第27卷　第1期
2001年1月

自　动　化　学　报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 1
Jan., 2001

短文

广义代数 Riccati 方程正解的研究[1)]

张维海
（山东轻工业学院计算机科学技术系　济南　250100）
（E-mail: zwhtl@public.jn.sd.cn）

摘　要　研究一类广义代数 Riccati 方程，该方程在随机控制领域有重要的应用，因而被许多学者所研究. 通过引进能稳性的概念，给出了该方程有唯一正解的一个充分必要条件，所得结果不仅改进了以往的结论，也推广了确定性代数 Riccati 方程的相应性质.

关键词　代数 Riccati 方程，能稳性，Wiener 过程，能观性.

A STUDY ON POSITIVE SOLUTIONS OF GENERALIZED ALGEBRAIC RICCATI EQUATION

ZHANG Wei-Hai
(*Department of Computer Science and Technology, Shandong Institute of Light Industry, Jinan* 250100)
(E-mail: zwhtl@public.jn.sd.cn)

Abstract　We study a kind of generalized algebraic Riccati equation. This equation has many applications in the field of stochastic control, so it has been studied by many authors. By introducing the concept of stabilizability, a sufficient and necessary condition for this equation to have a unique positive solution is given, which not only improves the previous results, but also generalizes the corresponding property of deterministic algebraic Riccati equation.

Key words　Algebraic Riccati equation, stabilizability, Wiener process, observability.

1　引言

本文研究下列形式的广义代数 Riccati 方程(GARE)

$$PA + A'P + \sum_{i=1}^{l}\sigma'_iP\sigma_i - PBN^{-1}B'P + Q = 0, \tag{1}$$

1）山东省自然科学基金资助课题(项目编号 Q99G01).
收稿日期　1999-06-30　　收修改稿日期　2000-05-15

这里 A,B,N 分别为 $n\times n,n\times r,r\times r$ 的常数矩阵,$\sigma_i(i=1,2,\cdots,l)$是 $n\times n$ 常矩阵,$N>0$ 和 $Q\geqslant 0$分别为正定、半正定矩阵,A'表示 A 的转置矩阵,广义代数 Riccati 方程(1)(文献[1]称其为随机代数 Riccati 方程,似有不妥)在随机系统的能稳性、滤波等研究领域有重要应用,它可以看成是下列确定性代数 Riccati(DARE)方程

$$PA + A'P - PBN^{-1}B'P + Q = 0 \tag{2}$$

的一般化.

Wonham[2]最早对方程(1)进行研究,并得到了下述结论.

定理1. 设(A,B)是能稳的,$(Q^{1/2},A)$是能观的,并且有

$$\inf_S\left\|\int_0^\infty e^{t(A-BS)'}\left(\sum_{i=1}^l\sigma'_i\sigma_i\right)e^{t(A-BS)}\mathrm{d}t\right\|<1, \tag{3}$$

则式(1)有唯一的正解 $P>0$,且$(A-BN^{-1}B'P)$是稳定的.(3)式中的范数表示矩阵的谱范数.

Gao 和 Ahmed[1] 在研究随机非线性系统的反馈能稳性时,也研究了方程(1)的正解的存在性条件,他们的结论如下面所述.

定理2. 设(A,B)能控,$(Q^{1/2},A)$能观,另外假设对任何正定矩阵 $M>0$,存在一个一致的常数 $\lambda>0$,使

$$\sum_{i=1}^l\sigma'_iM\sigma_i\leqslant\lambda M \tag{4}$$

成立,则式(1)有唯一的正解 $P>0$,且$(A-BN^{-1}B'P)$是稳定的.

还有其它一些学者对 GARE (1)进行了研究,如文献[3]研究了式(1)的最大解的存在性问题.纵观迄今为止的工作,都是关于正解存在性的一些充分条件,与 DARE (2)的研究成果相比,远远不能令人满意.例如对 DARE (2)有下列结论:

定理3. (见文献[4])设$(Q^{1/2},A)$能观,则 DARE (2) 有唯一的正解 $P>0$的充要条件是(A,B)能稳.这时经过状态反馈 $\boldsymbol{u}(t)=K\boldsymbol{x}(t)=-N^{-1}B'P\boldsymbol{x}(t)$后,闭环系统 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=(A+BK)\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t$ 渐近稳定,即 P 是一个反馈能稳解.

本文将对 GARE (1) 建立类似于定理3的结论,从而完全改进了以往的工作.

