第26卷 第5期
2000年9月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 26, No. 5
Sep., 2000

短文

不确定离散广义系统的鲁棒 H_∞ 控制

徐胜元 牛玉刚 杨成梧
(南京理工大学动力工程学院 南京 210094)

摘 要 考虑不确定离散广义系统的鲁棒 H_∞ 控制问题，目的是设计状态反馈控制律，使得对所有容许的不确定参数，闭环系统正则、因果、稳定且满足给定的 H_∞ 性能指标，本文给出了鲁棒 H_∞ 状态反馈控制律的存在条件及其代数表达式.

关键词 不确定离散广义系统，鲁棒 H_∞ 控制，状态反馈.

ROBUST H_∞ CONTROL FOR UNCERTAIN DISCRETE SINGULAR SYSTEMS

XU Shengyuan NIU Yugang YANG Chengwu
(810 *Division, School of Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing* 210094)

Abstract In this paper, the problem of robust H_∞ control for uncertain discrete singular systems is considered. The parameter uncertainty is assumed to be time-invariant entering both the state and input matrices. The problem we address is to design state feedback controllers such that the resulting closed-loop system is regular, causal, stable as well as satisfying a prescribed H_∞ norm bound constraint for all admissible uncertainties. The conditions for the existence of desired state feedback controllers are given and the algebraic expression of expected controllers is proposed.

Key words Uncertain discrete singular systems, robust H_∞ control, state feedback.

1 引言

目前连续广义系统 H_∞ 控制问题的研究已取得了一定的进展，许多有关正常系统 H_∞ 控制的研究成果被相继成功地推广到了广义系统[1~3]. 但是，对离散广义系统来说，其 H_∞ 控制问题的研究涉及较少. 另一方面，考虑在实际应用中，系统的参数扰动总是不可避免的. 本文研究不确定离散广义系统的鲁棒 H_∞ 控制问题，目的是要设计状态反馈控制律，

收稿日期 1998-11-26 收修改稿日期 1999-12-16

使得对所有容许的不确定参数,闭环系统正则、因果、稳定且满足给定的 H_∞性能指标;本文利用矩阵不等式,得到了所考虑不确定离散广义系统鲁棒 H_∞状态反馈控制律的存在条件及其代数表达式.

2 定义及问题描述

引入如下记号:$C,R^n,R^{n\times n}$分别表示复数集,实 n 维向量集及实 $n\times n$ 维矩阵集;$\lambda(M)$ 与 $\lambda_{\max}(M)$分别表示矩阵 M 的特征值及最大特征值;M^* 表示矩阵 M 的共轭转置;M^T 表示矩阵 M 的转置;$X>Y(X\geqslant Y)$表示 X-Y 是正定阵(半正定阵),其中 X,Y 是适维对称阵. $\|G(z)\|_\infty=\sup\limits_{\omega\in[0,2\pi]}\sigma_{\max}[G(e^{j\omega})]$,这里 $\sigma_{\max}$表示矩阵的最大奇异值.

考虑如下不确定离散广义系统

$$Ex(k+1)=(A+\Delta A)x(k)+(B+\Delta B)u(k)+B_1\omega(k), \tag{1a}$$

$$z(k)=Cx(k)+Du(k), \tag{1b}$$

其中 $x(k)\in R^n,u(k)\in R^l,\omega(k)\in R^m,z(k)\in R^s$ 分别是系统的状态向量,控制输入向量,干扰输入向量及被控输出向量;$E\in R^{n\times n}$且 $\mathrm{rank}E=d\leqslant n$;$A,B,B_1,C,D$ 是已知的适维阵,$\Delta A,\Delta B$ 表示系统的时不变参数扰动,并假定具有以下形式

$$(\Delta A\quad \Delta B)=MF(N_a\quad N_b), \tag{2}$$

其中 M,N_a,N_b 为适维已知矩阵;$F\in R^{j\times k}$是未知的定常矩阵函数,且 F 满足

$$F^TF\leqslant I, \tag{3}$$

这里 I 是适维单位阵;称满足上述条件的不确定性 $\Delta A,\Delta B$ 是容许的.

考虑如下的离散广义系统

$$Ex(k+1)=Ax(k). \tag{4}$$

定义1[4]. 若存在 $s\in C$,使得 $\det(sE-A)\neq 0$. 则称离散广义系统(4)是正则的.

