第26卷 第5期
2000年9月

自动化学报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 26, No. 5
Sep., 2000

一类具有不确定性的非线性相似组合系统的鲁棒镇定[1)]

王银河 刘粉林 黎阳生 张嗣瀛
(东北大学自动控制系,沈阳 110006)

摘 要 描述了两个控制系统间的相似性概念,讨论了一类具有不确定性的非线性相似组合系统的鲁棒镇定问题.结果表明,作者构造的控制器具有结构相似性.相似结构确实可以简化组合系统鲁棒镇定的判据.这说明,在一定程度上,具有相似结构的组合系统其相似结构具有稳固系统的特性.

关键词 相似,非线性组合系统,鲁棒镇定.

ROBUST STABILIZATION FOR A CLASS OF SIMILAR NONLINEAR COMPOSITE SYSTEMS WITH UNCERTAINTIES

WANG Yinhe LIU Fenlin LI Yangsheng ZHANG Siying
(*Department of Automatic Control, Northeastern University, Shenyang* 110006)

Abstract Description of similarity between systems is given. Robust stabilization for a class of nonlinear systems with uncertainties and similarity is discussed. It is shown that the designed controller demonstrates similarity in structure. The similar structure can simplify the analysis and design of composite systems. Moreover, to a certain extent, the similar structures of nonlinear composite systems have the characters that can stabilize the systems.

Key words Similarity, nonlinear composite systems, robust stabilization.

1 引言

由于复杂控制系统的内部结构复杂,目前还没有较常用的处理方法.按照文献[1,2]的论述,先着重考察具有对称性和相似性结构的复杂控制系统不仅具有重要的理论意义,而且具有重要的实际意义.关于具有对称结构的复杂控制系统已有许多好的结果[3,4],而

1) 国家自然科学基金(69774005)、攀登计划及国家教委高校博士点专项基金(97014508)资助项目.
收稿日期 1998-02-26 收修改稿日期 1999-05-25

关于相似结构的非线性控制系统的研究结果还较少见. 文献[5～8]利用微分同胚的概念定义了两个控制系统间的相似性，研究了一类具有相似结构的非线性组合大系统的可稳定化、状态观测器设计等问题. 具有相似结构的控制系统研究的一个共同特点是：所考虑的组合控制系统的各子系统的状态向量具有相同的维数，这类控制系统具有较广泛的实际背景. 但是，各子系统的状态向量的维数不尽相同的组合系统，也具有其相应的实际背景. 因此，研究具有相似结构的这类组合系统是必要的.

具有相似结构的大系统，如何用数学语言来描述或定义其相似性是一个关键问题. 受文献[2,5,9]的启发，从系统学的角度看，大系统的相似性应该是其与另一系统间的或其各子系统间的在某种相互作用中保持不变的性质或保持部分不变的性质. 而系统间的相互作用可以用映射描述. 为了充分利用微积分方法，用微分几何中的映射描述控制系统的相似性较为有效.

2　相似性描述

考虑如下两个非线性系统：

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x},v,t), \tag{1}$$

$$\dot{x} = f(x,u,t), \tag{2}$$

其中状态变量 $\bar{x}\in\bar{U}\subseteq R^m$，$x\in U\subseteq R^n$，$\bar{U}$，$U$ 分别是 R^m，R^n 中的开集；$m\geqslant n$；$\bar{f}(\bar{x},v,t)$，$f(x,u,t)$是相应维数的光滑向量场；控制 $u,v\in R^d$.

定义1. 若存在局部正则反馈（或微分同胚）：$\varphi:U\to\bar{U}$，$x\mapsto\bar{x}$，及正则反馈 $u=\alpha(x,t)+\beta(x,t)v$，使切映射 φ_* 满足：$\varphi_* f(x,\alpha(x,t)+\beta(x,t)v,t)=\bar{f}(\varphi(x),v,t)$，则称系统(2)与(1)状态反馈相似，简称相似. (φ,α,β)称为相似参量. $\bar{U}$，U 分别是 R^m，R^n 中的开集.

注1. 若系统(1)，(2)是定常系统，要求相似参量 α,β 及控制 u,v 不显含 t.

