



直线和圆一般参数化形式的研究¹⁾

吴福朝^{1,2} 胡占义²

(安徽大学人工智能研究所 合肥 230039 E-mail: wfch@ mars. ahu. edu. cn)¹

(中国科学院自动化所模式识别国家重点实验室 北京 100080 E-mail: huzy@nlpr. ia. ac. cn)²

摘要 使用什么样的直线(圆)参数化形式直接影响着直线(圆)提取性能的优劣。本文系统地研究了构造直线(圆)参数化一般形式的方法。本文主要由六部分构成。第一部分研究满足唯一性条件的直线(圆)参数化形式。第二部分研究具有扩张特性的直线(圆)参数化形式。第三部分研究具有凝视特征的直线参数化形式。第四部分研究具有凝视特征的圆化形式。第五部分简单探讨了特殊参数化形式与滤波理论之间的关系。第六部分是实验结果。本文的工作为优化直线(圆)参数化形式的设计提供了理论基础。

关键词 直线参数化形式, 圆参数化形式, 参数空间, 唯一性, 扩张特征, 凝视特征。

THE INVESTIGATION ON GENERAL LINE AND CIRCLE PARAMETERIZATION

WU Fuchao^{1,2} Hu Zhanyi²

(*Institute of AI, Anhui Universty, Hefei 230039*)¹

(*National Laboratory of Pattern Recognition(NLPR), Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080*)²

Abstract It is well known that the performance of line(circle)extraction strongly depends on the used parameterization, however there exist few reports in the literature on the design of general line(circle)parameterization. In this paper, we present an approach for systematic design of general line(circle) parameterization. The paper consists of the following 6 parts: 1. The design of the line (circle) parameterizations satisfying purely the uniqueness condition is investigated. 2. The design of the line (circle) parameterizations possessing the enlarging property is investigated. 3. The design of the line parameterizations possessing the focusing property is investigated. 4. The design of the circle parameterizations possessing

1) 国家自然科学基金与“863”计划资助(资助号为:69775006、69875001、69975021、863-512-9915-01、863-512-9820-03)项目。

收稿日期 1999-03-03 收修改稿日期 2000-04-24

the focusing property is investigated. 5. The relationship between a specific parameterization with stretching or focusing property and filter theory is discussed. 6. Some simple experiments are presented to illustrate the usefulness of our theoretical results. This work could be used as a theoretical basis for the optimal design of line(circle)parameterizations.

Key words Line parameterization, circle parameterization, parameter space, uniqueness condition, enlarging property, focusing property.

1 引言

Hough 变换^[1~8]是目前文献中应用最广泛的几何基元提取方法. Hough 变换的基本思想是通过在参数空间的证据积累来确定图象空间中的几何基元. 在参数空间进行几何基元提取具有对部分遮盖现象不敏感性和对随机噪声鲁棒性高等优点, 这也是 Hough 变换能够成为文献中应用最广的一种几何基元提取方法的主要原因. 一种几何基元, 如直线、圆、椭圆, 从理论上来说, 存在无限多种定义方法, 换句话说, 存在无限多种参数化形式. 很显然, 不同的参数化形式在基元提取中的性能是不同的^[9~14]. 因此, 人们就会产生这样一些问题: 给定一种基元类型, 它最一般的参数化形式是什么? 也就是, 构成参数化形式的基本条件是什么? 满足某种特定性能的参数化形式应具备什么条件? 如何来设计和构造具有某种特定性能的参数化形式? 探讨这些问题不仅对 Hough 变换研究本身具有重要的理论意义, 并且对 Hough 变换在几何基元提取的实际应用中具有重要的理论指导作用.

文献[15]初步探讨了设计一般直线参数化形式的方法, 文献[16]证明文献[15]给出的条件既不是必要条件也不是充分条件. 文献[17~21]初步探讨了如何进行优化直线参数化形式的设计. 总之, 目前文献中对直线和圆参数化形式的设计均缺乏系统性和普遍性. 到目前为止, 人们主要使用圆心和半径来定义圆, 对其它圆参数化形式的报道很少. 本文旨在探讨直线和圆参数化的一般形式以及具有扩张特性和凝视特征的直线与圆参数化形式. 这两种特殊的直线与圆参数化形式在基元提取、主动视觉中有重要的应用价值.

2 满足唯一性条件的直线和圆参数化形式

2.1 构造方法

直线参数化标准形式为

$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad (\rho, \theta) \in L_S, \quad (1)$$

其中 (x, y) 为图象坐标; (ρ, θ) 为直线(1)所对应的参数, 该参数称为标准参数; ρ 是图象平面坐标原点到直线的距离; θ 是直线法向与图象平面 x 轴正向的夹角; L_S 称为标准参数空间, 通常取

$$L_S = [0, r_{\max}] \times [0, 2\pi),$$

图象平面的直线与其标准参数具有一一对应关系.

直线参数化的一般形式为

$$R(\mu, \xi) = x \cos \Phi(\mu, \xi) + y \sin \Phi(\mu, \xi), (\mu, \xi) \in L_G, \quad (2)$$

其中 L_G 表示一般参数空间.

作为直线参数化的一般形式,下述唯一性条件必须得到满足.

唯一性条件. 图象平面内的任一条直线对应唯一一组参数 $(\mu, \xi) \in L_G$, 反之对任一组参数 $(\mu, \xi) \in L_G$ 唯一确定图象平面内的一条直线.

