

# 基于神经网络的模型跟随鲁棒 自适应控制<sup>1)</sup>

胡寿松 周 川

(南京航空航天大学自动控制系 南京 210016 E-mail: chuanzhou 1970@ 990. net)

胡维礼

(南京理工大学自动化系 南京 210094)

**摘 要** 针对一类复杂非线性动力学系统,提出一种基于神经网络动态补偿的模型跟随非线性鲁棒自适应控制策略.采用神经网络在线补偿控制器以克服系统的未建模动力学和非线性耦合因素的影响,从而提高了模型跟随控制的动态性能和稳态精度;当系统存在模型不确定性和外部扰动时,其输出仍能精确地跟踪期望参考模型的输出.同时给出了闭环误差系统鲁棒稳定性的证明.应用示例表明,所提方法可保证闭环系统具有良好的跟踪性能和鲁棒性,且算法简单,易于在线控制.

**关键词** 自适应控制,神经网络,模型跟随,动态补偿,鲁棒稳定性.

## MODEL-FOLLOWING ROBUST ADAPTIVE CONTROL BASED ON NEURAL NETWORKS

HU Shousong ZHOU Chuan

(*Department of Automatic Control, Nanjing University of Aeronautics  
and Astronautics, Nanjing 210016*)

HU Weili

(*Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094*)

**Abstract** A novel model-following nonlinear adaptive robust control strategy with neural network dynamic compensation is presented for a class of complex nonlinear systems. A neural network is used as the compensator to eliminate unmodelled dynamics and nonlinear coupling effects. It improves dynamic performance and steady accuracy of the system; even if there exists disturbance, the output of the system can accurately track those of the reference model. Robust stability of the closed-loop system under this control law is proved by Lyapunov theory. Simulation results reveal that this method has good tracking performance and robustness.

1)国家自然科学基金、航空科学重点基金、高校博士点基金及博士后基金资助项目.

Further more, the control algorithm is very simple and efficient and easy for on-line control.

**Key words** Self-adaptive control, neural networks, model-following, dynamic compensation, robust stability.

## 1 引言

近年来,非线性动态系统的自适应控制是一个十分活跃的研究领域<sup>[1,2]</sup>. 基于模型跟随的非线性自适应控制作为一种重要的自适应方案得到了广泛研究<sup>[3]</sup>,它是通过选择合适的参考模型以及控制器前馈增益和反馈增益的自适应机制得以实现的. 但是,模型跟随自适应控制的全局稳定性必须在系统没有建模误差和外部扰动的前提下才能得到保证,而这个严格的条件在实际控制中是难以满足的. 因此,如何设计出对系统的未建模动力学和有界扰动具有鲁棒性的稳定自适应控制律,是模型跟随控制的关键技术.

本文将模型跟随自适应方法与神经网络补偿控制相结合,给出了非线性系统模型跟随控制器参数的稳定自适应规律;采用径向基函数神经网络进行补偿控制器的设计,以消除系统的未建模动力学和外部扰动的影响,从而改善了系统的动态性能和稳态精度. 文中运用李亚普诺夫方法证明了闭环系统的鲁棒稳定性.

## 2 问题描述

考虑多变量仿射型不确定非线性动态系统

$$\dot{x}(t) = [f(x(t)) + \Delta f(x(t))] + G(x(t))u(t) + v(t), \quad (1)$$

其中,  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$ ,  $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T \in R^n$  为非线性函数向量,  $G(x) = [g_{ij}(x)] \in R^{n \times m}$  为控制增益矩阵, 未知非线性函数向量  $\Delta f(x) = [\Delta f_1(x), \Delta f_2(x), \dots, \Delta f_n(x)]^T \in R^n$  表示系统模型的不确定性,  $v(t) \in R^n$  为系统的外部干扰. 如果控制器与系统之间采用零阶保持器, 则系统(1)可由如下非线性离散状态方程描述<sup>[4]</sup>

$$x(k+1) = [A(x(k)) + \Delta A(x(k))]x(k) + B(x(k))u(k) + d(k), \quad (2)$$

其中  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$ , 模型摄动  $\Delta A \in R^{n \times n}$ , 且  $\|\Delta A\| \leq M$ ,  $d(k) \in R^n$  为离散化后的有界干扰向量, 且  $\|d(k)\| \leq d_{\max}$ .