定义2[4]. 若离散广义系统(4)正则,且 $\deg(\det(sE-A))=\mathrm{rank}E$,则称(4)是因果的.

定义3[4]. 若离散广义系统(4)正则,且对任取 $s\in\sigma(E,A)$都有 $|s|<1$,则称(4)是稳定的,这里 $\sigma(E,A)=\{s\,|\det(sE-A)=0,s\in C\}$.

对不确定离散广义系统(1)作如下的状态反馈

$$u(k)=Gx(k), \tag{5}$$

得闭环系统为

$$Ex(k+1)=A_cx(k)+B_1\omega(k),\quad z(k)=C_cx(k), \qquad (6a),(6b)$$

其中 $A_c=A+BG+MF(N_a+N_bG)$,$C_c=C+DG$.

本文所考虑的不确定离散广义系统(1)的鲁棒 H_∞控制问题是:寻求状态反馈控制律(5)使得闭环系统(6)满足

Ⅰ)当 $\omega(k)=0$时,对所有容许的不确定参数 $\Delta A,\Delta B$,(6a)正则、因果且稳定;

Ⅱ)$\|G(z)\|_\infty<\gamma$,这里 $G(z)=C_c(zE-A_c)^{-1}B_1$,γ 是给定的正常数.

假设1. $D^T[C,D]=[0,I]$.

注1. 在正常系统的 H_∞控制问题中,上面假设是平凡的[5—7]

3 主要结论及证明

引理1. 离散广义系统(4)正则、因果且稳定的充要条件是:存在矩阵 $P\in R^{n\times n}$,且 $P=P^{\mathrm{T}}$,使得以下两不等式同时成立.

$$E^{\mathrm{T}}PE\geqslant 0,\quad A^{\mathrm{T}}PA-E^{\mathrm{T}}PE<0. \tag{7),(8}$$

而且,满足(7),(8)式的 P 是可逆的.

定理1. 对不确定离散广义系统(1),若存在状态反馈(5)及可逆对称阵 $P\in R^{n\times n}$,使得

$$E^{\mathrm{T}}PE\geqslant 0,\quad A_c^{\mathrm{T}}PA_c-E^{\mathrm{T}}PE+C_c^{\mathrm{T}}C_c+A_c^{\mathrm{T}}PB_1U^{-1}B_1^{\mathrm{T}}PA_c<0, \tag{9),(10}$$

对所有容许的不确定参数 $\Delta A,\Delta B$ 都成立,其中 $U=\gamma^2I-B_1^{\mathrm{T}}PB_1>0$,则闭环系统(6)满足Ⅰ),Ⅱ).

引理2. 若 $P,Q\in R^{n\times n}$是对称可逆阵,M 是适维阵,则 $Q-M^{\mathrm{T}}PM$ 可逆的充要条件是 $P^{-1}-MQ^{-1}M^{\mathrm{T}}$ 可逆.

证明. 只需注意到 $Q-M^{\mathrm{T}}PM$ 可逆的充要条件是$\begin{bmatrix}P^{-1} & M\\ M^{\mathrm{T}} & Q\end{bmatrix}$可逆,即可得证.

引理3. 若 $F^{\mathrm{T}}F\leqslant I$,对称阵 $P\in R^{n\times n}$可逆,$P^{-1}-\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}}$可逆,且存在可逆对称阵 $Q\in R^{j\times j}$使得 $Q-M^{\mathrm{T}}LM>0$,则

$$\begin{aligned}&[A+BG+MF(N_a+N_bG)]^{\mathrm{T}}L[A+BG+MF(N_a+N_bG)]\leqslant\\ &(A+BG)^{\mathrm{T}}(L^{-1}-MQ^{-1}M^{\mathrm{T}})^{-1}(A+BG)+\delta(N_a+N_bG)^{\mathrm{T}}(N_a+N_bG),\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $L=(P^{-1}-\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}})^{-1}$. $\delta=|\lambda_{\max}(Q)|$.

鲁棒 H_∞状态反馈控制律的存在条件及其代数表达式.