若式(1), (2)表示图象平面内的同一条直线, 则必有

$$\begin{cases} \rho = R(\mu, \xi), \\ \theta = \Phi(\mu, \xi). \end{cases} \quad (3)$$

将式(3)简记为

$$(\rho, \theta) = F_l(\mu, \xi), \quad (4)$$

其中

$$F_l(\mu, \xi) = (R(\mu, \xi), \Phi(\mu, \xi)).$$

它定义了一个从一般参数空间 L_G 到标准参数空间 L_S 的映射. 唯一性条件等价于 $F_l(\mu, \xi)$ 实现 L_G 与 L_S 之间的一一对应.

圆参数化的标准形式为

$$r^2 = (x - \rho \cos \theta)^2 + (y - \rho \sin \theta)^2, (\rho, \theta, r) \in C_S, \quad (5)$$

其中 (x, y) 为图象坐标; (ρ, θ, r) 为圆(5)所对应的参数, 称为标准参数; (ρ, θ) 是圆心的极坐标, 通常用它来表示圆(5)所在的位置; r 是半径; C_S 称为圆的标准参数空间, 通常取

$$C_S = [0, \rho_{\max}] \times [0, 2\pi) \times [0, r_{\max}],$$

图象平面内的圆与其标准参数具有一一对应关系.

圆参数化的一般形式

$$R^2(u, \phi, v) = (x - P(u, \phi, v) \cos \Theta(u, \phi, v))^2 + (y - P(u, \phi, v) \sin \Theta(u, \phi, v))^2, \quad (6)$$

其中 (x, y) 为图象坐标, (u, ϕ, v) 为圆(6)所对应的参数, 称为一般参数. 记一般参数空间为 C_G .

作为圆参数化的一般形式, 同样必须满足唯一性条件. 与直线的讨论类似, 我们得到

$$(\rho, \theta, r) = F_c(u, \phi, v), \quad (7)$$

其中

$$F_c(u, \phi, v) = (P(u, \phi, v), \Theta(u, \phi, v), R(u, \phi, v)).$$

它定义了一个从一般参数空间 C_G 到标准参数空间 C_S 的映射. 唯一性条件等价于 $F_c(u, \phi, v)$ 实现一般参数空间 C_G 到标准参数空间 C_S 之间的一一对应.

直线和圆参数化一般形式的唯一性, 最终都归结为从一般参数空间 $L_G(C_G)$ 到标准参数空间 $L_S(C_S)$ 之间一一对应问题. 一般地, 一个映射 $F: D \rightarrow E$ 为一一对应的充分必要条件是 F 为单叶映射¹⁾且 $F(D) = E$. 由此, 可以得到构造满足唯一性条件的一般参数化形式的方法

- 1) 令直线(圆)的标准参数空间与一般参数空间分别为 $L_S(C_S), L_G(C_G)$;
- 2) 选取 $L_G(C_G)$ 上的单叶映射 $F_l(\mu, \xi) (F_c(u, \phi, v))$ 使 $F_l(L_G) = L_S (F_c(C_G) = C_S)$;

1) $\forall t_1, t_2 \in D$, 若 $t_1 \neq t_2$, 有 $F(t_1) \neq F(t_2)$, 则称 F 为 D 上的单叶映射.

3) $F_l(\mu, \xi)(F_c(u, \phi, v))$ 各分量代入直线(圆)的标准参数化形式, 即可得满足唯一性条件的一般参数化形式.

实现这种构造方法, 有时在技术上存在一定的困难, 主要原因是一般参数空间 $L_G(C_G)$ 被事先给定了. 众所周知, 一一对应 $F: D \rightarrow E$ 必有逆映射, 记逆映射为 $G: E \rightarrow D$. 同样地 G 也是单叶映射且 $G(E) = D$. 因此, 如果不关心一般参数空间 $L_G(C_G)$ 的具体形式, 可得到如下易于实现的构造方法

- 1) 令直线(圆)的标准参数空间与一般参数空间分别为 $L_S(C_S), L_G(C_G)$;
- 2) 选取 $L_S(C_S)$ 上的单叶映射 $G_l(\rho, \theta)(G_c(\rho, \theta, r))$;
- 3) 求 $G_l(\rho, \theta)(G_c(\rho, \theta, r))$ 的逆映射 $F_l(\mu, \xi) = G_l^{-1}(\mu, \xi)(F_c(u, \phi, v) = G_c^{-1}(u, \phi, v))$;
- 4) 将 $F_l(\mu, \xi)(F_c(u, \phi, v))$ 各分量代入直线(圆)的标准参数化形式, 即得满足唯一性条件的一般参数化形式, 且一般参数空间为 $L_G = G_l(L_S), (C_G = G_c(C_S))$.

从讨论可以看出: 构造满足唯一性的一般参数化形式, 最终归结为映射的单叶性.

2.2 可微性与单叶性

定义1. 设 $G(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)), t = (t_1, t_2, \dots, t_n)^T \in D$, 其中: $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$ 是 n 元可微函数, 定义

$$D(G(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial g_1(t)}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial g_1(t)}{\partial t_n} \\ \frac{\partial g_2(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial g_2(t)}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial g_2(t)}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial g_n(t)}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial g_n(t)}{\partial t_n} \end{pmatrix} \quad (8)$$

为 G 在 $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)^T$ 点的微分. 若 G 在 D 上每一点存在微分, 称 G 为 D 上的可微映射.