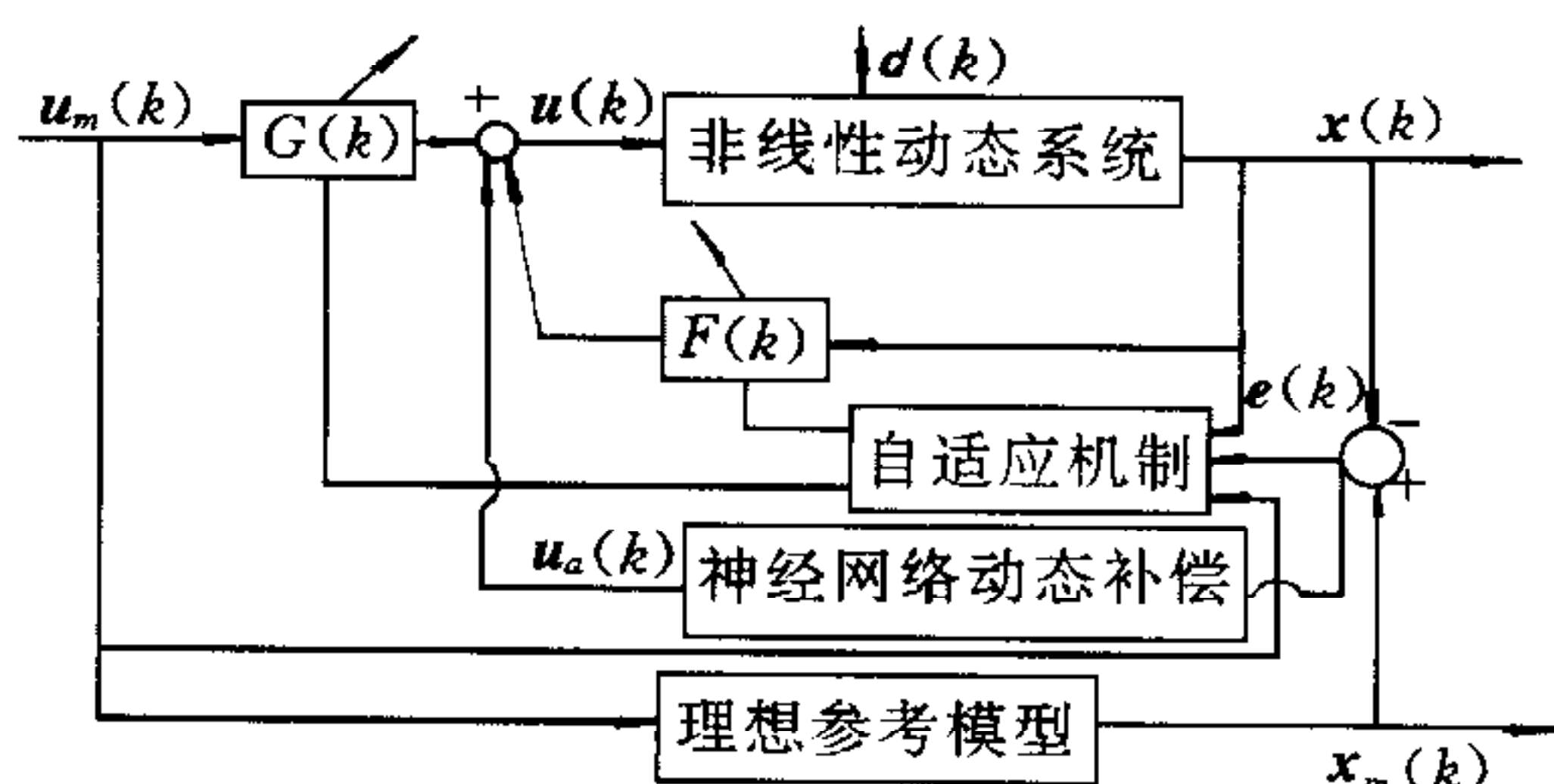


图1 模型跟随非线性自适应控制结构图

选取如下线性状态方程描述的参考模型

$$x_m(k+1) = A_m x_m(k) + B_m u_m(k), \quad (3)$$

式中  $x_m \in R^n$ ,  $A_m \in R^{n \times n}$  为稳定的霍尔维茨矩阵,  $B_m \in R^{n \times m}$ ,  $u_m \in R^m$ . 模型跟随自适应控制的目标在于设计增益调整的自适应机制, 使实际受控非线性系统的输出跟随参考模型的输出, 以达到理想的静、动态特性. 本文基

于神经网络动态补偿的模型跟随非线性自适应控制结构如图1所示.



### 3 非线性系统的模型跟随自适应控制

对于方程(2),若暂不考虑模型的不确定性和外部干扰的影响,即  $\Delta A=0, \mathbf{d}(k)=0$ , 则系统的离散非线性状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = A(\mathbf{x}(k))\mathbf{x}(k) + B(\mathbf{x}(k))\mathbf{u}(k). \quad (4)$$

由图1可知,系统的自适应控制具有前馈增益阵  $G(k)$ 、反馈增益阵  $F(k)$  和补偿控制  $\mathbf{u}_a(k)$ . 若暂不考虑神经网络补偿控制项的作用,则系统的控制输入为

$$\mathbf{u}(k) = F(k)\mathbf{x}(k) + G(k)\mathbf{u}_m(k). \quad (5)$$

将该控制作用于系统(4),可得系统的闭环状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = [A(\mathbf{x}(k)) + B(\mathbf{x}(k))F(k)]\mathbf{x}(k) + B(\mathbf{x}(k))G(k)\mathbf{u}_m(k). \quad (6)$$

