第26卷 第5期
2000年9月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 26, No. 5
Sep., 2000

短文

线性不确定时滞系统指定衰减度鲁棒镇定[1)]

蒋培刚 苏宏业 褚 健

(浙江大学先进控制技术研究所，工业控制技术国家重点实验室 杭州 310027)

(E-mail: pgjiang@iipc.zju.edu.cn)

摘 要 研究了一类线性不确定时滞系统时滞依赖型具有指定衰减度的无记忆状态反馈鲁棒镇定问题. 所考虑的线性不确定时滞系统含有时变未知但有界的不确定参数和状态滞后. 通过应用 Razumikhin 定理和 Lyapunov 定理，导出了系统鲁棒稳定且具有指定衰减度的判据和具有指定衰减度的无记忆状态反馈鲁棒镇定控制律存在的充分条件及相应的控制器设计方法. 所得时滞相关的结果用一组线性矩阵不等式(LMI)表示.

关键词 线性不确定时滞系统，衰减度，无记忆状态反馈，线性矩阵不等式(LMI)，鲁棒镇定.

ROBUST STABILIZATION WITH DEFINITE ATTENUANCE OF LINEAR UNCERTAIN TIME-DELAY SYSTEMS

JIANG Peigang SU Hongye CHU Jian

(Institute of Advanced Process Control and National Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract The problem of robust stabilization with definite attenuance for a class of linear uncertain time-delay systems is considered in this paper. The systems under consideration include time-varying unknown-but-bounded uncertain parameters and time-delay in state. A criterion of robust stability with definite attenuance and the method of designing a state feedback controller guaranteeing the system robust stable with definite attenuance are derived. The results depend on the size of delay and are given in terms of linear matrix inequalities.

Key words Linear uncertain time-delay systems, attenuance, memoryless state feedback, linear matrix inequality, robust stabilization.

---

1) 国家自然科学基金资助项目(NSFC: 69604006).

收稿日期 1998-09-28 收修改稿日期 2000-02-25

1 引言

近年来,线性不确定时滞系统的鲁棒镇定问题由于其具有重要的理论和实际意义而得到了广泛关注[1~4]. 文献[1,2]的结果是时滞独立的,要求系统的时滞变化率小于1,使得该方法无法适用于时滞变化率未知的情况,文献[3,4]的结果是时滞依赖的对时滞变化律没有要求. 文献[1~3]的结果都以 Riccati 方程的形式给出,其求解都牵涉到多个标量及正定对称矩阵的整定问题,而文献[4]中的结果以线性矩阵不等式的形式给出,避免了标量和对称正定矩阵的整定问题.

尽管对线性不确定时滞系统的鲁棒稳定性分析及鲁棒镇定问题已有了许多结果,但对实际应用来说,仅仅保证系统鲁棒稳定是不够的,往往在保证系统稳定的同时还要求系统的动态响应满足一定的性能指标,然而未见有关这方面的结果. 本文引入衰减度的概念,得到了一类线性不确定时滞系统鲁棒稳定,且具有指定衰减度的判据和具有指定衰减度状态反馈鲁棒镇定控制律存在的充分条件,及相应的控制器设计方法. 所得时滞依赖的结果以线性矩阵不等式的形式给出. 该方法具有适用面广、保守性低、容易求解等优点.

2 系统描述及定义

考虑如下线性不确定时滞系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + \Delta A(t))\boldsymbol{x}(t) + (A_1 + \Delta A_1(t))\boldsymbol{x}(t - d(t)) + (B + \Delta B(t))\boldsymbol{u}(t), \quad (1)$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是状态;$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 是控制输入;A,A_1,B 是已知的定常矩阵;矩阵 $\Delta A(\cdot)$, $\Delta A_1(\cdot)$和,$\Delta B(\cdot)$表示系统的时变不确定参数,假设其具有如下形式:

$$[\Delta A(t) \quad \Delta B(t)] = H_1F_1(t)[E_1 \quad E_3], \Delta A_1(t) = H_2F_2(t)E_2, \quad (2)$$

其中 $H_i,E_j,i=1,2,j=1,2,3$是已知的具有恰当维数的实定常矩阵,$F_i(t)\in R^{s_i\times q_i},i=1,2$ 是满足 $F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t)\leqslant I,i=1,2$的未知实时变矩阵;$d(t)$是时变未知的状态滞后,假设其为有界且存在正实数 τ 满足

$$0\leqslant d(t)\leqslant \tau, \quad t\geqslant 0. \quad (3)$$

为简便起见,记 $A(t)=A+\Delta A(t)$,$A_1(t)=A_1+\Delta A_1(t)$,$B(t)=B+\Delta B(t)$.