命题1. 对系统(1)，(2)，若存在微分同胚或正则嵌入 φ、正则反馈 $u=\alpha_1(x,t)+\beta_1(x,t)\bar{v}$，$v=\alpha_2(x,t)+\beta_2(x,t)\bar{v}$，使

$$\varphi_* f(x,\alpha_1(x,t)+\beta_1(x,t)\bar{v},t)=\bar{f}(\varphi(x),\alpha_2(\varphi(x),t)+\beta_2(\varphi(x),t)\bar{v},t). \tag{3}$$

则系统(2)与(1)相似，相似参量为$(\varphi,\alpha_1-\beta_1\beta_2^{-1}\alpha_2,\beta_1\beta_2^{-1})$. （证明略）

设$(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$，$(A,B,C)$是两个定常线性系统，其中 $\bar{A}$、A 分别是 m 阶，n 阶实方阵，$m\geqslant n$；$\bar{B}$，B 分别是 $m\times d$ 阶，$n\times d$ 阶实矩阵. 由命题1和定义1容易得到

命题2. 如果存在列线性无关的 $m\times n$ 阶实矩阵 F、d 阶可逆实方阵 β、$\bar{\beta}$，$d\times n$ 阶矩阵 K 和 $d\times m$ 阶矩阵 $\bar{K}$ 使

$$F(A+BK)=(\bar{A}+\bar{B}\bar{K})F, FB\beta=\bar{B}\bar{\beta} \tag{4}$$

成立，则此两定常线性系统相似. 相似参量为：微分同胚或正则嵌入 $\bar{x}=Fx$，正则反馈

$$u=(K-\bar{\beta}\beta^{-1}\bar{K}F)x+\bar{\beta}\beta^{-1}v.$$

注2. 1)如果 β，$\bar{\beta}$ 为单位矩阵，K，$\bar{K}$ 为零矩阵，$m=n$，则(4)式正是线性系统理论中相似系统的定义. 所以定义1可以看做线性系统理论中相似系统的定义在非线性系统中的一般化. 2)考虑到实际应用中线性系统的特殊性，本文以后称两个线性系统是相似的，均指命题2中条件(4)成立. F，K，$\bar{K}$，$\bar{\beta}$，β 称为相似参量矩阵.

如何通过较简单的计算判别两个控制系统是相似的，是一个值得深入研究的问题. 对

于判别命题2所陈述的两个线性系统的相似性，有

引理1. 如果系统$(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$，$(A,B,C)$都是单输入系统，且系统$(A,B,C)$完全可控，秩$[\bar{B},\bar{A}\bar{B},\bar{A}^2\bar{B},\cdots,\bar{A}^{m-1}\bar{B}]=n$，则此两线性系统相似.（证明略）.

考虑如下具有不确定参数的非线性组合大系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = A_i\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta}_1) + B_i\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2),(i = 1,2,\cdots,N), \tag{5}$$

其中状态变量$\boldsymbol{x}_i\in U_i\subseteq R^{n_i}$，$U_i$是$R^{n_i}$中的开集；$n_1=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{n_i\}$；$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，输入$\boldsymbol{u}_i\in R^d$；$\boldsymbol{\theta}_1\in\Omega_1$，$\boldsymbol{\theta}_2\in\Omega_2$是不确定参数，$\Omega_1$，$\Omega_2$分别是$R^{p_1}$，$R^{p_2}$中的紧致子集；$\boldsymbol{R}_i(\cdot)$，$\boldsymbol{\phi}_i(\cdot)$为相应维数的光滑向量场；$A_i$，$B_i$分别是相应维数的实矩阵. 不失一般性，设$\boldsymbol{R}_i(0,\boldsymbol{\theta}_1)=\boldsymbol{\phi}_i(0,\boldsymbol{\theta}_2)=0$.

定义2. 1)系统$\dot{\boldsymbol{x}}_i=A_i\boldsymbol{x}_i+B_i\boldsymbol{u}_i$称为组合大系统(5)的第$i$个标称子系统. $\dot{\boldsymbol{x}}_1=A_1\boldsymbol{x}_1+B_1\boldsymbol{u}_1$称为(5)的最高级标称子系统. 2)若(5)的每一个标称子系统均与最高级标称子系统相似，则称(5)为具有相似结构的组合大系统或径称(5)为相似组合大系统.

3 主要结论

讨论相似组合大系统(5)的不确定项满足匹配条件时的鲁棒控制器设计问题.

假定1. 存在矩阵$\bar{K}_1$使$A_1+B_1\bar{K}_1$为Hurwitz渐近稳定阵.

假定2. 参数不确定项满足以下匹配条件：

i) $\boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta}_1)=B_i\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta}_1)$, for $\boldsymbol{\theta}_1\in\Omega_1$；ii) $\boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2)=B_i\boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2)$, for $\boldsymbol{\theta}_2\in\Omega_2$.