定义闭环跟踪误差  $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}_m(k) - \mathbf{x}(k)$ , 由式(2), (3)得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(k+1) &= \mathbf{x}_m(k+1) - \mathbf{x}(k+1) \\ &= A_m\mathbf{e}(k) - B(\mathbf{x})[F - \bar{F}]\mathbf{x}(k) - B(\mathbf{x})[G - \bar{G}]\mathbf{u}_m(k), \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\bar{F} = (B^T B)^{-1} B^T (A_m - A)$ ,  $\bar{G} = (B^T B)^{-1} B^T B_m$ . 若  $F = \bar{F}, G = \bar{G}$ , 则可实现完全模型跟随

$$\mathbf{e}(k+1) = A_m\mathbf{e}(k). \quad (8)$$

如果  $A_m$  的特征值在单位圆内, 则当  $k \rightarrow \infty$  时, 闭环跟踪误差将收敛到零. 定义  $\theta = [\theta_1, \theta_2]$ , 且  $\theta_1 = F - \bar{F}, \theta_2 = G - \bar{G}$ , 则式(7)的误差方程可写为

$$\mathbf{e}(k+1) = A_m\mathbf{e}(k) - B(\mathbf{x})\theta(k)\mathbf{r}(k), \quad (9)$$

其中  $\mathbf{r}(k) = [\mathbf{x}^T(k), \mathbf{u}_m^T(k)]^T \in R^{n+m}$ .

**定义1**<sup>[5]</sup>. 如果存在一致紧集  $S \subset R^n$ , 对所有  $x_0 \in S$ , 存在  $\epsilon, T(\epsilon, x_0)$ , 使得当  $t \geq t_0 + T$  时,  $\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon$ , 则称平衡状态  $x_e$  一致最终有界.