定理1. 设 $G(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$ 为凸集 D 上的可微映射, 若 $\forall t = (t_1, t_2, \dots, t_n)^T \in D, h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T \neq 0$, 有

$$h^T D(G(t)) h \neq 0, \quad (9)$$

则 G 在 D 内是单叶映射.

定理1证明见附录.

定理1给出了 n 维到 n 维的可微映射为单叶映射的条件, 它可直接应用于直线和圆. 对于圆的情形, 记 $G_c(\rho, \theta, r) = (g_{c1}(\rho, \theta, r), g_{c2}(\rho, \theta, r), g_{c3}(\rho, \theta, r)), (\rho, \theta, r) \in C_S$, 令

$$H_c(\rho, \theta, r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{c1}(t)}{\partial \rho} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{c1}(t)}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{c2}(t)}{\partial \rho} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{c1}(t)}{\partial r} + \frac{\partial g_{c3}(t)}{\partial \rho} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{c1}(t)}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{c2}(t)}{\partial \rho} \right) & \frac{\partial g_{c2}(t)}{\partial \theta} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{c2}(t)}{\partial r} + \frac{\partial g_{c3}(t)}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{c1}(t)}{\partial r} + \frac{\partial g_{c3}(t)}{\partial \rho} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{c2}(t)}{\partial r} + \frac{\partial g_{c3}(t)}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial g_{c3}(t)}{\partial r} \end{pmatrix}_{t=(\rho, \theta, r)}$$

因 $\forall (\rho, \theta, r) \in C_S, h = (h_1, h_2, h_3)^T \neq 0$, 有

$$h^T D(G_c(\rho, \theta, r)) h = h^T H_c(\rho, \theta, r) h. \quad (10)$$

所以 $h^T D(G_c(\rho, \theta, r)) h \neq 0$ 的充分条件为: $\forall (\rho, \theta, r) \in C_S, H_c(\rho, \theta, r)$ 是正定矩阵或是负

定矩阵.于是有下述重要推论:

推论1.若 $G_c(\rho, \theta, r) = (g_{c1}(\rho, \theta, r), g_{c2}(\rho, \theta, r), g_{c3}(\rho, \theta, r))$ 是 C_S 上的可微映射,且 $\forall (\rho, \theta, r) \in C_S, H_c(\rho, \theta, r)$ 是正定矩阵或是负定矩阵,则 $G_c(\rho, \theta, r)$ 为 C_S 内的单叶映射.

对于直线的情形,记 $G_l(\rho, \theta) = (g_{l1}(\rho, \theta), g_{l2}(\rho, \theta)), (\rho, \theta) \in L_S$, 令

$$H_l(\rho, \theta) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial g_{l1}(t)}{\partial \rho} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{l1}(t)}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{l2}(t)}{\partial \rho} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{l1}(t)}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{l2}(t)}{\partial \rho} \right) & \frac{\partial g_{l2}(t)}{\partial \theta} \end{array} \right]_{t=(\rho, \theta)} \quad (11)$$

有

推论2.若 $G_l(\rho, \theta) = (g_{l1}(\rho, \theta), g_{l2}(\rho, \theta))$ 是 L_S 上的可微映射,且 $\forall t = (\rho, \theta) \in L_S$,

$$\frac{\partial g_{l1}(t)}{\partial \rho} \neq 0, \frac{\partial g_{l1}(t)}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial g_{l2}(t)}{\partial \theta} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial g_{l1}(t)}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{l2}(t)}{\partial \rho} \right)^2 > 0, \quad (12)$$

则 $G_l(\rho, \theta)$ 为 L_S 内单叶映射.

证明.由条件 $\forall t = (\rho, \theta) \in L_S, H_l(\rho, \theta)$ 或是正定矩阵或是负定矩阵.由定理1知, $G_l(\rho, \theta)$ 为 L_S 内单叶映射.

2.3 解析性、调和性和直线的一般参数化形式

由于满足唯一性的直线参数化一般形式,最终归结为2维到2维映射的单叶性,于是可利用复变函数理论来讨论这一问题.

令 $z = \rho + i\theta, w = \mu + i\xi (i = \sqrt{-1})$, 则映射 $G_l(\rho, \theta)$ 可写成复变函数的形式

$$w = G_l(z) = g_{l1}(\rho, \theta) + ig_{l2}(\rho, \theta).$$

定理2.设 $w = G_l(z)$ 在 L_S 内解析¹⁾, 则 $G_l(z)$ 为单叶映射的必要条件为 $\forall z \in L_S, G'_L(z) \neq 0$.

下面给出唯一性的充要条件.由于 $L_S = [0, \rho_{\max}] \times [0, 2\pi)$ 是单连通的, 所以有如下定理

定理3.设 $w = G_l(z)$ 在 L_S 内解析, $L_G = G_l(L_S)$. 令 C, L 分别为 L_G, L_S 的边界, 则 $G_l(z)$ 为单叶映射的充要条件为: $w = G_l(z)$ 实现 C 到 L 上的一一对应(即将 C 双方单值地变为 L .)

定理3说明, 如果 $w = G_l(z)$ 是解析映射, 则单叶性可归结为参数空间边界上的单叶性.

定理2与定理3的证明请参考文献[22].

定义2.如果 $g_{l1}(\rho, \theta), g_{l2}(\rho, \theta)$ 为在 L_S 内满足柯西-黎曼(C-R)条件的两个调和函数¹⁾, 则称 $g_{l2}(\rho, \theta)$ 是 $g_{l1}(\rho, \theta)$ 的共轭调和函数.