假定3. 设相似组合大系统(5)的第i个标称子系统与最高级标称子系统间的相似矩阵为$(F_i,K_i,K_1,\beta_i,\beta_1)$，即有下式成立：

$$F_i(A_i + B_iK_i) = (A_1 + B_1K_1)F_i, F_iB_i\beta_i = B_1\beta_1, i = 1,2,\cdots,N. \tag{6}$$

由假定1知，对任一给定的正定矩阵Q，下面的Lyapunov方程存在唯一正定矩阵解P：

$$(A_1 + B_1\bar{K}_1)^{\mathrm{T}}P + P(A_1 + B_1\bar{K}_1) = - Q. \tag{7}$$

对于满足假定1～3的相似组合大系统(5)，提出如下鲁棒控制器：

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{u}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},\text{其中}, \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_i^a + \boldsymbol{u}_i^b + \boldsymbol{u}_i^c,\ i = 1,2,\cdots,N.$$

$$\boldsymbol{u}_i^a = K_i\boldsymbol{x}_i + \beta_i\beta_1^{-1}(\bar{K}_1 - K_1)F_i\boldsymbol{x}_i, \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{u}_i^b = (u_{i1}^b\quad u_{i2}^b\quad \cdots\quad u_{id}^b)^{\mathrm{T}},\quad u_{ij}^b = - \lambda_i(\boldsymbol{x}_i)\mathrm{sign}(r_{ij}(\boldsymbol{x}_i)), \tag{8b}$$

$$\boldsymbol{u}_i^c = (u_{i1}^c\quad u_{i2}^c\quad \cdots\quad u_{id}^c)^{\mathrm{T}},\quad u_{ij}^c = - \rho_i(\boldsymbol{x}_i)\mathrm{sign}(r_{ij}(\boldsymbol{x}_i)), \tag{8c}$$

$$\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta}_1) = (L_{i1}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta}_1),(L_{i2}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta}_1),\cdots \boldsymbol{L}_{id}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta}_1))^{\mathrm{T}},\lambda_i(x_i) \geqslant \max_{1\leqslant j\leqslant d}\ \sup_{\theta_1\in\Omega} L_{ij}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta}_1),$$

$$\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}}PF_iB_i = (r_{i1}(\boldsymbol{x}_i),r_{i2}(\boldsymbol{x}_i),\cdots,r_{id}(\boldsymbol{x}_i));\rho_i \geqslant \max_{1\leqslant j\leqslant d}\ \sup_{\theta_2\in\Omega_2} H_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2),$$

$$\boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2) = (H_{i1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2),H_{i2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2),\cdots,H_{id}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2))^{\mathrm{T}}. i = 1,2,\cdots N; j = 1,2,\cdots,d.$$

定理1. 若(5)是满足假定1～3的相似组合大系统，则鲁棒控制器(8)使组合大系统(5)鲁棒渐近镇定.

证明. 对系统(5)构造函数$V(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(F_i^{\mathrm{T}}P_iF_i)\boldsymbol{x}_i$. 由于$F_i$列线性无关，所以$V(\boldsymbol{x})$是关于$\boldsymbol{x}$的正定函数. 式(6)，(7)，直接计算可得$V(\boldsymbol{x})$沿由(5)与控制器(8)构成的闭环系

统的时间导数为

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}}Q_iF_i\boldsymbol{x}_i + 2\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}}P_iF_iB_i[\boldsymbol{u}_i^b + \boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta}_1)] +$$

$$2\sum_{i=1}^{N}[\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}}P_iF_iB_i[\boldsymbol{u}_i^c + \boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2)]. \tag{9}$$

由控制器(8b)，(8c)可得

$$\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(F_i^{\mathrm{T}}PF_i)B_i[\boldsymbol{u}_i^b + \boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta}_1)] = \sum_{j=1}^{d}r_{ij}(\boldsymbol{x}_i)[u_{ij}^b + L_{ij}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta}_1)] \leqslant 0, \tag{10a}$$

$$\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(F_i^{\mathrm{T}}PF_i)B_i[\boldsymbol{u}_i^c + \boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2)] = \sum_{j=1}^{d}r_{ij}(\boldsymbol{x}_i)[u_{ij}^c + H_{ij}(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\theta}_1)] \leqslant 0, \tag{10b}$$

所以由式(9)～(10)得：$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leqslant -\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}}Q_iF_i\boldsymbol{x}_i \leqslant 0$. 因此组合大系统(5)经控制器(8)鲁棒渐近镇定. 证毕.