**引理1**<sup>[5]</sup>. 如果存在正定函数  $V(\mathbf{x}, k)$ , 对紧集  $S \subset R^n$ , 若对某个正常数  $\sigma, \{\mathbf{x}: \|\mathbf{x}\| < \sigma\} \subset S$ , 当  $\|\mathbf{x}\| > \sigma$  时有  $\Delta V(\mathbf{x}, k) < 0$ , 则系统一致有界稳定.

**定理1.** 对于闭环误差系统(9), 如果

$$S = Q - \gamma A_m^T P B P A_m \|\mathbf{r}(k)\|^2 \quad (10)$$

为正定阵, 且满足

$$\lambda_{\min}(S) \|\mathbf{e}\|^2 > \lambda_{\max}(\theta^T B P B \theta \|\mathbf{r}(k)\|^2), \quad (11)$$

其中  $P$  为李亚普诺夫方程  $A_m^T P A_m - P = -Q$  的正定对称解,  $Q$  为正定阵,  $\gamma$  为大于零的常数, 表示调整步长,  $\lambda_{\min}(\cdot), \lambda_{\max}(\cdot)$  分别表示矩阵的最小和最大特征值, 则采用如下参数调整自适应律

$$\theta_i(k+1) = \theta_i(k) + \gamma P A_m \mathbf{e}(k) \mathbf{r}_i^T(k) \quad (12)$$

可保证闭环误差系统(9)一致有界稳定.

**证明.** 定义正定的李亚普诺夫函数

$$V(k) = \mathbf{e}^T(k) P \mathbf{e}(k) + \gamma^{-1} \text{Tr} \sum_{i=1}^2 \theta_i^T(k) B \theta_i(k), \quad (13)$$

则李亚普诺夫函数的增量为

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k). \quad (14)$$

将式(9),(12),(13)代入方程(14)可得

$$\Delta V(k) = -e^T(k)Se(k) + r^T(k)\theta^T(k)B^T PB\theta(k)r(k). \quad (15)$$

因为  $Q, S$  均为正定阵,再由式(10),(11)的充分条件可得  $\Delta V(k) < 0$ ,又因  $\|e\| > [\lambda_{\max}(\theta^T B P B \theta \|r(k)\|^2) / \lambda_{\min}(S)]^{1/2}$ ,由引理1知,误差  $e(k)$  一致最终有界,即原闭环系统(9)一致有界稳定.

注记.在定理1中,必须合适地选择正定阵  $Q$  和步长  $\gamma$ ,以保证  $S$  为正定阵并且不等式(11)成立.

进行上述控制律设计时未考虑系统的不确定性因素,因此存在对模型误差和外部扰动鲁棒性差的缺点.

## 4 带神经网络动态补偿的鲁棒模型跟随自适应控制

### 4.1 RBF 神经网络控制器的结构与性质

引理2<sup>[5]</sup>.若  $\phi(x)$  为有界单调递增连续函数,  $C$  为  $R^n$  的紧子集且  $f(x_1, \dots, x_n)$  为  $C$  上的实连续函数,则对任意  $\epsilon > 0$ ,存在整数  $N$  和实常数  $c_i, \sigma_i, w_{ij} (i=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots, n)$ ,对于下式

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^N c_i \phi\left(\sum_{j=1}^n w_{ij} x_j - \sigma_i\right) \quad (16)$$

满足  $\max_{x \in C} |f(x_1, \dots, x_n) - \hat{f}(x_1, \dots, x_n)| < \epsilon$ , 其中  $\sigma_i$  为阈值.

本文的动态补偿控制器采用一个三层 RBF 神经网络来实现,网络第一层为直接输入层;中间隐层由若干节点组成,每个节点包含一个中心;算出网络输入向量与中心之间的欧氏距离,然后经一非线性映射  $\phi(\cdot)$  传递到输出单元.因此整个 RBF 神经网络控制器的输入输出特性为非线性映射  $\hat{f}: R^n \rightarrow R^m$ ,即

$$\hat{f}_i(\bar{x}) = \sum_{j=1}^s w_{ji} \phi(\|\bar{x} - c_j\|, \rho_j), i = 1, 2, \dots, m, \quad (17)$$

其中  $\bar{x} \in R^n$  为输入向量,  $n$  为输入节点个数,  $s, m$  分别为隐层和输出节点数,  $w_{ji}$  为输出层线性组合的权重,宽度  $\rho_j$  为一正标量,  $c_j$  为隐层节点中心,隐层的非线性激活函数  $\phi(\cdot)$  取为正态分布的高斯函数  $\phi(x, \rho) = e^{-x^2/\rho}$ .