定理4.若 $g_{l2}(\rho, \theta)$ 是 $g_{l1}(\rho, \theta)$ 的共轭调和函数且

1) 设 $g_{l1}(\rho, \theta), g_{l2}(\rho, \theta)$ 在 L_S 内有一阶连续的偏导数且满足柯西-黎曼(C-R)条件:

$$\frac{\partial g_{l1}(\rho, \theta)}{\partial \rho} = \frac{\partial g_{l2}(\rho, \theta)}{\partial \theta}, \frac{\partial g_{l1}(\rho, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{\partial g_{l2}(\rho, \theta)}{\partial \rho}$$

则称 $w = G_l(z)$ 是 L_S 内的解析映射(解析函数).

$$G'_l(z) = \frac{\partial g_{l1}(\rho, \theta)}{\partial \rho} + i \frac{\partial g_{l2}(\rho, \theta)}{\partial \rho}$$

称为 $w = G_l(z)$ 在 z 点的导数.

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial \rho} \neq 0, (\text{或 } \frac{\partial g_{12}}{\partial \theta} \neq 0), \quad (13)$$

则 $G_l(\rho, \theta) = (g_{11}(\rho, \theta), g_{12}(\rho, \theta))$ 是 L_S 内的单叶映射.

证明. 应用定理1.

下面定理的证明过程同时给出了如何从调和函数构造它的共轭调和函数的方法.

定理5. 对 L_S 内任何的调和函数 $g_{11}(\rho, \theta)$, 均存在与它共轭的调和函数 $g_{12}(\rho, \theta)$.

证明. 因 $g_{11}(\rho, \theta)$ 在区域 L_S 内有二阶连续偏导数, 且

$$g_{11\rho\rho} + g_{11\theta\theta} = 0.$$

即 $g_{11\rho} - g_{11\theta}$ 在 L_S 内有一阶连续偏导数, 且 $g_{11\rho\rho} = -g_{11\theta\theta}$, 于是 $-g_{11\theta}d\rho + g_{11\rho}d\theta$ 为某个函数的全微分, 令

$$dg_{12}(\rho, \theta) = -g_{11\theta}d\rho + g_{11\rho}d\theta,$$

则

$$g_{12}(\rho, \theta) = \int_{(\rho_0, \theta_0)}^{(\rho, \theta)} -g_{11\theta}d\rho + g_{11\rho}d\theta + C,$$

其中 (ρ_0, θ_0) 是 L_S 内的定点, (ρ, θ) 是 L_S 内的动点, C 是一个与积分路径无关的任意常数. 将上式分别对 ρ, θ 求偏导数, 知

$$\frac{\partial g_{11}(\rho, \theta)}{\partial \rho} = \frac{\partial g_{12}(\rho, \theta)}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial g_{11}(\rho, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{\partial g_{12}(\rho, \theta)}{\partial \rho},$$

且 $\Delta g_{12}(\rho, \theta) = 0$. 故 $g_{12}(\rho, \theta)$ 是 $g_{11}(\rho, \theta)$ 的共轭调和函数.