定理1是在互联项满足匹配条件的情形下得到的，对于互联项不满足匹配条件的情形，我们考虑如下单输入的非线性组合大系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = A_i\boldsymbol{x}_i + B_i(\boldsymbol{u}_i + H_i(\boldsymbol{x}) + \Delta H_i(\boldsymbol{x})) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\boldsymbol{\phi}_{ij}(x_j), \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{x})$，$\Delta H_i(\boldsymbol{x})$分别是结构(或参数)确定、不确定的匹配项；$\boldsymbol{\phi}_{ij}(\boldsymbol{x}_j)$是解析的不匹配互联项. 其余符号参见系统(5)的相应说明. 不失一般性，设 $\boldsymbol{\phi}_{ij}(0)=0$.

假定4. 系统(11)的不确定项满足：$\|\Delta H_i(\boldsymbol{x})\| \leqslant \eta_i(\boldsymbol{x})$，$\eta_i(\boldsymbol{x})$是非负连续函数，$i=1,\cdots,N$. 由 $\boldsymbol{\phi}_{ij}(0)=0$及 $\boldsymbol{\phi}_{ij}(\boldsymbol{x}_j)$的解析性可知存在光滑函数 $R_{ij}(\boldsymbol{x}_j)$使：

$$\boldsymbol{\phi}_{ij}(\boldsymbol{x}_j) = R_{ij}(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{x}_j,\quad i=1,\cdots,N, i\neq j. \tag{12}$$

其中 $R_{ij}(\boldsymbol{x}_j)$并不唯一，可用文献[10]的方法或观察法求出.

对于满足假定1、3、4的相似组合大系统(11)，提出如下鲁棒控制器：

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{u}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{u}_i = K_i\boldsymbol{x}_i + \beta_i\beta_1^{-1}(\overline{K}_1 - K_1)F_i\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{u}_i^a + \boldsymbol{u}_i^b, \tag{13a}$$

$$\boldsymbol{u}_i^a = -\lambda(\boldsymbol{x})\mathrm{sign}(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}}PF_iB_i), \boldsymbol{u}_i^b = -\eta(\boldsymbol{x})\mathrm{sign}(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}F_i^{\mathrm{T}}PF_iB_i), i=1,2,\cdots,N. \tag{13b}$$

其中 $\lambda(\boldsymbol{x}) \geqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{H_i(\boldsymbol{x})\}$，$\eta(\boldsymbol{x}) \geqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\{\eta_i(\boldsymbol{x})\}$.

定理2. 设式(11)是满足假设1、3、4的相似组合大系统，如果函数矩阵 $W^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+W(\boldsymbol{x})$是 $\boldsymbol{x}=0$某邻域内的正定矩阵，则组合大系统(11)可由鲁棒控制器(13)局部渐近鲁棒镇定. 其中 $W(\boldsymbol{x})=(w_{ij})_{N\times N}$，$w_{ij}=-2\lambda_M((Q^{-\frac{1}{2}})^{\mathrm{T}}PF_iR_{ij}(\boldsymbol{x}_j)F_j^{-1}Q^{-\frac{1}{2}})$，$i\neq j$；$w_{ii}=1$；$\lambda_M(*)$表示相应矩阵的最大奇异值；$F_i^{-1}$ 表示 F_i 的左逆.

定理2的证明方法完全类似于定理1.(略).

注3. 由控制器(8)，(13)的构造可以看出，它们都是由三部分组成，第一部分是线性部分，第二、三部分是非线性部分，类似于“砰砰”控制器的构造，其主要作用是抑制不确定项的作用. 而且容易看出，控制器的构造完全依赖于相似组合大系统最高级标称子系统及相似参量. 按照文献[2,8]的思想，将这样的控制器称为结构相似控制器. 最高级标称子系统具有“全息元”的作用.