假设1. RBF 神经网络的理想权矩阵  $W^*$  和估计权矩阵  $\hat{W}$  均有界,即  $\|W^*\| \leq W_{1\max}$ , 且  $\|\hat{W}\| \leq W_{2\max}$ , 其中  $W_{1\max}, W_{2\max}$  为已知的正常数.

假设2. 在某一紧集上, RBF 神经网络可对任意的有界连续函数  $f(x)$  进行逼近,即

$$f(x) = W^{*T} \phi(x(k)) + \Delta(k), \quad (18)$$

这里  $\Delta(k) \in R^m$  为神经网络的有界近似误差.

事实上,由引理2知  $\phi(\cdot)$  为有界函数,即  $\|\phi(\cdot)\| \leq \phi_{\max}$ , 又由假设1中权矩阵的有界性,可知 RBF 神经网络控制器的输出  $u_a(k) = \hat{W}^T(k) \phi(x(k))$  必定有界,即  $\|u_a(k)\| \leq u_{\max}$ , 其中  $u_{\max}$  为已知的正常数.



## 4.2 基于神经网络动态补偿的鲁棒模型跟随控制及其稳定性分析

由图1可知,作用于系统(2)的控制输入为

$$\mathbf{u}(k) = F(k)\mathbf{x}(k) + G(k)\mathbf{u}_m(k) + \mathbf{u}_a(k), \quad (19)$$

其闭环误差方程为

$$\mathbf{e}(k+1) = A_m\mathbf{e}(k) - B(\mathbf{x})\theta(k)\mathbf{r}(k) - \Delta A(\mathbf{x})\mathbf{x}(k) - B\mathbf{u}_a(k) - \mathbf{d}(k). \quad (20)$$

则该自适应控制增益的自适应调整规律仍保持为

$$\theta_i(k+1) = \theta_i(k) + \gamma P A_m \mathbf{e}(k) \mathbf{r}_i^T(k), \quad (21)$$

而补偿控制项为

$$\mathbf{u}_a(k) = \hat{W}^T(k)\phi(\mathbf{x}(k)), \quad (22)$$

其中神经网络的权重调整采用如下学习算法

$$\hat{W}(k+1) = \hat{W}(k) + \eta P A_m \mathbf{e}(k). \quad (23)$$

式中  $\eta$  为神经网络的学习速率. 定义

$$\bar{S} = Q - A_m^T P B (\gamma \|\mathbf{r}(k)\|^2 + \eta) P A_m \quad (24)$$

为正定阵,且有

$$\lambda_{\min}(\bar{S})\|\mathbf{e}(k)\|^2 \geq \lambda_{\max}(B^T P B)\|\mathbf{u}_a(k)\|^2 + \lambda_{\max}(\theta^T(k)B^T P B\theta(k))\|\mathbf{r}(k)\|^2 + \lambda_{\max}(P)(M^2\|\mathbf{x}(k)\|^2 + d_{\max}^2), \quad (25)$$

其中  $P$  为满足  $A_m^T P A_m - P = -Q$  的正定对称解. 则式(21), (22), (23)构成的控制系统的稳定性由以下定理给出:

**定理2.** 对于式(20)描述的闭环误差系统,若满足充分条件(24), (25), 则采用式(21), (22), (23)的模型跟随自适应控制律可保证闭环误差系统(20)渐近稳定.

证明. 选取正定的李亚普诺夫函数

$$V(k) = \mathbf{e}^T(k)P\mathbf{e}(k) + \text{Tr} \sum_{i=1}^2 \theta_i^T(k)B\gamma^{-1}\theta_i(k) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{\eta} \tilde{\mathbf{w}}_i^T(k)B\tilde{\mathbf{w}}_i(k), \quad (26)$$