定理2. 对不确定离散广义系统(1),若 $\gamma^2I-B_1^{\mathrm{T}}PB_1>0$,且存在常数 $\alpha>0$及可逆对称阵 $Q\in R^{j\times j}$使得 $Q-M^{\mathrm{T}}LM>0,Z=B^{\mathrm{T}}HB+\delta N_b^{\mathrm{T}}N_b+(\alpha+1)I>0$,且

$$A^{\mathrm{T}}HA+\delta N_a^{\mathrm{T}}N_a-(B^{\mathrm{T}}HA+\delta N_b^{\mathrm{T}}N_a)^{\mathrm{T}}Z^{-1}(B^{\mathrm{T}}HA+\delta N_b^{\mathrm{T}}N_a)+C^{\mathrm{T}}C-E^{\mathrm{T}}PE<0, \tag{12}$$

则式(1)的鲁棒 H_∞控制问题可解;而且,在此情形下,鲁棒 H_∞状态反馈控制律可取为

$$\boldsymbol{u}(k)=-Z^{-1}(B^{\mathrm{T}}HA+\delta N_b^{\mathrm{T}}N_a)\boldsymbol{x}(k), \tag{13}$$

其中 $L=(P^{-1}-\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}})^{-1},H=(L^{-1}-MQ^{-1}M^{\mathrm{T}})^{-1}$.

证明. 首先由 $\gamma^2I-B_1^{\mathrm{T}}PB_1>0$并利用引理2可得 $P^{-1}-\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}}$可逆,进一步注意到

$$(P^{-1}-\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}})^{-1}=P+PB_1(\gamma^2I-B_1^{\mathrm{T}}PB_1)^{-1}B_1^{\mathrm{T}}P.$$

于是,由式(12),定理1及引理3,不难验证,当状态反馈控制律取为(13)时,闭环系统满足Ⅰ),Ⅱ),由此即得到证明.

4 数值例子

考虑不确定离散广义系统(1)及设计要求Ⅰ),Ⅱ),其中 $E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},N_a=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},N_b=\begin{bmatrix}0.5\\ 0.5\end{bmatrix},\gamma=1$,则不

难验证,当取 $P=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$,$Q=\begin{bmatrix}2.5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$及 $\alpha=1$时,定理2中所述诸不等式成立,于是由式(13)即可给出鲁棒 H_∞状态反馈控制律为 $\boldsymbol{u}(k)=[-0.45\quad 0.18]\boldsymbol{x}(k)$. 可以验证上述控制律满足设计要求Ⅰ),Ⅱ).

5 结论

本文考虑了不确定离散广义系统的鲁棒 H_∞控制问题;利用矩阵不等式,得到了鲁棒 H_∞状态反馈控制律的存在条件及其代数表达式;分析表明,所得的状态反馈控制律保证对所有容许的不确定参数,闭环系统正则、因果、稳定且满足给定的 H_∞性能指标;进一步要研究的问题是,当不确定参数是时变的情况下,如何设计状态反馈控制律使闭环系统正则、因果、稳定且满足给定的 H_∞性能指标.

参 考 文 献

1 Takaba K N, Morihara N, Katayama T, H_∞ control for descriptor systems: A J-spectral factorization approach. In: Proc. 33rd IEEE Conf. on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, 1994, 2251～2256

2 Msubuchi I, Kamitane Y, Ohara A, Suda N. H_∞ control for describtor systems: a matrix inequalities approach. *Automatica*, 1997, **33**(4): 669～673

3 Wang H-S, Yung C-F, Chang F-R. Bounded real lemma and H_∞ control for descriptor systems. *IEE Pt. D*, 1998, **145**(3): 316～322

4 Dai L. Singular Control Systems Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin: Springer-Verlag, 1989

5 Xie L, de Souza C E. Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, **37**(8): 1188～1191

6 Xie L, de Souza C E. Robust H_∞ control for linear time-invariant systems with norm-bounded uncertainty in the input matrix. *Systems and Control Letters*, 1990, **14**(3): 389～396

7 Yuan L, Achenic L E K, Jiang W. Robust H_∞ control for linear discrete-time systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Systems and Control Letters*, 1996, **27**(2): 199～208

8 Xu Shengyuan, Yang Chenwu. Stabilization of discrete-time singular systems: A matrix inequalities approach. *Automatica*, 1999, **35**(9): 1613～1617

徐胜元　男,1968年生,博士生. 研究领域:广义系统,自适应控制.

牛玉刚　男,1964年生,博士生. 研究领域:非线性系统,自适应控制,神经网络控制.

杨成梧　男,1936年生,博士生导师. 研究领域:广义系统,高速采样,信号处理.