值得注意得是，这里所考虑的相似组合系统(5)，(11)是文献[1,2,5～8]所考虑系统

的进一步推广. 例如,下列具有参数不确定的组合系统 Σ

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}_1 &= A_1\boldsymbol{x}_1 + B_1\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x}_1,\theta_1) + \boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2) + D\boldsymbol{x}_2,\\
\dot{\boldsymbol{x}}_2 &= A_2\boldsymbol{x}_2 + R_2(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\theta}_1) + \boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2),\\
\dot{\boldsymbol{x}}_3 &= A_1\boldsymbol{x}_3 + B_1\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{R}_3(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{\theta}_1) + \boldsymbol{\phi}_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2),\\
&\vdots\\
\dot{\boldsymbol{x}}_N &= A_1\boldsymbol{x}_N + B_1\boldsymbol{u}_N + \boldsymbol{R}_N(\boldsymbol{x}_N,\boldsymbol{\theta}_1) + \boldsymbol{\phi}_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2),
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{x}_j\in R^n(j\neq2,j=1,3,\cdots,N)$,$\boldsymbol{x}_2\in R^r$. A_1,A_2,B_1,D 分别是相应维数的实矩阵. 易见组合系统 Σ 第二个子系统的维数一般与其它子系统的维数不同. 所以它已不是文献[1,2,5~8]中所定义的相似组合系统,因而也不能采用其方法解决其镇定问题. 但是,如果将 Σ 改写成如下形式:

$$\begin{cases}
\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}_1\\ \dot{\boldsymbol{x}}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1 & D\\ 0 & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}B_1\\ 0\end{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 + \begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\theta}_1)\\ \boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\theta}_1)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2)\\ \boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2)\end{pmatrix},\\
\dot{\boldsymbol{x}}_3 = A_1\boldsymbol{x}_3 + B_1\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{R}_3(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{\theta}_1) + \boldsymbol{\phi}_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2),\\
\vdots\\
\dot{\boldsymbol{x}}_N = A_1\boldsymbol{x}_N + B_1\boldsymbol{u}_N + \boldsymbol{R}_N(\boldsymbol{x}_N,\boldsymbol{\theta}_1) + \boldsymbol{\phi}_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2).
\end{cases}\tag{14}$$

取 $(n+r)\times n$ 阶矩阵 $F_i=(I_n\quad 0)^{\mathrm{T}}$,则 F_i 是列线性无关矩阵,容易验证:$F_iA_1=\begin{pmatrix}A_1 & D\\ 0 & A_2\end{pmatrix}F_i$,$F_iB_1=(B_1\quad 0)^{\mathrm{T}}$,$i=3,4,\cdots,N$. 所以组合系统(14)是本文所定义的相似组合系统,因而可以采用定理1,2的方法来研究其镇定问题.

4 算例

考虑由三个子系统构成的组合系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_{11}\\ \dot{x}_{12}\\ \dot{x}_{13}\\ \dot{x}_{14}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 4\\ -2 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{12}\\ x_{13}\\ x_{14}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\theta}_1) + \boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2),\tag{15a}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_{21}\\ \dot{x}_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{21}\\ x_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\theta}_1) + \boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2),\tag{15b}$$

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_{31}\\ \dot{x}_{32}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{31}\\ x_{32}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{R}_3(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{\theta}_1) + \boldsymbol{\phi}_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2),\tag{15c}$$

其中 $\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\theta}_1)=(0\quad x_{12}^{21}\cos\theta_1 x_{13}\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\theta}_1)=\begin{pmatrix}0\\ x_{21}^2x_{22}^2\sin\theta_1 x_{21}\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{R}_3(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{\theta}_1)=\begin{pmatrix}0\\ (x_{31}+x_{32})^2\sin\theta_1 x_{31}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1=(x_{11},x_{12},x_{13})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_2=(x_{21},x_{22})^{\mathrm{T}}$,
$\boldsymbol{x}_3=(x_{31},x_{32})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\phi}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2)=(0\quad (x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{22})^2e^{-\theta_1}\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}$,
$\boldsymbol{\phi}_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2)=\begin{pmatrix}0\\ x_{13}+x_{22}-x_{31}+\theta_2x_{11}^2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\phi}_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_2)=\begin{pmatrix}0\\ (x_{31}+x_{13}+x_{11}-x_{21})^2/1+\theta_2^2\end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{\theta}_1\in\boldsymbol{\Omega}_1=\{\boldsymbol{\theta}_1\,|\,-\pi\leqslant\boldsymbol{\theta}_1\leqslant\pi\}$,$\boldsymbol{\theta}_2\in\boldsymbol{\Omega}_2=\{\boldsymbol{\theta}_2\,|\,0\leqslant\boldsymbol{\theta}_2\leqslant1\}$. $x=(x_1^{\mathrm{T}},x_2^{\mathrm{T}},x_3^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