其中  $\tilde{\mathbf{w}}_i(k) = \mathbf{w}_i^* - \hat{\mathbf{w}}_i(k)$  为权向量的误差. 类似定理1证明, 由式(20)~(23)可得

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= [A_m\mathbf{e}(k) - B\theta(k)\mathbf{r}(k) - \Delta A\mathbf{x}(k) - B\mathbf{u}_a(k) - \mathbf{d}(k)]^T P [A_m\mathbf{e}(k) \\ &\quad - B\theta(k)\mathbf{r}(k) - \Delta A\mathbf{x}(k) - B\mathbf{u}_a(k) - \mathbf{d}(k)] - \mathbf{e}^T(k)P\mathbf{e}(k) + \\ &\quad \text{Tr} \sum_{i=1}^2 [\theta_i(k) + \gamma P A_m \mathbf{e}(k) \mathbf{r}_i^T(k)]^T B \gamma^{-1} [\theta_i(k) + \gamma P A_m \mathbf{e}(k) \mathbf{r}_i^T(k)] - \\ &\quad \text{Tr} \sum_{i=1}^2 \theta_i^T(k)B\gamma^{-1}\theta_i(k) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{\eta} [\tilde{\mathbf{w}}_i^T(k+1)B\tilde{\mathbf{w}}_i(k+1) - \tilde{\mathbf{w}}_i^T(k)B\tilde{\mathbf{w}}_i(k)] = \\ &\quad - \mathbf{e}^T(k)\bar{S}\mathbf{e}(k) + \mathbf{r}^T(k)\theta^T(k)B^T P B\theta(k)\mathbf{r}(k) + \\ &\quad \mathbf{u}_a^T(k)B^T P B\mathbf{u}_a(k) + \mathbf{x}^T(k)\Delta A^T(\mathbf{x})P\Delta A(\mathbf{x})\mathbf{x}(k) + \mathbf{d}^T(k)P\mathbf{d}(k). \end{aligned}$$

根据充分条件(24), (25), 可得到  $\Delta V(k) < 0$ . 故闭环系统(20)一致有界鲁棒稳定.

## 4.3 神经网络补偿控制算法的收敛性分析

**定理3.** 对于闭环系统(20)和神经网络补偿控制律(22), (23), 定义  $\delta = (2\|\hat{W}\|)/\|P A_m \mathbf{e}(k)\|$ , 如果学习速率满足  $0 < \eta < \delta$ , 则补偿控制律是收敛的.

证明. 若  $\boldsymbol{\varepsilon}(k) = \mathbf{u}_a^*(k) - \mathbf{u}_a(k) = \tilde{\mathbf{w}}^T \phi(\mathbf{x}(k))$ , 定义李亚普诺夫函数  $V(k) = \boldsymbol{\varepsilon}^T(k)\boldsymbol{\varepsilon}(k)/2$ , 由于  $\boldsymbol{\varepsilon}(k+1) = \boldsymbol{\varepsilon}(k) + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}(k) = \boldsymbol{\varepsilon}(k) + [\partial\boldsymbol{\varepsilon}(k)/\partial\hat{W}]^T \Delta\hat{W}$ , 故有

$$\Delta V(k) = \Delta \varepsilon(k) [\varepsilon(k) + \Delta \varepsilon(k)/2] = -\frac{1}{2} \eta \left( \frac{2\|\tilde{w}^T\|}{\|PA_m e(k)\|} - \eta \right) \|PA_m e(k)\|^2 \|\phi(k)\|^2.$$

定义  $\delta = (2\|\tilde{w}\|)/\|PA_m e(k)\|$ , 若学习速率满足  $0 < \eta < \delta$ , 则  $\Delta V(k) < 0$ . 所以神经网络补偿控制律(22), (23)构成的补偿控制算法是收敛的.