2 定义和主要定理

为陈述本文的结论,首先介绍一些定义.考虑随机控制系统

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u})\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^l\sigma_i\boldsymbol{x}\mathrm{d}W_i(t), \tag{5}$$

其中$\{W_i(t):i=1,2,\cdots,l\}$是独立、标准的一维 Wiener 过程,定义于基本的概率空间(Ω,F,P).

定义1. (见文献[5])称随机系统(5)是能稳的,如果存在一个 $r\times n$ 的常矩阵 K,使随机闭环系统

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = (A+BK)\boldsymbol{x}\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^l\sigma_i\boldsymbol{x}\mathrm{d}W_i(t) \tag{6}$$

对任何初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$是均方稳定的,即 $\lim_{t\to\infty}E|\boldsymbol{x}(t)|^2=0$.

为明确起见,当系统(5)是能稳的,我们亦称 $(A,B,\sum_{i=1}^{l}\sigma_i)$ 是能稳的.

定义2. 称 GARE (1) 的对称解 P 是一个反馈能稳解,如果经过状态反馈 $\boldsymbol{u}(t)=K\boldsymbol{x}(t)=-N^{-1}B'P\boldsymbol{x}(t)$,闭环系统

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(A+BK)\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{l}\sigma_i\boldsymbol{x}\mathrm{d}W_i(t)$$

是均方稳定的.

当 $\sigma_i=0(i=1,2,\cdots,l)$时,退化为确定性代数 Riccati 方程反馈能稳解的定义.

定理4. 设$(Q^{1/2},A)$是能观的,则 GARE (1)有唯一正定解的充分必要条件是$(A,B,\sum_{i=1}^{l}\sigma_i)$能稳. 这时如果令 $u(t)=Kx(t)=-N^{-1}B'Px(t)$,则所得闭环系统(6)是均方稳定的,即 P 是一个反馈能稳解.

注1. 定理4给出的是 GARE (1)有正解的充分必要条件,因此它弱于定理1和定理2的条件,其次定理1的结论强于定理 A 和定理 B 的结论,因为闭环系统(6)的均方稳定性蕴涵着$(A+BK)$的稳定性,反之不成立. 见文献[5].

3 定理4的证明

首先给出两个引理:

引理1. 设$(A,B,\sum_{i=1}^{l}\sigma_i)$是能稳的,则 GARE (1)有半正定解 $P\geqslant 0$.

证明. 用类似于文献[6]的方法即可证明该引理,证明从略.

引理2. 设$(Q^{1/2},A)$是能观的,则随机系统

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{l}\sigma_i\boldsymbol{x}\mathrm{d}W_i(t) \tag{7}$$

是均方稳定的充分必要条件,下列 Lyapunov-型方程

$$PA+A'P+\sum_{i=1}^{l}\sigma'_iP\sigma_i=-Q \tag{8}$$

有正解$\overline{P}>0$,

证明. 必要性. 由于系统(7)是稳定的,故对任何 $n\times r$ 的常矩阵 B,都有$(A,B,\sum_{i=1}^{l}\sigma_i)$是能稳的(取反馈增益阵 $K=0$),利用引理1知 GARE(1)有半正定解 $\overline{P}\geqslant 0$,取 $B=0$,即得到方程(8)有半正定解 $P\geqslant 0$. 余下来只要证明在$(Q^{1/2},A)$能观的条件下,有 $\overline{P}>0$即可,这一证明过程与下面定理1的充分性部分的证明是一样的,故在定理1中一并给出证明方法.

充分性. 若式(8)有正解 $\overline{P}>0$,则用标准的配方法可以证明恒等式

$$E\boldsymbol{x}'(t)\overline{P}(t)\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}'(0)\overline{P}(0)\boldsymbol{x}(0)-E\int_0^t\boldsymbol{x}'(s)Q\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s \tag{9}$$

成立,考虑到 Q 半正定,$\overline{P}$ 是正定的,所以 $E\boldsymbol{x}'(t)\overline{P}(t)$关于 t 单调递减有界,其极限必定存在. 这里 $\boldsymbol{x}(t)$是系统(7)对应初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$的解,$\boldsymbol{x}(0)\in R^n$ 是确定性的常向量.

