短文

时滞不确定线性互联大系统分散鲁棒 H_∞ 控制[1)]

尚群立 薛安克 孙优贤
（工业控制技术国家重点实验室，浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027）

摘 要 讨论了含多重控制和状态时变时滞的不确定线性互联大系统的分散鲁棒 H_∞ 控制问题，给出分散状态反馈问题有解的充分条件，并将其转化为一个线性矩阵不等式的求解.

关键词 时滞，不确定性，线性互联大系统，分散鲁棒 H_∞ 控制，线性矩阵不等式(LMI)

DECENTRALIZED ROBUST H_∞ CONTROL FOR UNCERTAIN INTERCONNECTED LINEAR LARGE-SCALE SYSTEM WITH DELAYS

SHANG Qunli XUE Anke SUN Youxian
(*National Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Abstract This paper investigates the problem of decentralized robust H_∞ control via state feedback for uncertain interconnected linear large-scale system with multiple time-varying delays in states and controls. A sufficient condition for the existence of a decentralized robust H_∞ controller via decentralized state feedback has been presented in terms of a linear matrix inequality.

Key words Delay, uncertainty, interconnected linear large-scale system, decentralized robust H_∞ control, linear matrix inequality(LMI).

1 引言

目前已有一些文献研究了建立在 H_∞ 控制理论基础上线性互联大系统的分散控制问题，如文献[1]讨论了系统含一类范数有界不确定性的分散状态反馈二次镇定问题；对鲁棒镇定和鲁棒 H_∞ 控制，文献[2]给出了问题有解的充分条件，是将分散控制问题转化为

1) 国家自然科学基金资助项目(编号:69874036)，浙江省自然科学重点基金资助项目(编号:ZD9905).
收稿日期 1997-12-08 收修改稿日期 1998-12-30

满足一定构造条件的确定性辅助子系统的标准 H_∞ 控制问题. 本文针对在不确定性、时滞、互联三个方面具有普遍性的不确定性线性互联时滞大系统,导出了分散状态反馈鲁棒 H_∞ 控制问题有解的充分条件,化为一个特定的 LMI 的求解问题.

2 问题描述

考虑互联大系统 $\sum$ 由 N 个子系统 $\sum_i, i=1,\cdots,N$ 描述如下:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_i(t) = (A_i + \Delta A_i)\boldsymbol{x}_i(t) + (B_i + \Delta B_i)\boldsymbol{u}_i(t) + \sum\limits_{p=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{N}(A_{ij}^p + \Delta A_{ij}^p)\boldsymbol{x}_j(t - h_p(t)) + \\ \qquad \sum\limits_{q=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{N}(B_{ij}^q + \Delta B_{ij}^q)\boldsymbol{u}_j(t - k_q(t)) + E_{1i}\boldsymbol{w}_i(t), \\ \boldsymbol{z}_i(t) = L_i\boldsymbol{x}_i(t) + H_i\boldsymbol{u}_i(t), \end{cases} \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{x}_i \in R^{n_i}$ 是状态向量, $\boldsymbol{u}_i \in R^{m_i}$ 是控制输入向量, $\boldsymbol{z}_i \in R^{q_i}$ 是输出(或评价)变量, $\boldsymbol{w}_i \in R^{p_i}$ 是干扰输入 $\boldsymbol{w}_i \in L_2[0,\infty)$. $A_i, B_i, A_{ij}^p, B_{ij}^q, E_{1i}, H_i, L_i$ 是已知具有适当维数的常数向量或矩阵, $h_p(t), k_q(t)$ 分别为多重状态和控制时变时滞,而 $\Delta A_i, \Delta B_i, \Delta A_{ij}^p, \Delta B_{ij}^q$ 为不确定性矩阵(p,q 是上(下)标而不是次方,以下同样). 设系统满足如下假设条件:

A1) $\dot{h}_p(t) \leqslant \bar{h}_p < 1, \dot{k}_q(t) \leqslant \bar{k}_q < 1, p=1,\cdots,n.\quad q=1,\cdots,m$;

A2) 为处理简单起见,设 $L_i^{\mathrm{T}}H_i = 0$;

A3) $\Delta A_i = U_{ai}F_{ai}(\cdot)V_{ai}, \Delta B_i = U_{bi}F_{bi}(\cdot)V_{bi}, \Delta A_{ij}^p = \bar{U}_{ij}^p\bar{F}_{ij}^p(\cdot)\bar{V}_{ij}^p, \Delta B_{ij}^q = \widetilde{U}_{ij}^q\widetilde{F}_{ij}^q(\cdot)\widetilde{V}_{ij}^q$,

其中不确定性矩阵 $F_{ai}, F_{bi}, \bar{F}_{ij}^p, \widetilde{F}_{ij}^q \in \Omega = \{F(t) \mid F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I, \forall\, t \in R\}$, 而 Ω 是一个紧集.

考虑采用分散无记忆状态反馈

$$\boldsymbol{u}_i = K_i\boldsymbol{x}_i, \tag{2}$$

其中 K_i 为适维常数矩阵,使得构成的整个闭环系统 $\sum_C$, 对所有容许的参数不确定性,满足

1) 当 $\boldsymbol{w}_i = 0, i = 1,\cdots,N$, 闭环系统 $\sum_C$ 鲁棒内稳定;

2) 给定 $r>0$, 设系统初始状态为零,那么从 $\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{w}_1^{\mathrm{T}} \cdots \boldsymbol{w}_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 到 $\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}} \cdots \boldsymbol{z}_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 的干扰衰减满足 $\|\boldsymbol{z}(t)\|_2 < r\|\boldsymbol{w}(t)\|_2, \forall\, \boldsymbol{w}_i \in L_2[0,\infty)$.

3 主要结果

引入分散状态反馈(2)到子系统(1),构成第 i 个闭环子系统 $\sum_{iC}$, 考虑到 A2), 进而得到 $\sum_C$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = (A + BK + U_aF_aV_a + U_bF_bV_bK)\boldsymbol{x} + E_1\boldsymbol{w} + \\ \qquad \sum\limits_{p=1}^{n}(A^p + \Delta A^p)\boldsymbol{x}(t - h_p) + \sum\limits_{q=1}^{m}(B^q + \Delta B^q)K\boldsymbol{x}(t - k_q), \\ \boldsymbol{z} = (L + HK)\boldsymbol{x}, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $x = [\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \cdots \boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, A^p = [A_{ij}^p]^{N\times N}, B^q = [B_{ij}^q]^{N\times N}, \Delta A^p = [\Delta A_{ij}^p]^{N\times N} = \bar{U}^p\bar{F}^p\bar{V}^p, \Delta B^q =$

$[\Delta B_{ij}^q]^{N\times N}=\widetilde{U}^q\widetilde{F}^q\widetilde{V}^q$. $A,B,K,U_a,U_b,V_a,V_b,F_a,F_b,E_1,L,H$ 分别是由 $A_i,B_i,K_i,U_{ai},U_{bi},V_{ai},V_{bi},F_{ai},F_{bi},E_{1i},L_i,H_i$ 当 i 从1到 N 的子块元组成的相应维数的块对角矩阵,$\overline{U}^p=\underset{i=1,\cdots,N}{\operatorname{diag}}\{[\overline{U}_{i1}^p\cdots\overline{U}_{iN}^p]\}$,$\overline{F}^p=\underset{i=1,\cdots,N}{\operatorname{diag}}\{\underset{j=1,\cdots,N}{\operatorname{diag}}\{\overline{F}_{ij}^p\}\}$,$\overline{V}^p=[\underset{j=1,\cdots,N}{\operatorname{diag}}\{\overline{V}_{1j}^p\}\ \cdots\ \underset{j=1,\cdots,N}{\operatorname{diag}}\{\overline{V}_{Nj}^p\}]$,$\widetilde{U}^q=\underset{i=1,\cdots,N}{\operatorname{diag}}\{[\widetilde{U}_{i1}^q\cdots\widetilde{U}_{iN}^q]\}$,$\widetilde{F}^q=\underset{i=1,\cdots,N}{\operatorname{diag}}\{\underset{j=1,\cdots,N}{\operatorname{diag}}\{\widetilde{F}_{ij}^q\}\}$,$\widetilde{V}^q=[\underset{j=1,\cdots,N}{\operatorname{diag}}\{\widetilde{V}_{1j}^q\}\ \cdots\ \underset{j=1,\cdots,N}{\operatorname{diag}}\{\widetilde{V}_{Nj}^q\}]$. 那么,由假设 A3)和上述分解可知,不确定性阵 $F_a,F_b,\overline{F}^p,\widetilde{F}^q\in\Omega$.