## 5 算例

设某歼击机纵向运动方程由如下仿射非线性微分方程描述

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \sin(\theta - \alpha) - D/m \\ q + (mg \cos(\theta - \alpha) - L_0)/mv \\ q \\ QSc(C_{m_0}(\alpha) + C_{mq}(\alpha)Qc/2v)/I_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/m \\ 0 & c(\alpha)/mv \\ 0 & 0 \\ L_1/I_y & X_t/I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_h \\ \delta_T \end{bmatrix}, \quad (27)$$

其中状态变量  $v, \alpha, \theta, q$  分别为歼击机的纵向速度、攻角、俯仰角和俯仰角速度, 控制变量  $\delta_h, \delta_T$  分别为升降舵偏角及推力.  $g$  是重力加速度,  $m$  为飞机质量,  $C_{m_0}(\alpha), C_{mq}(\alpha)$  为气动参数.

针对方程(3), 选取理想参考模型为

$$A_m = \begin{bmatrix} -2.0733 & 0.0651 & 0.0290 & -1.3010 \\ -0.3030 & -0.6850 & 1.0168 & -0.2581 \\ -0.0712 & -0.6580 & -2.8391 & -5.2947 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.0541 & 0 \\ -1.11 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

在模型跟随自适应控制中,  $Q$  阵取为

$$Q = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

从而可求出  $P = \begin{bmatrix} 0.036 & -0.1353 & 0.0153 & 0.1852 \\ -0.1353 & 0.0142 & -0.0538 & -0.1149 \\ 0.0153 & 0.0422 & -0.0538 & -0.1621 \\ 0.1852 & -0.1149 & -0.1621 & -0.7111 \end{bmatrix}.$

其中 RBF 神经网络补偿控制器的结构选为 4-6-2, 即输入节点为 4, 对应输入向量为  $\bar{x}(k) = [e_1(k), e_2(k), e_3(k), e_4(k)]^T$ , 隐层 6 个节点, 输出 2 个节点分别对应控制输出  $u_a(k) = [\Delta \delta_h, \Delta \delta_T]^T$  为飞机舵面的补偿控制量. 在仿真研究中, 取模型摄动  $\Delta A$  为原系统状态阵  $A$  的 10%, 并对系统模型施加了特性为  $d = 0.005 + 0.01 \sin(2t)$  的扰动, 仿真结果如图 2 所示. 图中实线为参考模型输出, 虚线为加入神经网络补偿的模型跟随自适应控制响应曲线.