定义1. 称系统(1)~(3)是衰减度 $\lambda(\lambda>0)$鲁棒稳定的,如果状态为 $\boldsymbol{z}(t)=e^{\lambda t}\boldsymbol{x}(t)$,$\lambda>0$的系统对所有满足(2)式的不确定参数仍是渐近稳定的. 称不确定时滞系统(1)~(3)是衰减度 $\lambda(\lambda>0)$鲁棒可镇定的,如果存在状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}(t)=K\boldsymbol{x}(t)$使得闭环系统是衰减度 $\lambda(\lambda>0)$鲁棒稳定的.

3 主要结果

定理1. 给定标量 τ 满足(3),$\lambda(\lambda>0)$,系统(1)~(3)是衰减度 $\lambda(\lambda>0)$鲁棒稳定的,如果存在正定对称矩阵 X,P_1,P_2和正标量 $\alpha_i,\beta_i,\varepsilon$ 满足下面的 LMI:

$$\begin{bmatrix} S & M_1 & M_2 \\ M_1^{\mathrm{T}} & -N_1 & 0 \\ M_2^{\mathrm{T}} & 0 & -N_2 \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} X & e^{i\lambda\tau}XA_{i-1}^{\mathrm{T}} & e^{i\lambda\tau}XE_i^{\mathrm{T}} \\ e^{i\lambda\tau}A_{i-1}X & P_i - \beta_iH_iH_i^{\mathrm{T}} & 0 \\ e^{i\lambda\tau}E_iX & 0 & \beta_i \end{bmatrix} \geqslant 0, i = 1,2, \quad (4)$$

其中 $M_1=[XE_1^{\mathrm{T}}\quad XE_2^{\mathrm{T}}],N_1=\mathrm{diag}(\alpha_1 I,\alpha_2 I),A_0=A,$

$$M_2=\tau A_1(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}\quad N_2=\tau[\varepsilon I-E_2(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}],$$

$$S=2\lambda X+AX+XA^{\mathrm{T}}+A_1X+XA_1^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i H_i H_i^{\mathrm{T}}+\tau\varepsilon H_2H_2^{\mathrm{T}}+\tau A_1(P_1+P_2)A_1^{\mathrm{T}}+2\tau X.$$

证明. 取变换后系统的 Lyapunov 函数为 $V(\boldsymbol{z}(t),t)=\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{z}(t),P=P^{\mathrm{T}}>0$,考虑到 $\boldsymbol{x}(t-d(t))=\boldsymbol{x}(t)-\int_{-d(t)}^{0}\dot{\boldsymbol{x}}(t+s)\mathrm{d}s$, 则有

$$\dot V(\boldsymbol{z}(t),t)=[\lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{x}(t)+e^{\lambda t}\dot{\boldsymbol{x}}(t)]^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)P[\lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{x}(t)+e^{\lambda t}\dot{\boldsymbol{x}}(t)]=$$
$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\{[\lambda I+A(t)+A_1(t)]^{\mathrm{T}}P+P[\lambda I+A(t)+A_1(t)]\}\boldsymbol{z}(t)-$$
$$2\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)P\int_{-d(t)}^{0}A_1(t)[e^{-\lambda s}A(t+s)\boldsymbol{z}(t+s)+e^{\lambda(d(t)-s)}A_1(t+s)\boldsymbol{z}(t-d(t)+s)]\mathrm{d}s.$$

假设存在正定对称矩阵 P_1,P_2和标量 $\varepsilon>0$满足不等式(5)

$$\varepsilon I-E_2(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}>0,\forall\ t\geqslant 0,\tag{5}$$