定理1. 不确定性互联时滞大系统(1)在分散状态反馈控制(2)的作用下,满足鲁棒 H_∞性能要求的充分条件是:对于给定的常数 $r>0$,如果存在适当的正标量 $\alpha,\beta,\varepsilon_p,\eta_q$ 和满足 $\overline{V}^pQ_p\overline{V}^{p^{\mathrm T}}<\varepsilon_pI$,$\widetilde{V}^qR_q\widetilde{V}^{q^{\mathrm T}}<\eta_qI$ 的正定对称阵 Q_p,R_q,使如下不等式有正定对称解阵 P

$$\begin{aligned}S=&A^{\mathrm T}P+PA+K^{\mathrm T}B^{\mathrm T}P+PBK+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{1-\bar h_p}Q_p^{-1}+K^{\mathrm T}\sum_{q=1}^{m}\frac{1}{1-\bar k_q}R_q^{-1}K+\\&r^{-2}PE_1E_1^{\mathrm T}P+\alpha PU_aU_a^{\mathrm T}P+\alpha^{-1}V_a^{\mathrm T}V_a+\beta PU_bU_b^{\mathrm T}P+\beta^{-1}K^{\mathrm T}V_b^{\mathrm T}V_bK+L^{\mathrm T}L+\\&K^{\mathrm T}H^{\mathrm T}HK+\sum_{p=1}^{n}[PA^pQ_pA^{p^{\mathrm T}}P+PA^pQ_p\overline{V}^{p^{\mathrm T}}(\varepsilon_pI-\overline{V}^pQ_p\overline{V}^{p^{\mathrm T}})^{-1}\overline{V}^pQ_pA^{p^{\mathrm T}}P+\\&\varepsilon_pP\overline{U}_p\overline{U}^{p^{\mathrm T}}P]+\sum_{q=1}^{m}[PB^qR_qB^{q^{\mathrm T}}P+PB^qR_q\widetilde{V}^{q^{\mathrm T}}(\eta_qI-\widetilde{V}^qR_q\widetilde{V}^{q^{\mathrm T}})^{-1}\widetilde{V}^qR_qB^{q^{\mathrm T}}P+\\&\eta_qP\widetilde{U}^q\widetilde{U}^{q^{\mathrm T}}P]<0.\end{aligned}\tag{4}$$

证明. 选取 Lyapunov 函数为

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol x)=&\boldsymbol x^{\mathrm T}(t)P\boldsymbol x(t)+\sum_{p=1}^{n}\int_{t-h_p(t)}^{t}\boldsymbol x^{\mathrm T}(\tau)\frac{Q_p^{-1}}{1-\bar h_p}\boldsymbol x(\tau)\mathrm d\tau+\\&\sum_{q=1}^{m}\int_{t-k_q(t)}^{t}\boldsymbol u^{\mathrm T}(\theta)\frac{R_q^{-1}}{1-\bar k_q}\boldsymbol u(\theta)\mathrm d\theta.\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol u=[\boldsymbol u_1^{\mathrm T}(t)\ \cdots\ \boldsymbol u_N^{\mathrm T}(t)]^{\mathrm T}$,求其导数并将(4)式$[\boldsymbol w(t)=0]$代入,则有