由引理1容易验证系统(15)是相似组合系统. 相似矩阵为:$F_1=I_4, F_2=F_3=(I_2\quad 0)^{\mathrm{T}}, K_1=(1,-1,0,0), K_2=K_3=(0,0), \beta_i=1, (i=1,2,3)$. (7)式中相应的矩阵 $\overline{K}_1=(0,-3,0,0), Q=I_4$. 此时组合大系统(15)的控制器为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= -3x_{12}-[x_{12}^2+(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{22})^2]\cdot\mathrm{sign}(-25.2x_{11}+\\
&\quad 22.5059x_{12}-1.7294x_{13}-2.2x_{14}),\\
\boldsymbol{u}_2 &= -x_{21}-2x_{22}-[x_{21}^2x_{22}^2+(x_{13}+x_{22}-x_{31}+x_{11}^2)]\\
&\quad \cdot\mathrm{sign}(-25.2x_{21}+22.5059x_{22}),\\
\boldsymbol{u}_3 &= -x_{31}-2x_{32}-[(x_{31}+x_{32})^2+(x_{31}+x_{13}+x_{11}-x_{21})^2]\\
&\quad \cdot\mathrm{sign}(-25.2x_{31}+22.5059x_{32}).
\end{aligned}$$

分别取 $\theta_1=1.5, \theta_2=0.5$做仿真,其状态响应曲线见图1.

如果将系统(15)中的互联项换为如下不匹配项,其余条件不变(依系统(11)的符号) $\boldsymbol{\phi}_{12}(\boldsymbol{x}_2)=\begin{pmatrix}\frac{x_{21}^2}{90} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\phi}_{21}(\boldsymbol{x}_1)=\begin{pmatrix}\frac{x_{14}^2}{90} & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\phi}_{32}(\boldsymbol{x}_2)=\begin{pmatrix}0 & \frac{x_{22}^2}{60}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\eta_1(\boldsymbol{x})=x_{12}^2$, $\eta_2(\boldsymbol{x})=x_{21}^2x_{22}^2, \eta_3(\boldsymbol{x})=(x_{31}+x_{32})^2$. 容易验证,在区域 Ω 内,函数矩阵 $W^{\mathrm{T}}(x)+W(x)$是正定矩阵,$\Omega=\{x \| x_{14}|\leqslant 1.15, |x_{2i}|\leqslant 1.15, i=1,2\}$. 因此,由定理2知相应的控制器如下:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 &= -3x_{12}-[x_{21}^2x_{22}^2+(x_{31}+x_{32})^2+x_{12}^2]\cdot\mathrm{sign}(-25.2x_{11}+\\
&\quad 22.5059x_{12}-1.7294x_{13}-2.2x_{14}),\\
\boldsymbol{u}_2 &= -x_{21}-2x_{22}-[x_{21}^2x_{22}^2+(x_{31}+x_{32})^2+x_{12}^2)]\\
&\quad \cdot\mathrm{sign}(-25.2x_{21}+22.5059x_{22}),\\
\boldsymbol{u}_3 &= -x_{31}-2x_{32}-[(x_{21}^2x_{22}^2+(x_{31}+x_{32})^2+x_{12}^2]\\
&\quad \cdot\mathrm{sign}(-25.2x_{31}+22.5059x_{32}).
\end{aligned}$$

取参数 $\theta_1=2$做仿真,其状态响应曲线见图2.