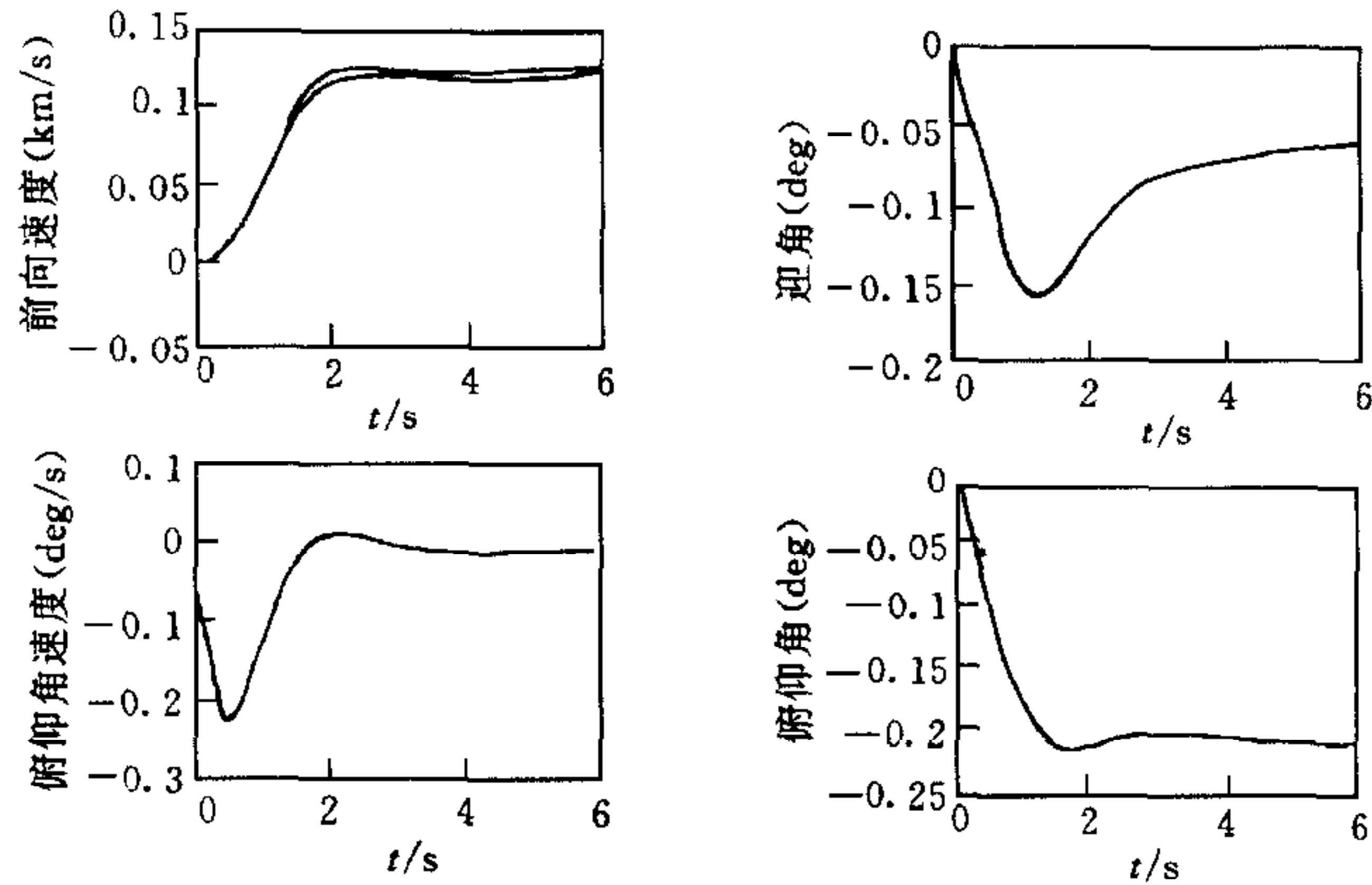


图2 加入神经网络补偿的模型跟随控制响应

### 参 考 文 献

- 1 Chen F, Khalil K H. Adaptive control of nonlinear systems using neural networks. *International Journal of Control*, 1992, **55**(6):1299~1317
- 2 Ravithakis G A, Christodoulou M A. Adaptive control of unknown plants using dynamical neural networks. *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, 1994, **4**(3):400~412
- 3 Jagannathan S, Lewis F L. Discrete-time model reference adaptive control of nonlinear dynamical systems using neural networks. *International Journal of Control*, 1996, **64**(2):217~239
- 4 Guillaume A M. Sampled-data adaptive control of a class of Continuous nonlinear systems. *International Journal of Control*, 1994, **60**(4):569~584
- 5 Kreisselmeier G, Narendra K S. Stable model reference adaptive control. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1982, **27**(6):1169~1175

**胡寿松** 1937年生,1960年毕业于北京航空航天大学自动控制系.现为南京航空航天大学教授、博士生导师、中国自动化学会理事.近期主要研究方向为故障诊断、鲁棒控制及智能自修复控制.

**周 川** 1970年生,1999年在南京航空航天大学控制理论与控制工程专业获博士学位,现在南京理工大学自动化系从事博士后研究.主要研究方向为故障诊断及智能控制理论.

**胡维礼** 1941年生,1965年毕业于清华大学自动控制专业,现为南京理工大学自动化系教授、博士生导师.主要从事自适应控制、故障诊断及现代高性能伺服系统的研究.