应用文献[4]的引理1及引理2(b),可得

$$\dot V(\boldsymbol{z}(t),t)\leqslant \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\{(\lambda I+A+A_1)^{\mathrm{T}}P+P(\lambda I+A+A_1)+\alpha_1PH_1H_1^{\mathrm{T}}P+$$
$$\alpha_2PH_2H_2^{\mathrm{T}}P+\sum_{i=1}^{2}(1/\alpha_i)E_i^{\mathrm{T}}E_i+P[A_1(P_1+P_2)A_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon H_2H_2^{\mathrm{T}}+$$
$$A_1(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}[\varepsilon I-E_2(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}]^{-1}E_2(P_1+P_2)A^{\mathrm{T}}]P\}\boldsymbol{z}(t)+$$
$$\int_{-d(t)}^{0}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t+s)e^{-\lambda s}A^{\mathrm{T}}(t+s)P_1^{-1}A(t+s)e^{-\lambda s}\boldsymbol{z}(t+s)\mathrm{d}s+$$
$$\int_{-d(t)}^{0}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t-d(t)+s)e^{\lambda(d(t)-s)}A_1^{\mathrm{T}}(t+s)P_2^{-1}A_1(t+s)e^{\lambda(d(t)-s)}\boldsymbol{z}(t-d(t)+s)\mathrm{d}s.\tag{6}$$

假设存在标量 $\beta_i>0,i=1,2$使得下面的不等式(7)～(9)满足:

$$e^{\lambda\tau}A^{\mathrm{T}}(P_1-\beta_1H_1H_1^{\mathrm{T}})^{-1}Ae^{\lambda\tau}+\beta_1^{-1}e^{\lambda\tau}E_1^{\mathrm{T}}E_1e^{\lambda\tau}\leqslant P,\tag{7}$$
$$e^{2\lambda\tau}A_1^{\mathrm{T}}(P_2-\beta_2H_2H_2^{\mathrm{T}})^{-1}A_1e^{2\lambda\tau}+\beta_2^{-1}e^{2\lambda\tau}E_2^{\mathrm{T}}E_2e^{2\lambda\tau}\leqslant P,\tag{8}$$
$$P_1-\beta_1H_1H_1^{\mathrm{T}}>0,P_2-\beta_2H_2H_2^{\mathrm{T}}>0,\tag{9}$$

则应用文献[4]中的引理2(c),可得

$$e^{\lambda\tau}A^{\mathrm{T}}(t+s)P_1^{-1}A(t+s)e^{\lambda\tau}\leqslant P,e^{2\lambda\tau}A_1^{\mathrm{T}}(t+s)P_2^{-1}A_1(t+s)e^{2\lambda\tau}\leqslant P.$$

由 $-\tau\leqslant -d(t)\leqslant s\leqslant 0$,则有

$$e^{-\lambda s}A^{\mathrm{T}}(t+s)P_1^{-1}A(t+s)e^{-\lambda s}\leqslant P,e^{\lambda(d(t)-s)}A_1^{\mathrm{T}}(t+s)P_2^{-1}A_1(t+s)e^{\lambda(d(t)-s)}\leqslant P.\tag{10}$$

为应用 Razumikhin 定理[3],假设存在实常数 $q>1$使得 $V(\boldsymbol{z}(s),s)\leqslant qV(\boldsymbol{z}(t),t),t-2\tau\leqslant s\leqslant t$,对式(6)应用式(10),并引入新变量 $X=P^{-1}$,则可得

$$\dot V(\boldsymbol{z}(t),t)\leqslant \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)PW_1P\boldsymbol{z}(t),$$
$$W_1=X(\lambda I+A+A_1)^{\mathrm{T}}+(\lambda I+A+A_1)X+\alpha_1H_1H_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2H_2H_2^{\mathrm{T}}+$$
$$(1/\alpha_1)XE_1^{\mathrm{T}}E_1X+(1/\alpha_2)XE_2^{\mathrm{T}}E_2X+\tau[A_1(P_1+P_2)A_1^{\mathrm{T}}+\varepsilon H_2H_2^{\mathrm{T}}+$$
$$A_1(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}[\varepsilon I-E_2(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}]^{-1}E_2(P_1+P_2)A_1^{\mathrm{T}}]+2q\tau X.\tag{11}$$

显然,W_1对 q,τ 是单调增的. 如果令 $W=W_1$其中 $q=1$,则 $W<0$能保证存在一个充分小的 $q>1$ 使得 $W_1<0$,即 $\dot V(\boldsymbol{z}(t),t)<0$. 则由 Razumikhin 定理可知变换后的系统是渐近稳定的,即原开环系统是衰减度 λ 鲁棒稳定的. 最后,由 Schur 引理[4]可知 LMI(4)等价于 $W<0$及假设(5),(7)～(9).