记 $X(t)=E\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}'(t)$,利用 It ô公式,可以证明

$$\dot{X}=AX+XA'+\sum_{i=1}^{l}\sigma_iX\sigma'_i,X(0)=\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{x}(0)'. \tag{10}$$

利用矩阵的 Kronecker 理论，式(10)可写成

$$\dot{\boldsymbol{X}} = (A \otimes I + I \otimes A + \sum_{i=1}^{l} \sigma_i \otimes \sigma_i)\boldsymbol{X}. \tag{11}$$

这里 $\boldsymbol{X}$ 表示把一个方阵的拉长运算，即若 $X=(x_{ij})_{n\times n}$，则

$$\boldsymbol{X} = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}, \cdots, x_{n-1,1}, \cdots, x_{n-1,n}, x_{n1}, \cdots, x_{nn})'.$$

由(11)式可得

$$\boldsymbol{X}(t) = e^{(A\otimes I+I\otimes A+\sum_{i=1}^{l}\sigma_i\otimes\sigma_i)t}\boldsymbol{X}(0), \tag{12}$$

任意给定 $T>0$，今计算 $E\int_0^T \boldsymbol{x}'(s)Q\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s$. 利用(12)式及性质 $\mathrm{Trace}(M'N)=(\boldsymbol{M})'\boldsymbol{N}$，容易算得

$$E\int_0^T \boldsymbol{x}'(s)Q\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s = \int_0^T \mathrm{Trace}(QX(s))\mathrm{d}t = \int_0^T (\boldsymbol{Q})'\boldsymbol{X}(s)\mathrm{d}s =$$

$$\int_0^T (\boldsymbol{Q})' e^{(A\otimes I+I\otimes A+\sum_{i=1}^{l}\sigma_i\otimes\sigma_i)s}\boldsymbol{X}(0)\mathrm{d}s = (\boldsymbol{H})'\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}'(0)H\boldsymbol{x}(0),$$

其中

$$(\boldsymbol{H})' = \int_0^T (\boldsymbol{Q}) e^{(A\otimes I+I\otimes A+\sum_{i=1}^{l}\sigma_i\otimes\sigma_i)s}\mathrm{d}s.$$

今证明 $H>0$. 若不然，可取 $\boldsymbol{x}(0)\neq 0$，使

$$E\int_0^T \boldsymbol{x}'(s)Q\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s = 0, \tag{13}$$

由于 Q 的半正定性，(13)式必将导致

$$Q^{1/2}\boldsymbol{x}(s) \equiv 0, \quad s \in [0,T].$$

从而有

$$Q^{1/2}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^s Q^{1/2}A\boldsymbol{x}(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^s Q^{1/2}\sum_{i=1}^{l}\sigma_i\boldsymbol{x}(\tau)dW_i(\tau) \equiv 0, \tag{14}$$

由(14)式可得

$$Q^{1/2}\boldsymbol{x}(0) = 0, \quad Q^{1/2}A\boldsymbol{x}(\tau) = 0.$$

重复上述步骤可得

$$Q^{1/2}\boldsymbol{x}(0) = 0,\ Q^{1/2}A\boldsymbol{x}(0) = 0, \cdots, Q^{1/2}A^{n-1}\boldsymbol{x}(0) = 0,$$

上式与$(Q^{1/2},A)$的能观性矛盾，故必有 $H>0$.

记

$$V(\boldsymbol{x}(t)) = E\boldsymbol{x}'(t)\overline{P}\boldsymbol{x}(t), \quad t_n = nT,$$

则由单调递减性知

$$V(\boldsymbol{x}(t_{n+1})) \leqslant V(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant V(\boldsymbol{x}(t_n)), t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}. \tag{15}$$

另外容易算得

$$V(\boldsymbol{x}(t_{n+1})) - V(\boldsymbol{x}(t_n)) = -E\int_{nT}^{(n+1)T} \boldsymbol{x}'(s)Q\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s = -E\boldsymbol{x}'(t_n)H\boldsymbol{x}(t_n), \tag{16}$$

因为 $V(\boldsymbol{x}(t))$极限存在，$H>0$，故从(16)式必然得到

$$\lim_{n\to\infty}E|\boldsymbol{x}(t_n)|^2 = 0,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t_n)) = 0,$$

再从(15)式得

$$\lim_{t\to\infty}V(\boldsymbol{x}(t))=0,$$

从而有

$$\lim_{t\to\infty}E|\boldsymbol{x}(t)|^2=0$$

成立,引理最终得证.

注2. 引理2推广了文献[7]的结论,在很多方面都有重要的应用,进一步的研究将另文讨论.

定理1的证明. 设式(1)有正解 $P>0$. 注意到(1)可写成($K=-N^{-1}B'P$)

$$P(A+BK)+(A+BK)'P+\sum_{i=1}^{l}\sigma'_iP\sigma_i=-Q-K'NK=-M'M,$$

因为($Q^{1/2},A$)是能观的,通过简单的讨论,可知($M,A+BK$)也是能观的,根据引理2和定义1,必要性获证.