3 具有扩张特性的直线和圆参数化形式

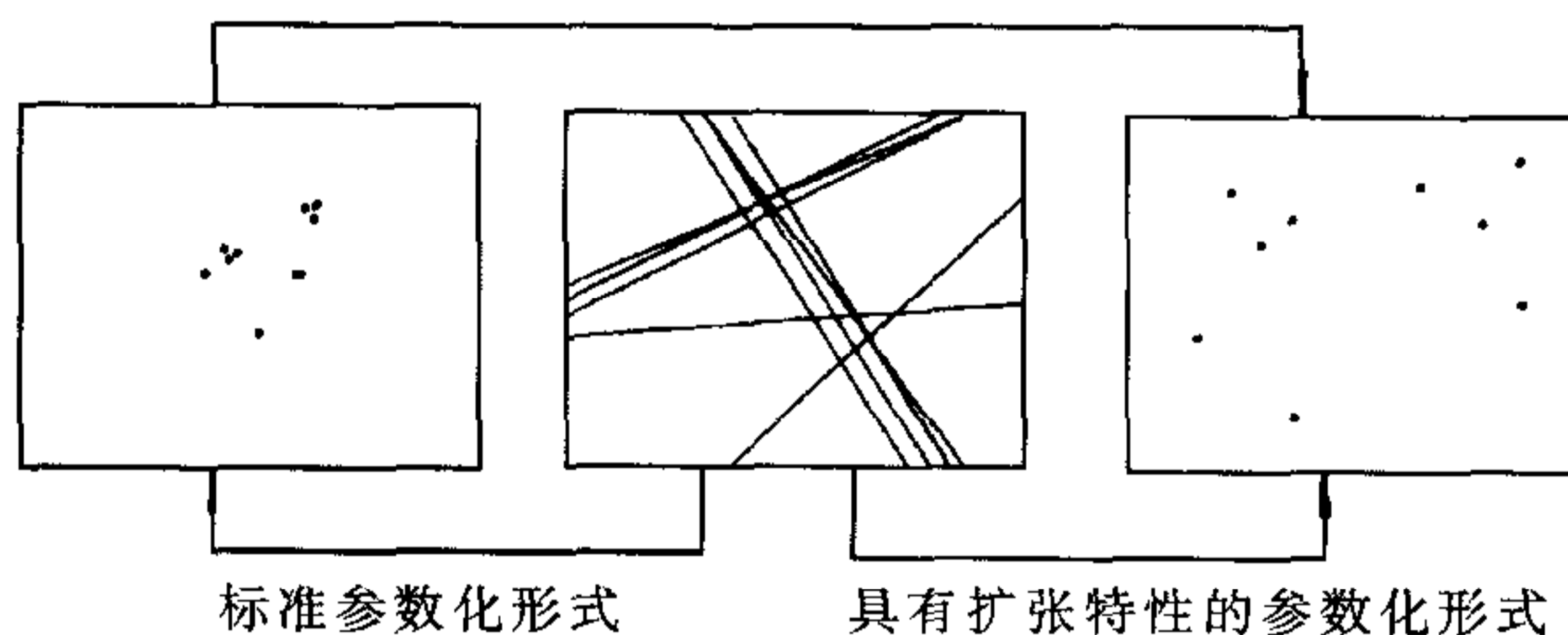


图1 标准参数空间到一般参数空间的扩张映射

3.1 扩张特性的意义

通常在实际应用中只满足唯一性条件是不够的. 因为研究直线(圆)参数化一般形式的一个重要目的在于: 标准参数空间内难以检测的直线(圆), 在一般参数空间内是能够检测的. 为了在一般参数空间内易于检测, 一般参数空间任意两点之间的距离

必须大于在标准参数空间内对应的两点之间的距离, 如图1所示.

它的数学刻画是: $\exists c > 1$, 使得 $\forall t_1, t_2 \in D$, 有

$$\|G(t_1) - G(t_2)\| \geq c \|t_1 - t_2\|, \quad (14)$$

我们称(14)为扩张性条件.

由式(14)可以看出, $\forall t_1, t_2 \in D, t_1 \neq t_2$ 必有 $G(t_1) \neq G(t_2)$, 即 $G(t)$ 是单叶映射. $G(t)$ 满足扩张性的必要条件是它满足唯一性条件. 这正是我们所需要的, 因为任何参数化形式起

1) 设二元实函数 $H(\rho, \theta)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数, 且满足下述 Laplace 方程:

$$\Delta H = H_{\rho\rho} + H_{\theta\theta} = 0, \text{ 称 } H(\rho, \theta) \text{ 是区域 } D \text{ 内的调和函数.}$$

码要满足唯一性条件. 因此在讨论扩张性时, 总假定 $G(t)$ 具有逆映射.

3.2 可微性与扩张性

为了讨论扩张性条件, 需要矩阵算子范数的概念如下:

$$\forall x \in R^n, \text{称 } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \text{ 为欧几里得范数. 令 } A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}, \text{ 称}$$

$$\|A\| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

为矩阵 A 算子范数. $\forall x \in R^n$, 显然有

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

对于算子范数, 有

$$\|A\| = \max\{\sigma \mid \sigma \in \Sigma(A)\},$$

其中 $\Sigma(A)$ 表示矩阵 A 所有奇异值的集合.

定理6. 设 $G(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$ 为凸集 D 上的可微映射, 若存在 $c > 1$ 使 $\forall t = (t_1, t_2, \dots, t_n)^T \in D$, 有

$$\min\{\sigma \mid \sigma \in \Sigma(D(G(t)))\} > c, \quad (15)$$

则 $G(t)$ 满足扩张性条件.

定理6的证明见附录.

定理6给出了 n 维到 n 维的可微映射为扩张映射的条件, 它可直接应用于直线与圆.

特别地, 对于直线不难计算 $D(G_l(t))$ 的两个奇异值分别为

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{g_{l1\rho}^2 + g_{l1\theta}^2 + g_{l2\rho}^2 + g_{l2\theta}^2} - \sqrt{[(g_{l1\rho} - g_{l2\theta})^2 + (g_{l1\theta} + g_{l2\rho})^2] \cdot [(g_{l1\rho} + g_{l2\theta})^2 + (g_{l1\theta} - g_{l2\rho})^2]}}{2},$$

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{g_{l1\rho}^2 + g_{l1\theta}^2 + g_{l2\rho}^2 + g_{l2\theta}^2} + \sqrt{[(g_{l1\rho} - g_{l2\theta})^2 + (g_{l1\theta} + g_{l2\rho})^2] \cdot [(g_{l1\rho} + g_{l2\theta})^2 + (g_{l1\theta} - g_{l2\rho})^2]}}{2},$$

因此有

推论3. 若 $G_l(\rho, \theta) = (g_{l1}(\rho, \theta), g_{l2}(\rho, \theta))$ 是 L_S 上的可微映射, 且 $\forall t = (\rho, \theta) \in L_S$,

$$g_{l1\rho}^2 + g_{l1\theta}^2 + g_{l2\rho}^2 + g_{l2\theta}^2 - \sqrt{[(g_{l1\rho} - g_{l2\theta})^2 + (g_{l1\theta} + g_{l2\rho})^2] \cdot [(g_{l1\rho} + g_{l2\theta})^2 + (g_{l1\theta} - g_{l2\rho})^2]} > 4, \quad (16)$$

则 $G_l(\rho, \theta)$ 满足扩张性条件.

推论4. 若 $G_l(\rho, \theta) = (g_{l1}(\rho, \theta), g_{l2}(\rho, \theta))$ 是解析映射, 若 $\forall t = (\rho, \theta) \in L_S$,

$$g_{l1\rho}^2 + g_{l1\theta}^2 - \sqrt{g_{l1\rho}^2 + g_{l1\theta}^2} > 4, \quad (17)$$

则 $G_l(\rho, \theta)$ 满足扩张性条件.

