达的，(E_1,f)是零状态可检测的（有关局部可达性和零状态可检测性定义见文献[2]中），存在 $\beta,\varepsilon,\gamma>0$使不等式

$$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+\frac{\varepsilon^2}{4\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}LL^{\mathrm{T}}\frac{\partial^{\mathrm{T}} V}{\partial \boldsymbol{x}}-\alpha_\varepsilon^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})R_\varepsilon\alpha_\varepsilon(\boldsymbol{x})+\varepsilon^{-2}E_1^{\mathrm{T}}E_1\leqslant 0 \tag{7}$$

有正定解 $V(\boldsymbol{x})$，式中 $R_\varepsilon=\beta I+\varepsilon^{-2}E_2^{\mathrm{T}}E_2$，$\alpha_\varepsilon=-\frac{1}{2}R_\varepsilon^{-1}\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}g+\varepsilon^{-2}E_1^{\mathrm{T}}E_2\right)^{\mathrm{T}}$，则当 $\gamma<1$时，存在控制器使闭环系统(1)的解是渐近稳定的．当式(7)有解时，控制器可取为 $\boldsymbol{u}=\alpha_\varepsilon$.

证明．如果存在 $\beta,\varepsilon,\gamma>0$使式(7)成立，则在反馈 $\boldsymbol{u}=\alpha_\varepsilon$ 之下，取使式(7)成立的 $V(\boldsymbol{x})$ 作为闭环系统(1)的李雅普诺夫函数．利用事实：对任何向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^n$ 和正定矩阵 P 有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}y\leqslant\frac{1}{4}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}P^{-1}\boldsymbol{y}$ 成立，令 $P=\frac{\varepsilon^2}{\gamma^2}I$ 得 V 沿闭环系统(1)的导数

$$\begin{aligned}\dot V_{(1)}=&\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}f+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{gu}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}LF(E_1+E_2\boldsymbol{u})\leqslant\\ &\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{gu}+\frac{\varepsilon^2}{4\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}LL^{\mathrm{T}}\frac{\partial^{\mathrm{T}} V}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{\gamma^2}{\varepsilon^2}(E_1+E_2\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}(E_1+E_2\boldsymbol{u})\leqslant\\ &\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+\frac{\varepsilon^2}{4\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}LL^{\mathrm{T}}\frac{\partial^{\mathrm{T}} V}{\partial \boldsymbol{x}}-\alpha_\varepsilon^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})R_\varepsilon\alpha_\varepsilon(x)+\frac{1}{\varepsilon^2}E_1^{\mathrm{T}}E_1+\\ &\frac{1}{\varepsilon^2}(\gamma^2-1)\left|E_1+E_2\alpha_\varepsilon(\boldsymbol{x})\right|^2-\beta\alpha_\varepsilon^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\alpha_\varepsilon(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

可见当式(7)成立且 $\gamma<1$时，有

$$\dot V_{(1)}\leqslant-\beta\alpha_\varepsilon^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\alpha_\varepsilon(\boldsymbol{x})+\frac{1}{\varepsilon^2}(\gamma^2-1)\left|E_1+E_2\alpha_\varepsilon(\boldsymbol{x})\right|^2\leqslant 0.$$

显然，$\dot V_{(1)}=0$意味着 $\alpha_\varepsilon(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$，$E_1(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$．故如果存在闭环系统(1)的解 $\boldsymbol{x}(t)$使 $\alpha_\varepsilon(\boldsymbol{x}(t))\equiv\boldsymbol{0}$，$E_1(\boldsymbol{x}(t))\equiv 0$，$\forall\ t\geqslant 0$，则 $\boldsymbol{x}(t)$满足方程 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$．由$(E_1,\boldsymbol{f})$的可检测性知，$\boldsymbol{x}(t)\to\boldsymbol{0}(t\to\infty)$．再由 Lasalle 不变性原理便得，闭环系统(1)的解是渐近稳定的． 证毕.