充分性:由引理1知,GARE (1)有解 $P\geqslant 0$. 今证在定理1的条件下必有 $P>0$. 否则,令 $\Gamma=\mathrm{Ker}(P)$,$\mathrm{Ker}(P)$表示 P 的零空间,则 Γ 是一个非平凡的子空间. 任取$0\neq\xi\in\Gamma$,分别用 ξ',ξ 左乘和右乘(1)式,得到$0\leqslant\sum\limits_{i=1}^{l}(\sigma_i\xi)'P(\sigma_i\xi)=-\xi'Q\xi\leqslant 0$,从而必有 $Q^{1/2}\xi=0$,这导致

$$\Gamma\subset\mathrm{Ker}(Q^{1/2}).\tag{17}$$

再用 ξ 右乘(1)得 $PA\xi=0$,这表示

$$A\Gamma\subset\Gamma.\tag{18}$$

关系式(17),(18)与($Q^{1/2},A$)的能观性矛盾,故必有 $P>0$. 由必要性的证明可知正解 P 是一个反馈能稳解. 余下来只要证明正解 P 的唯一性即可. 不妨假设 GARE(1)有两个正解 P_1,P_2,则 P_1和 P_2均为 GARE(1)的反馈能稳解. 利用标准的配方法,容易证明对任何初值 $\boldsymbol{x}(0)$,在约束(5)下,

$$\inf_{u\in U_{ad}}\mathbf{E}\int_0^\infty(\boldsymbol{x}'Q\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}'N\boldsymbol{u})\mathrm{d}t=\boldsymbol{x}'_0P_1\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}'_0P_2\boldsymbol{x}_0,\tag{19}$$

U_{ad}表示所有 R^r 值、关于滤波 $F_t=\sigma(W_i(s),0\leqslant s\leqslant t,i=1,2,\cdots,l)$可测、适应过程并满足

$$\mathbf{E}\int_0^\infty|\boldsymbol{u}(t)|^2\mathrm{d}t<\infty.$$

因为 $\boldsymbol{x}_0$是任意的,故由(19)式必有 $P_1=P_2$,唯一性得证. 定理1的证明完成.

4　数值例子

例1. 取

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \sigma=\begin{pmatrix}\sqrt{1.09}&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

则($A,\boldsymbol{B},\sigma$)是能稳的(见文献[8]),因此 GARE(I 是单位矩阵)

$$PA+A'P+\sigma'P\sigma-P\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'P=-I\tag{20}$$

有正解 P,但容易验证(3)式是不成立的,因此用定理1无法判断(20)式是否有正解.

例2. 取

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\quad \sigma=\begin{pmatrix}0 & 0\\ n & n\end{pmatrix},$$

则$(A,\boldsymbol{B},\sigma)$是能稳的(见文献[5]),因此GARE

$$PA+A'P+\sigma'P\sigma-P\boldsymbol{BB}'P=-I \tag{21}$$

有正解 P,但(4)式不满足,故用定理2无法判断(21)式是否有正解.

致谢 作者对审稿人提出的宝贵修改意见表示衷心地感谢!

参 考 文 献

1 Gao Z Y, Ahmed N U. Feedback stabilizability of non-linear stochastic system with state-dependent noise. *Int. J. Control*, 1987, **45**(2): 729~737

2 Wonham W M. On a matrix Riccati equation of stochastic control. *SIAM J. Control.*, 1968, **6**(4): 681~697

3 de Souza C E, Fragoso M D. On the existence of maximal solution for generalized algebraic Riccati equations arising in stochastic control. *Systems and Control Letters*, 1990, **14**: 233~239

4 Lewis F L. Optimal control. New York: Wiley, 1986

5 Willems J L, Willems J C. Feedback stabilizability for stochastic system with state and control dependent noise. *Automatica*, 1976, **12**: 277~283

6 张维海,陈叔平. 随机无限时间线性二次最优控制. 浙江大学学报(增刊), 1998, **32**(2): 44~48

7 Zhang Weihai, Yuan Fuyu, Wei Qicai. A Lyapunov-type equation on mean square stability of stochastic systems. 工程数学学报, 1998, **15**(4): 133~134

8 张维海. 无限时间随机L-Q最优控制所导致的代数Riccati方程的研究[博士学位论文]. 杭州:浙江大学, 1998

张维海 1965年生. 1998年于浙江大学获博士学位,现为山东轻工业学院副教授. 主要研究方向为:随机控制理论,估计理论等.