3.3 仿射性与扩张性

定理7. 仿射映射 $G(t) = At + b$ 满足扩张性的充要条件为 $A^T A$ 的最小特征值 $\lambda_{\min}(A^T A) > 1$.

证明. 充分性: 因为 $DG(t) = A$ 且 $\sigma_{\min}(A) = \sqrt{\lambda_{\min}(A^T A)} > 1$, 所以由定理6知, $G(t)$ 满

足扩张性条件.

必要性:(反证)若 $\lambda_{\min}(A^T A) \leq 1$. 由于 $\lambda_{\min}(A^T A) = \min_{t \neq 0} \frac{t^T A^T A t}{t^T t}$, 且 $\frac{t^T A^T A t}{t^T t}$ 是连续函数, 所以 $\forall c > 1, \exists t_0$ 使 $\frac{t_0^T A^T A t_0}{t_0^T t_0} < c$ 于是有 $\|A t_0\| < c \|t_0\|$. 令 t_1, t_2 使得 $t_0 = t_2 - t_1$, 则有 $\|A t_2 - A t_1\| < c \|t_2 - t_1\|$, 因此 $\|G(t_2) - G(t_1)\| = \|A t_2 - A t_1\| < c \|t_2 - t_1\|$, 矛盾.

如果 $\exists c > 1$, 使得 $\forall t_1, t_2, \|G(t_1) - G(t_2)\| = c \|t_1 - t_2\|$, 则 $G(t)$ 必满足扩张性. 对此有

定理8. $\exists c > 1$, 使得 $\forall t_1, t_2, \|G(t_1) - G(t_2)\| = c \|t_1 - t_2\|$ 的充分必要条件为

$$G(t) = cUt + t_0, \quad (18)$$

其中 U 为正交矩阵.

证明. 充分性: $\forall t_1, t_2, \|G(t_1) - G(t_2)\| = c \|Ut_1 - Ut_2\| = c \|U(t_1 - t_2)\| = c \|t_1 - t_2\|$.

必要性: 假定 $\exists c > 1$, 使得 $\forall t_1, t_2, \|G(t_1) - G(t_2)\| = c \|t_1 - t_2\|$. 令

$$g(t) = \frac{1}{c}(G(t) - G(0)),$$

则 $g(0) = 0$, 且 $\forall t_1, t_2$,

$$\|g(t_1) - g(t_2)\| = \|t_1 - t_2\|.$$

因此 $g(t)$ 为正交映射, 于是存在正交矩阵 U 使得 $g(t) = Ut$. 令 $t_0 = G(0)$, 则有

$$G(t) = cUt + t_0.$$

定理9. 设映射 G_1, G_2, \dots, G_n 满足扩张性, 则它们的复合映射仍满足扩张性.

注. 事实上, 在 G_1, G_2, \dots, G_n 中只须存在一个扩张因子 $c > 1$, 其它 $c = 1$ 时结论仍成立.

3.4 具有扩张特性的直线(圆)参数化形式的实例

实例1. 设 g_1, g_2, g_3 为非负严格单调增函数, 且 $|g'_i| > 1, i = 1, 2, 3$, 则 g_i 有逆函数 $g_i^{-1}, i = 1, 2, 3$. 令

$$(\mu, \xi) = G_l(\rho, \theta) = (g_1(\rho), g_2(\theta)), \quad (u, \phi, v) = G_c(\rho, \theta, r) = (g_1(\rho), g_2(\theta), g_3(r)).$$

于是

$$D(G_l(\rho, \theta)) = \begin{bmatrix} g'_1(\rho) & 0 \\ 0 & g'_2(\theta) \end{bmatrix}, \quad D(G_c(\rho, \theta, r)) = \begin{bmatrix} g'_1(\rho) & 0 & 0 \\ 0 & g'_2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & g'_3(r) \end{bmatrix}.$$

因 $|g'_i| > 1, i = 1, 2, 3$, 所以

$$\min\{\sigma \mid \sigma \in \Sigma(D(G_l(\rho, \theta)))\} = \min\{|g'_1(\rho)|, |g'_2(\theta)|\} > 1,$$

$$\min\{\sigma \mid \sigma \in \Sigma(D(G_c(\rho, \theta, r)))\} = \min\{|g'_1(\rho)|, |g'_2(\theta)|, |g'_3(r)|\} > 1.$$

由定理6知, G_l, G_c 满足扩张性条件. 求其逆映射

$$(\rho, \theta) = F_l(\mu, \xi) = G_l^{-1}(\mu, \xi) = (g_1^{-1}(\mu), g_2^{-1}(\xi)),$$

$$(\rho, \theta, r) = F_c(u, \phi, v) = G_c^{-1}(u, \phi, v) =$$

$$(g_1^{-1}(u), g_2^{-1}(\phi), g_3^{-1}(v)),$$

分别代入直线与圆标准参数形式, 得到具有扩张特性的参数化形式

$$g_1^{-1}(\mu) = x \cos[g_2^{-1}(\xi)] + y \sin[g_2^{-1}(\xi)],$$

$$[g_1^{-1}(v)]^2 = (x - g_1^{-1}(u) \cos[g_2^{-1}(\phi)])^2 + (y - g_1^{-1}(u) \sin[g_2^{-1}(\phi)])^2.$$