$$\dot V(x)\leqslant X^{\mathrm T}S_1X,$$

其中

$$S_1=\begin{bmatrix}\Phi_{10}&P\Phi_1&P\Phi_2\\\Phi_1^{\mathrm T}P&-\Phi_3&\\\Phi_2^{\mathrm T}P&&-\Phi_4\end{bmatrix},\Phi_3=\underset{p=1,\cdots,n}{\operatorname{diag}}\left\{\frac{1-\dot h_p}{1-\bar h_p}Q_p^{-1}\right\},\Phi_4=\underset{q=1,\cdots,m}{\operatorname{diag}}\left\{\frac{1-\dot k_q}{1-\bar k_q}R_q^{-1}\right\},$$

$$\Phi_1=\lfloor A^1+\Delta A^1\ \ \cdots\ \ A^n+\Delta A^n\rfloor,\Phi_2=\lfloor B^1+\Delta B^1\ \ \cdots\ \ B^m+\Delta B^m\rfloor,$$

$$\begin{aligned}\Phi_{10}=&A^{\mathrm T}P+PA+K^{\mathrm T}B^{\mathrm T}P+PBK+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{1-\bar h_p}Q_p^{-1}+K^{\mathrm T}\sum_{q=1}^{m}\frac{1}{1-\bar k_q}R_q^{-1}K+\\&V_a^{\mathrm T}F_a^{\mathrm T}U_a^{\mathrm T}P+PU_aF_aV_a+K^{\mathrm T}V_b^{\mathrm T}F_b^{\mathrm T}U_b^{\mathrm T}P+PU_bF_bV_bK,\end{aligned}$$

$$X=[\boldsymbol x^{\mathrm T}(t)\ \boldsymbol x^{\mathrm T}(t-h_1)\ \ \cdots\ \ \boldsymbol x^{\mathrm T}(t-h_n)\ \boldsymbol x^{\mathrm T}(t-k_1)K^{\mathrm T}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol x^{\mathrm T}(t-k_m)K^{\mathrm T}]^{\mathrm T}.$$

考虑到假设 A1)并应用三角不等式和文献[3]中引理2.1来处理含不确定性的项,则如下不等式成立

$$\begin{aligned}&P(A^p+\Delta A^p)[1-\bar h_p][1-\dot h_p]^{-1}Q_p(A^p+\Delta A^p)^{\mathrm T}P\leqslant P(A^p+\Delta A^p)Q_p(A_p+\Delta A^p)^{\mathrm T}P\leqslant\\&\quad PA^pQ_pA^{p^{\mathrm T}}P+PA^pQ_p\overline{V}^{p^{\mathrm T}}(\varepsilon_pI-\overline{V}^pQ_p\overline{V}^{p^{\mathrm T}})^{-1}\overline{V}^pQ_pA^{p^{\mathrm T}}P+\varepsilon_pP\overline{U}^p\overline{U}^{p^{\mathrm T}}P,\end{aligned}$$

$$P(B^q+\Delta B^q)[1-\bar k_q][1-\dot k_q]^{-1}R_q(B^q+\Delta B^q)^{\mathrm T}P\leqslant P(B^q+\Delta B^q)R_q(B_q+\Delta B^q)^{\mathrm T}P\leqslant$$

$$PB^qR_qB^{q^{\mathrm{T}}}P + PB^qR_q\widetilde{V}^{q^{\mathrm{T}}}(\eta_pI - \widetilde{V}^qR_q\widetilde{V}^{q^{\mathrm{T}}})^{-1}\widetilde{V}^qR_qB^{q^{\mathrm{T}}}P + \eta_qP\widetilde{U}^q\widetilde{U}^{q^{\mathrm{T}}}P,$$