由定理1可得系统指定衰减度鲁棒可镇定的充分条件及相应的控制器设计方法.

定理2. 给定标量 τ 满足(3)，$\lambda(\lambda>0)$，系统(1)～(3)是衰减度 λ 鲁棒可镇定的，如果存在正定对称矩阵 X,P_1,P_2，任意矩阵 Y 和正标量 $\alpha_i,\beta_i,\varepsilon$ 满足以下的LMI：

$$\begin{bmatrix} S & M_1 & M_2 \\ M_1^{\mathrm{T}} & -N_1 & 0 \\ M_2^{\mathrm{T}} & 0 & -N_2 \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} X & e^{i\lambda\tau}S_i^{\mathrm{T}} & e^{i\lambda\tau}T_i^{\mathrm{T}} \\ e^{i\tau}S_i & P_i-\beta_i H_i H_i^{\mathrm{T}} & 0 \\ e^{i\lambda\tau}T_i & 0 & \beta_i \end{bmatrix} \geqslant 0, i=1,2, \tag{12}$$

其中

$$M_1=[XE_1^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}}E_3^{\mathrm{T}} \quad XE_2^{\mathrm{T}}], N_1=\mathrm{diag}(\alpha_1 I,\alpha_2 I), S_1=AX+BY, S_2=A_1X,$$

$$M_2=\tau A_1(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}, N_2=\tau[\varepsilon I-E_2(P_1+P_2)E_2^{\mathrm{T}}], T_1=E_1X+E_3Y, T_2=E_2X,$$

$$S=2\lambda X+AX+XA^{\mathrm{T}}+A_1X+XA_1^{\mathrm{T}}+BY+Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+$$

$$\alpha_1H_1H_1^{\mathrm{T}}+\alpha_2H_2H_2^{\mathrm{T}}+\tau\varepsilon H_2H_2^{\mathrm{T}}+\tau A_1(P_1+P_2)A_1^{\mathrm{T}}+2\tau X;$$

且 $\boldsymbol{u}(t)=YX^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ 就是一个使得闭环系统鲁棒稳定且具有指定衰减度 $\lambda(\lambda>0)$ 的无记忆状态反馈控制律.

证明. 引入状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}(t)=K\boldsymbol{x}(t)$，则闭环系统可写为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[A_c+H_1F_1(t)E_c]\boldsymbol{x}(t)+(A_1+H_2F_2(t)E_2)\boldsymbol{x}(t-d(t)), \tag{13}$$

其中 $A_c=A+BK, E_c=E_1+E_3K$，对闭环系统应用定理1，并注意到 $K=YX^{-1}$，则可得定理2.

4 结论

本文研究了一类线性不确定时滞系统指定衰减度鲁棒稳定性分析及鲁棒镇定问题. 给出了基于LMI的鲁棒稳定性判据和状态反馈鲁棒镇定控制律的设计方法. 所得的控制器保证闭环系统鲁棒稳定且具有指定的衰减速度，保证了一定的瞬态性能指标.

参 考 文 献

1 Shen J C, Chen B, Kung F C. Memoryless stabilization of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach. *IEEE Trans. AC.*, 1991, **AC-37**(9):1022～1025

2 Choi H H, Chung M J. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time-varying delayed states and controls. *Automatica*, 1995, **31**(10):1349～1351

3 Su T H. Further results on the robust stability of linear systems with a single time delay. *Syst. & Contr. Letter*, 1994, **23**(2):375～379

4 Li X, C E de Souza. Criteria for robust stability of uncertain linear systems with time-varying state delays. In: Proc. 13th IFAC World Congr., San Francisco:CA, 1996. 137～142

蒋培刚 1976年生. 1996年毕业于西安交通大学自动控制系，现为浙江大学先进控制技术研究所博士研究生. 研究方向为鲁棒控制、时滞系统控制.

苏宏业 1969年生. 1990年毕业于南京化工大学，1995年获浙江大学工业自动化专业博士学位，现为浙江大学先进控制技术研究所副教授. 研究方向为鲁棒控制、非线性控制、时滞系统控制和PID自整定理论.

褚 健 1963年生. 1982年毕业于浙江大学化工系，1989年获日本京都大学工学博士学位. 1993年被聘为浙江大学教授，博士生导师. 研究方向为时滞系统控制、非线性控制、鲁棒控制.