实例2. 设 g_1, g_2, g_3 为非负严格单调增函数, 且 1) $|g'_i| > 1, i=1, 2, 3$; 2) $\frac{2\pi}{M}g_1 \geq 1$, 其中 $M = \max g_2$. 令

$$(\mu, \xi) = G_l(\rho, \theta) = (g_1(\rho)\cos[\frac{2\pi}{M}g_2(\theta)], g_1(\rho)\sin[\frac{2\pi}{M}g_2(\theta)]),$$

$$(u, \phi, v) = G_c(\rho, \theta, r) = (g_1(\rho)\cos[\frac{2\pi}{M}g_2(\theta)], g_1(\rho)\sin[\frac{2\pi}{M}g_2(\theta)], g_3(r)),$$

于是

$$D(G_l(\rho, \theta)) = \begin{pmatrix} g'_1(\rho)\cos[\frac{2\pi}{M}g_2(\theta)] & -\frac{2\pi g_1(\rho)g'_2(\theta)}{M}\sin[\frac{2\pi}{M}g_2(\theta)] \\ g'_1(\rho)\sin[\frac{2\pi}{M}g_2(\theta)] & \frac{2\pi g_1(\rho)g'_2(\theta)}{M}\cos[\frac{2\pi}{M}g_2(\theta)] \end{pmatrix},$$

$$D(G_c(\rho, \theta, r)) = \begin{pmatrix} g'_1(\rho)\cos[\frac{2\pi}{M}g_2(\theta)] & -\frac{2\pi g_1(\rho)g'_2(\theta)}{M}\sin[\frac{2\pi}{M}g_2(\theta)] & 0 \\ g'_1(\rho)\sin[\frac{2\pi}{M}g_2(\theta)] & \frac{2\pi g_1(\rho)g'_2(\theta)}{M}\cos[\frac{2\pi}{M}g_2(\theta)] & 0 \\ 0 & 0 & g'_3(r) \end{pmatrix},$$

因此

$$D(G_l(\rho, \theta))^T D(G_l(\rho, \theta)) = \begin{pmatrix} [g'_1(\rho)]^2 & 0 \\ 0 & [\frac{2\pi g_1(\rho)g'_2(\theta)}{M}]^2 \end{pmatrix},$$

$$D(G_c(\rho, \theta, r))^T D(G_c(\rho, \theta, r)) = \begin{pmatrix} [g'_1(\rho)]^2 & 0 & 0 \\ 0 & [\frac{2\pi g_1(\rho)g'_2(\theta)}{M}]^2 & 0 \\ 0 & 0 & [g'_3(r)]^2 \end{pmatrix},$$

所以

$$\min\{\sigma | \sigma \in \Sigma(D(G_l(\rho, \theta)))\} > 1, \quad \min\{\sigma | \sigma \in \Sigma(D(G_c(\rho, \theta, r)))\} > 1.$$

由定理6知, G_l, G_c 满足扩张性条件. 求其逆映射

$$(\rho, \theta) = F_l(\mu, \xi) = G_l^{-1}(\mu, \xi) = \left(g_1^{-1}(\sqrt{\mu^2 + \xi^2}), g_2^{-1}\left(\frac{M}{2\pi}\arctan \frac{\xi}{\mu}\right) \right),$$

$$(\rho, \theta, r) = F_c(u, \phi, v) = G_c^{-1}(u, \phi, v) = \left(g_1^{-1}(\sqrt{u^2 + \phi^2}), g_2^{-1}\left(\frac{M}{2\pi}\arctan \frac{\phi}{u}\right), g_3^{-1}(v) \right),$$

分别代入直线和圆的标准参数化形式, 得到具有扩张特性的参数化形式

$$g_1^{-1}(\sqrt{\mu^2 + \xi^2}) = x\cos\left[g_2^{-1}\left(\frac{M}{2\pi}\arctan \frac{\xi}{\mu}\right)\right] + y\sin\left[g_2^{-1}\left(\frac{M}{2\pi}\arctan \frac{\xi}{\mu}\right)\right],$$

$$[g_3^{-1}(v)]^2 = \left(x - g_1^{-1}(\sqrt{u^2 + \phi^2})\cos\left[g_2^{-1}\left(\frac{M}{2\pi}\arctan \frac{\phi}{u}\right)\right] \right)^2 + \left(y - g_1^{-1}(\sqrt{u^2 + \phi^2})\sin\left[g_2^{-1}\left(\frac{M}{2\pi}\arctan \frac{\phi}{u}\right)\right] \right)^2.$$

4 具有凝视特征的直线参数化形式

在人类的视觉系统中, 视网膜的不同部分对外界刺激的敏感程度其空间分布是不均

匀的. 从生理结构上看, 视网膜上的视觉感受器(主要指锥体细胞)的空间分布是越趋向于视野中心(中央窝)密度越高, 而从中央窝往边缘越来越低. 相应地视网膜中心的视锐度最高, 逐渐往边缘测试时, 视锐度就会急剧下降. 视觉系统的这一特点保证了人类在观察外部世界时在凝视点附近(即视网膜中最敏感部分)具有最大的精度. 而在视网膜的边缘只有较低的分辨率. 因此, 视觉系统在把主要注意力集中于视野中心感兴趣部分的同时, 也能保持对其它部分的适度注意^[23,24]. 本节将用直线参数化形式来模拟人类视觉的这一凝视特征.