$$V_a^{\mathrm{T}}F_a^{\mathrm{T}}U_a^{\mathrm{T}}P + PU_aF_aV_a \leqslant \alpha PU_aU_a^{\mathrm{T}}P + \alpha^{-1}V_a^{\mathrm{T}}V_a,$$

$$K^{\mathrm{T}}V_b^{\mathrm{T}}F_b^{\mathrm{T}}U_b^{\mathrm{T}}P + PU_bF_bV_bK \leqslant \beta PU_bU_b^{\mathrm{T}}P + \beta^{-1}K^{\mathrm{T}}V_b^{\mathrm{T}}V_bK.$$

另外，由(4)式可得

$$S - (r^{-2}PE_1E_1^{\mathrm{T}}P + L^{\mathrm{T}}L + K^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}HK) \leqslant S \leqslant 0.$$

对 S_1 应用 Schure 补[4]，并根据上述诸不等式，则可得 $S_1<0$，进而有 $\dot{V}(\boldsymbol{x})<0$，即闭环系统(3)是渐进内稳定的.

再证明 H_∞ 干扰衰减性能. 假设系统满足零初始状态(即 $x(0)=0$)条件，并令

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} - r^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w})\mathrm{d}t,$$

那么，由以上推导并考虑到假设 A2)，可得

$$J = \int_0^\infty [\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} - r^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\boldsymbol{x})]\mathrm{d}t - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\infty)P\boldsymbol{x}(\infty) - V_\infty =$$

$$\int_0^\infty X^{\mathrm{T}}S_2X\mathrm{d}t - \int_0^\infty [\boldsymbol{w} - r^{-2}E_1^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}}r^2[\boldsymbol{w} - r^{-2}E_1^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}]\mathrm{d}t - \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\infty)P\boldsymbol{x}(\infty) - V_\infty,$$

其中

$$S_2 = \begin{bmatrix} \Phi_{20} & P\Phi_1 & P\Phi_2 \\ \Phi_1^{\mathrm{T}}P & -\Phi_3 & \\ \Phi_2^{\mathrm{T}}P & & -\Phi_4 \end{bmatrix}, \Phi_{20} = \Phi_{10} + r^{-2}PE_1E_1^{\mathrm{T}}P + L^{\mathrm{T}}L + K^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}HK,$$

$$V_\infty = \lim_{t\to\infty}\left\{\sum_{p=1}^n\int_{t-h_p}^t \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau)Q_p\boldsymbol{x}(\tau)\mathrm{d}\tau + \sum_{q=1}^m\int_{t-k_q(t)}^t \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\theta)K^{\mathrm{T}}R_qK\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta\right\} \geqslant 0.$$

与鲁棒内稳定性的推导类似，如果 $S<0$，由 Schure 补可知 $S_2<0$，进而 $J<0$. 证毕.

对(4)式两边同乘 P^{-1}，令 $X=P^{-1}$，$Y=KX$，则可等价地变换为如下 LMI.

推论1. 矩阵不等式(4)式等价如下 LMI 存在正定对称解阵 X，且要求 $X^{-1}Y$ 为块对角阵，那么分散状态反馈控制器为 $K=X^{-1}Y$.

$$\begin{bmatrix} \Lambda_0 & X[V_a^{\mathrm{T}} \quad L^{\mathrm{T}}] & Y^{\mathrm{T}}[V_b^{\mathrm{T}} \quad H^{\mathrm{T}}] & X\langle I\rangle & Y^{\mathrm{T}}\langle I\rangle & \Lambda_1 \\ \begin{bmatrix} V_a \\ L \end{bmatrix}X & -\begin{bmatrix} \alpha I & \\ & I \end{bmatrix} & & & & \\ \begin{bmatrix} V_b \\ H \end{bmatrix}Y & & -\begin{bmatrix} \beta I & \\ & I \end{bmatrix} & & & \\ \langle I\rangle^{\mathrm{T}}X & & & -\Lambda_2 & & \\ \langle I\rangle^{\mathrm{T}}Y & & & & -\Lambda_3 & \\ \Lambda_1^{\mathrm{T}} & & & & & -\Lambda_4 \end{bmatrix} < 0, \tag{5}$$