如果不确定性$(\Delta\boldsymbol{f},\Delta\boldsymbol{g})=L(\boldsymbol{x})(\Delta E_1(\boldsymbol{x}),\Delta E_2(\boldsymbol{x}))$，$\Delta E_1(\boldsymbol{x})$，$\Delta E_2(\boldsymbol{x})$满足文献[7]的条件，即存在向量函数 $\rho(\boldsymbol{x})$和矩阵函数 $D(\boldsymbol{x})$使 $\Delta E_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\Delta E_1(\boldsymbol{x})\leqslant\rho^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x})$，$\Delta E_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\Delta E_2(\boldsymbol{x})\leqslant D^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})D(\boldsymbol{x})$，是文献[7]的结论为：如果存在 $\varepsilon,\beta,\gamma>0$使

$$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+\frac{\varepsilon^2}{4\gamma^2}\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}LL^{\mathrm{T}}\frac{\partial^{\mathrm{T}} V}{\partial \boldsymbol{x}}-\bar\alpha_\varepsilon^{\mathrm{T}}\bar R_\varepsilon\bar\alpha_\varepsilon+\varepsilon^{-2}\rho^{\mathrm{T}}\rho\leqslant 0 \tag{8}$$

有正定解 $V(\boldsymbol{x})$，则当 $\gamma<1$时系统(1)的解是鲁棒可镇定的．其中 $\bar R_\varepsilon=\beta I+\varepsilon^{-2}D^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})D(\boldsymbol{x})$，$\bar\alpha_\varepsilon(\boldsymbol{x})=\bar R_\varepsilon^{-1}\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{g}+2\rho^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})D(\boldsymbol{x})\right)^{\mathrm{T}}$．由此可看出本文所得结果是现有非线性不确定系统鲁棒性结果的进一步发展.

参 考 文 献

1 Gutman S. Uncertain dynamical systems——A Lyapunov min-max approach. *IEEE Trans. Contr.*, 1979, **AC-24**(2): 437～443

2 Myzkorowski P. Practical stabilization of a class of uncertain nonlinear systems. *Syst. Contr. Lett.*, 1992, **18**(1): 233～236

3 Qu Z. Global stabilization of nonlinear systems with a class of unmatched uncertainties. *Syst. Contr. Lett.*, 1992, **18**(2): 301～307

4 Xie L, de Souza C E. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *Syst. Contr. Lett.*, 1992, **19**(1): 139～149

5 费树岷．非线性不确定系统鲁棒镇定的 H^∞方法．控制与决策，1995，**10**(5)：390～394

6 费树岷，霍伟．非线性系统的输出反馈鲁棒 H^{∞}控制．北京航空航天大学学报，1995，**21**(3)：96～102

7 Shen T, Tamura K. Robust H_{∞} control of uncertain nonlinear system via state feedback. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1995，**40**(3)：766～768

8 Van der Schaft A J. L_2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H^{∞} control. *IEEE Trans. Contr.*, 1992，**37**(3)：770～784

9 费树岷，高为炳．非线性不确定系统的鲁棒镇定．航空学报，1996，**17**(1)：107～111

费树岷　1961年出生．1985年获安徽大学理学硕士学位，1995年获北京航空航天大学工学博士学位，1995年至1997年在东南大学自动化所从事博士后研究工作，现为东南大学教授、博士生导师．主要研究兴趣：非线性控制系统设计与综合、鲁棒控制、自适应控制等．

冯纯伯　1928年生．1950年毕业于浙江大学电机系，1953年毕业于哈尔滨工业大学研究生班，1958年获苏联技术科学副博士学位．现任东南大学研究生院副院长、教授、中国自动化学会常务理士、俄罗斯联邦自然科学院外籍院士、中国科学院院士．目前主要从事系统建模、自适应、鲁棒及智能化控制理论及应用、机器人控制等方面的研究．