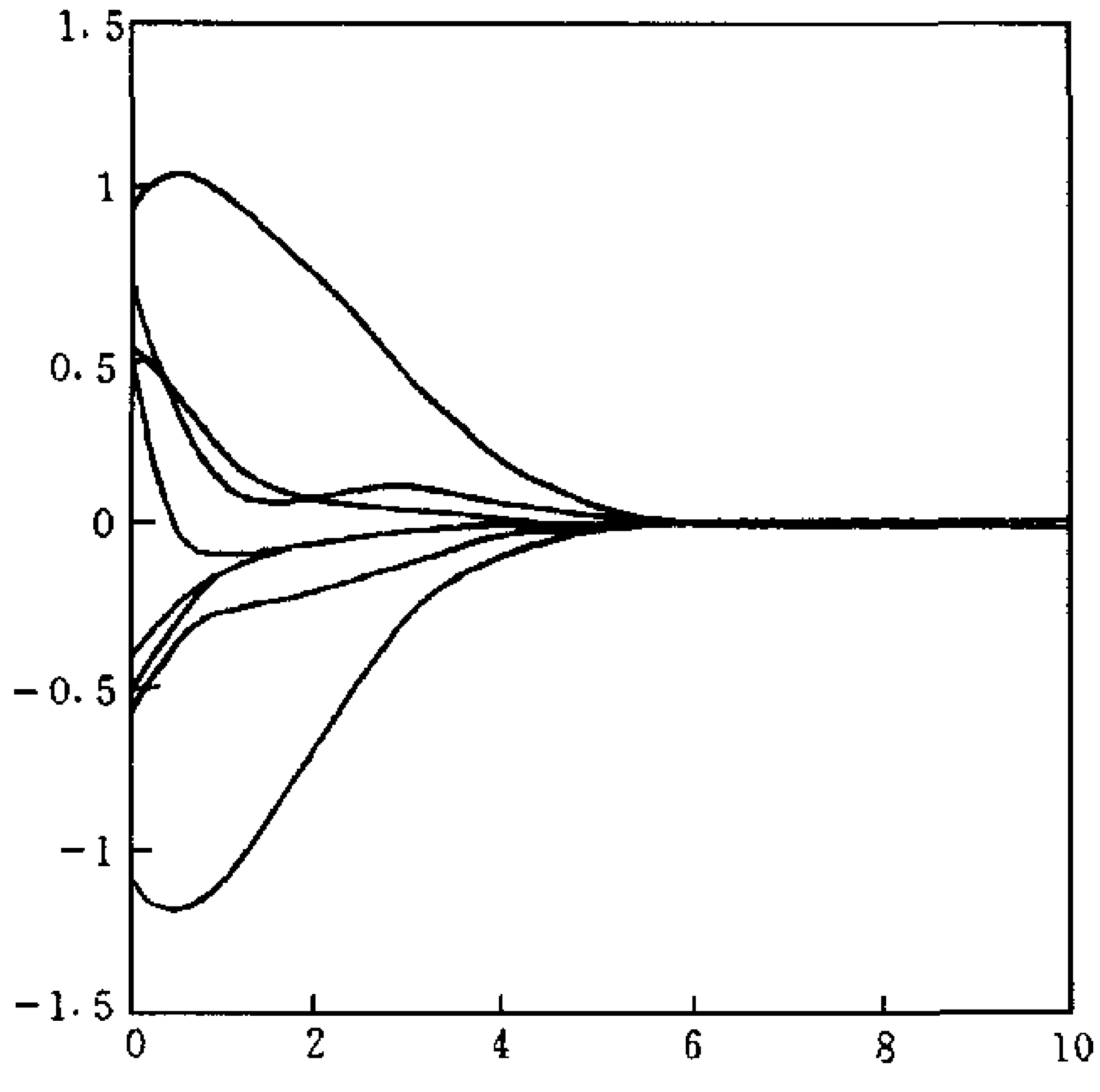

图1　满足匹配条件时系统(15)的状态响应曲线

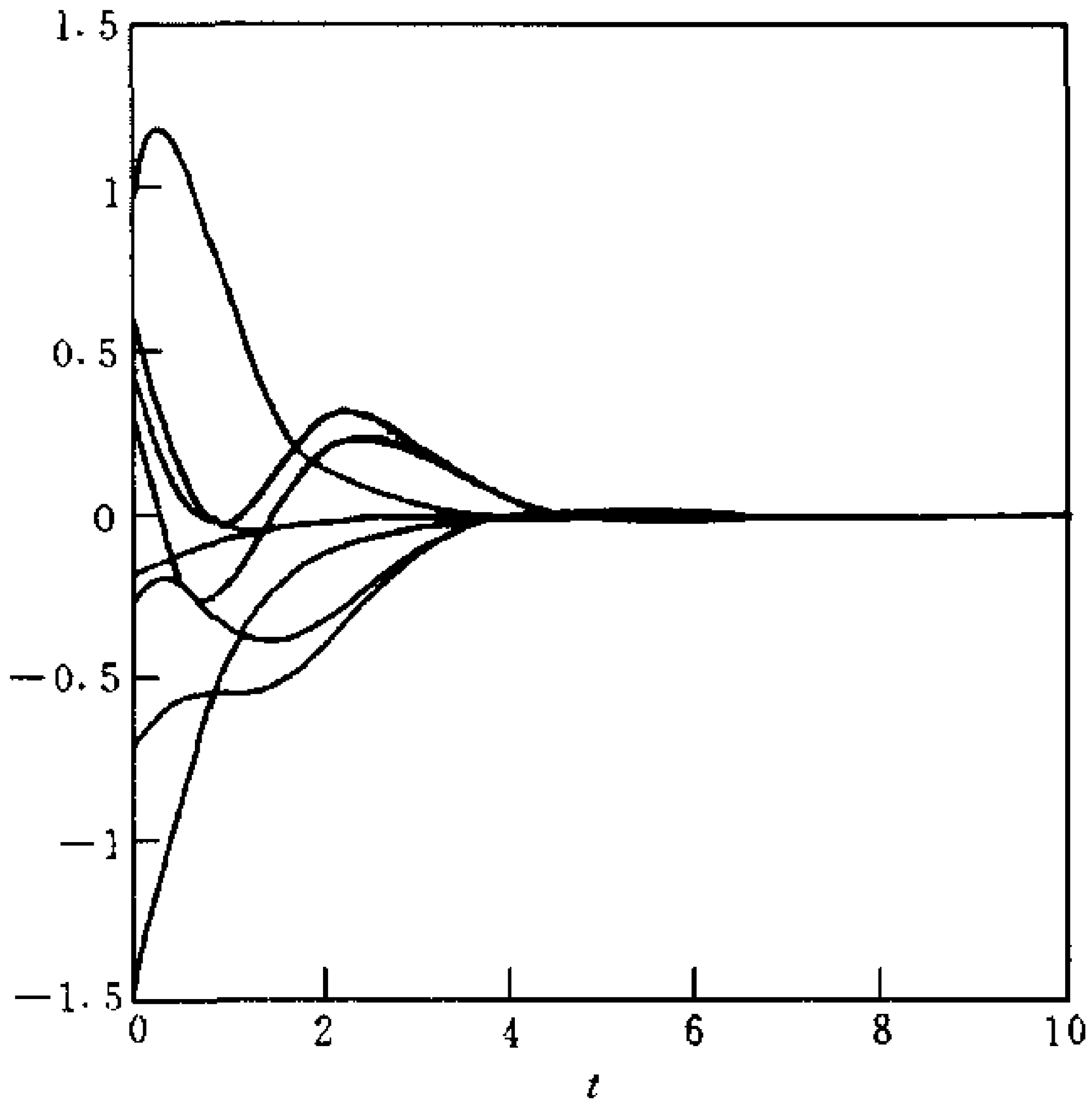

图2　不满足匹配条件时系统(15)的状态响应曲线

结论. 由图1,2可以看出,本文所采用的方法是较为有效的. 定理1,2表明相似结构确实能简化系统稳定的判据. 在一定程度上,组合大系统的相似结构具有稳固系统的特性和全息性.

参 考 文 献

1 张嗣瀛，王景才，刘晓平. 微分几何方法与非线性控制系统. 信息与控制，1992，**21**(5)：288～294

2 张嗣瀛. 复杂控制系统的对称性及相似性结构. 控制理论与应用，1994，**11**(2)：231～237

3 赵军，张嗣瀛. 非线性系统的广义对称性和可控性. 科学通报，1991，**18**(1)：1428～1430

4 刘晓平，张嗣瀛. 对称非线性控制系统的能控性. 控制理论与应用，1991，**8**(4)：452～455

5 严星刚，吕兴亚，张嗣瀛. 基于状态观测器的非线性相似组合大系统的镇定设计. 自动化学报，1997，**23**(5)：584～590

6 严星刚，高立群，张嗣瀛. 一类不确定非线性相似组合系统的结构全息鲁棒控制. 自动化学报，1997，**23**(5)：655～659