其中 $\Lambda_1 = \left[A^1Q_1\overline{V}^{1^{\mathrm{T}}} \quad \cdots \quad A^nQ_n\overline{V}^{n^{\mathrm{T}}} \vdots B^1R_1\widetilde{V}^{1^{\mathrm{T}}} \quad \cdots \quad B^mR_m\widetilde{V}^{m^{\mathrm{T}}}\right]$,

$$\Lambda_2 = \underset{p=1,\cdots,n}{\mathrm{diag}}\{(1-\bar{h}_p)Q_p\}, \Lambda_3 = \underset{q=1,\cdots,m}{\mathrm{diag}}\{(1-\bar{k}_q)R_q\}, \langle I\rangle = [I \quad \cdots \quad I],$$

$$\Lambda_4 = \mathrm{diag}\left\{\underset{p=1,\cdots,n}{\mathrm{diag}}\{\varepsilon_pI - \overline{V}^pQ_p\overline{V}^{p^{\mathrm{T}}}\}, \underset{q=1,\cdots,m}{\mathrm{diag}}\{\eta_qI - \widetilde{V}^qR_q\widetilde{V}^{q^{\mathrm{T}}}\}\right\},$$

$$\Lambda_0 = XA^{\mathrm{T}} + AX + Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + BY + \alpha U_aU_a^{\mathrm{T}} + \beta U_bU_b^{\mathrm{T}} + r^{-2}E_1E_1^{\mathrm{T}} +$$

$$\sum_{p=1}^n[A^pQ_pA^{p^{\mathrm{T}}} + \varepsilon_p\overline{U}^p\overline{U}^{p^{\mathrm{T}}}] + \sum_{q=1}^m[B^qR_qB^{q^{\mathrm{T}}} + \eta_q\widetilde{U}^q\widetilde{U}^{q^{\mathrm{T}}}].$$

4 结 语

推论1给出的(5)式是一个典型的 LMI 问题,其求解由文献[4]已提供了一些可靠的和有效的算法,也可利用 MATLAB5.0中的 LMI 工具箱方便求解.本文针对不确定性互联时滞大系统(1),导出了分散状态反馈(2)鲁棒 H_∞控制问题有解的充分条件,将分散鲁棒 H_∞控制问题转化为一个特定的 LMI 的求解问题.

参 考 文 献

1 Cheng C F, Wang W J, Lin Y P. Quadratically decentralized stabilization for uncertain structured interconnected systems. In:Proc. 31st IEEE CDC, 1992. 2846~2847

2 Wang Y, Xie L, de Souza C E. Robust decentralized control of interconnected uncertain linear systems. In:Proc. 34th IEEE CDC, 1995. 2653~2658

3 Li X, de Souza C E. Criteria for robust stability of uncertain linear systems with time-varying state delays. IFAC 13th Triennial World Congress, 1996. 137~142

4 Body S L *et al.* Linear matrix inequalities in system and control theory. In:Proc. SIAM, Philadelphia: 1994

尚群立 男,1964年生.1998年在浙江大学工业控制技术研究所获博士学位.研究方向为非线性系统控制、H_∞ 控制、鲁棒控制理论及应用.

薛安克 男,1957年生.1997年在浙江大学获博士学位,现在浙江大学工业控制技术研究所从事博士后研究工作,教授.目前主要研究方向为鲁棒控制、过程工业控制理论及工程应用等.

孙优贤 男,1940年生.现任工业自动化国家工程中心主任、教授、博士生导师、中国工程院院士.长期从事过程控制理论及应用、容错控制理论及应用、鲁棒及 H_∞ 控制理论与应用.