7 Yan X G, Zhang S Y. Decentralized output feedback robust stabilization for a class of nonlinear composite large-scale systems with similarity. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1998，**43**(2)：294～299

8 严星刚，张嗣瀛. 不确定非线性相似组合大系统的结构相似鲁棒控制器设计. 控制理论与应用，1997，**14**(4)：513～519

9 霍绍周. 系统论. 北京：科学技术文献出版社，1988

10 严星刚，井元伟，张嗣瀛. 一类参数不确定非线性系统的鲁棒稳定性. 控制理论与应用，1996，**13**(3)：395～399

王银河 男，1962年生. 副教授. 1990年7月在四川师范大学获理学硕士学位. 2000年3月于东北大学获工学博士学位. 感兴趣的方向：复杂系统的结构性质研究、鲁棒控制等.

刘粉林 男，1964年生. 1991年1月在哈尔滨工业大学获理学硕士. 2000年3月在东北大学获博士学位. 感兴趣的方向：复杂系统的结构性质研究、鲁棒控制系统等.

黎阳生 男，1959年生. 副教授. 先后于1989年、2000年在东北大学获工学硕士、博士学位. 感兴趣的方向：复杂系统的结构性质研究、计算机控制系统等.

张嗣瀛 见本刊1997年，23卷5期.