4.1 满足凝视特征的基本假设

设直线标准参数空间和一般参数空间分别为

$$L_S = \{(u, v) | u = \rho \cos \theta, v = \rho \sin \theta, 0 \leq \rho \leq \rho_{\max}, 0 < \theta \leq 2\pi\},$$

$$L_G = \{(\mu, \xi) | \mu = \rho' \cos \theta', \xi = \rho' \sin \theta', 0 \leq \rho' \leq \rho_{\max}, 0 \leq \theta' < 2\pi\}.$$

一般参数空间到标准参数空间的参数变换为 $(u, v) = F_l(\mu, \xi) (= (U(\mu, \xi), V(\mu, \xi)))$. 这里函数 $U(\mu, \xi), V(\mu, \xi)$ 与 $R(\mu, \xi), \Phi(\mu, \xi)$ 有下述关系

$$R(\mu, \xi) = \sqrt{U^2(\mu, \xi) + V^2(\mu, \xi)}, \Phi(\mu, \xi) = \arctan \frac{V(\mu, \xi)}{U(\mu, \xi)}.$$

假设当前的凝视点坐标为 $(0, 0)$, 则为了模拟人类视觉的凝视特征, $(u, v) = F_l(\mu, \xi) (= (U(\mu, \xi), V(\mu, \xi)))$ 必须满足下述基本假设

- 1) $(u, v) = F_l(\mu, \xi)$ 实现 L_G 到 L_S 的一一对应;
- 2) $(u, v) = F_l(\mu, \xi)$ 将圆心在 L_G 中心的圆周变为圆心在 L_S 中心的圆周;
- 3) 在 L_G 中, 距中心愈近分辨率愈高, 反之愈低. 如图2所示.

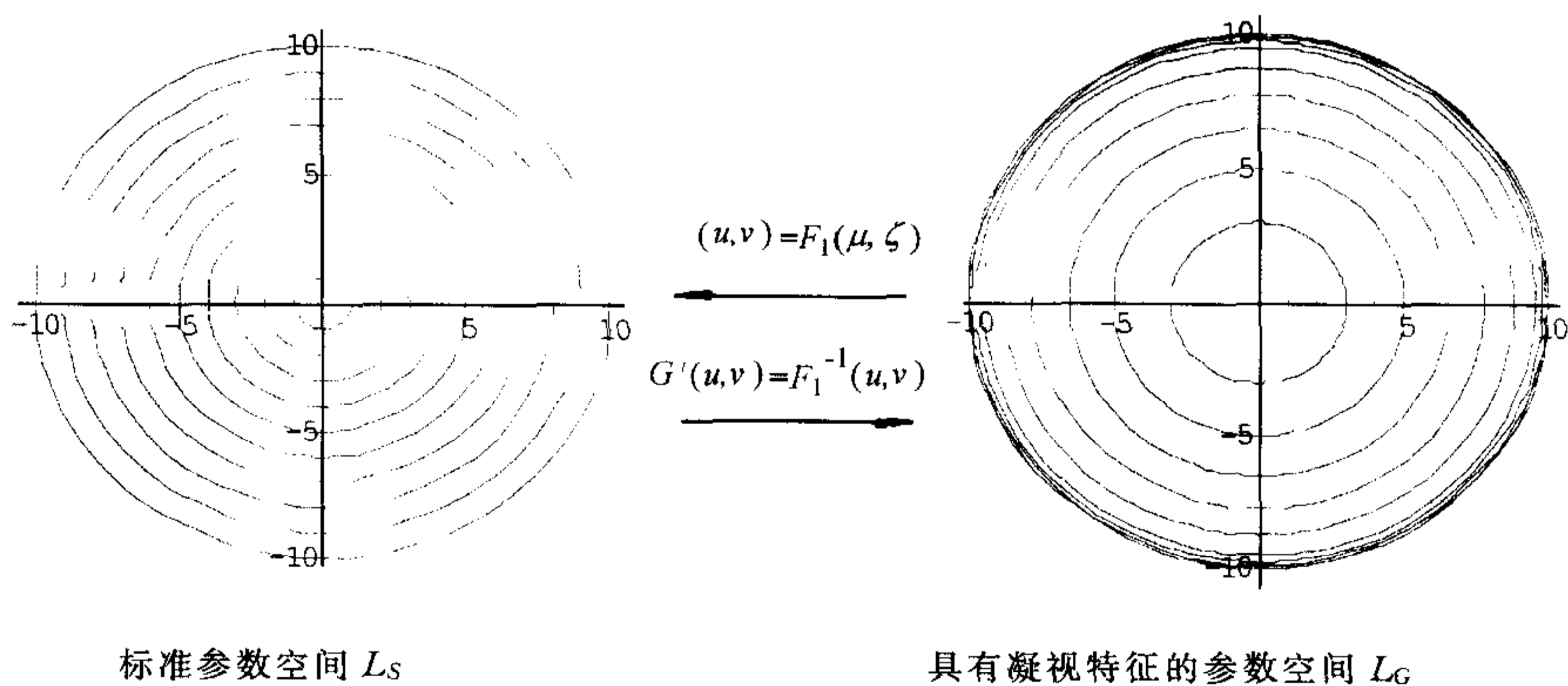


图2 在标准参数空间 L_S 中分辨率是均匀的; 在具有凝视特征的参数空间 L_G 中, 愈接近凝视中心分辨率愈高, 愈远离凝视中心分辨率愈低.

4.2 基本假设的数学刻划

基本假设1) 等价于 $F_l(L_G) = L_S$ 且 $(u, v) = F_l(\mu, \xi)$ 为单叶映射.

对于基本假设2), 有

命题1. 基本假设2) 成立的充分必要条件为: 存在分别满足条件1和条件2的函数 $C(t), \omega(\mu, \xi)$ 使得

$$U(\mu, \xi) = C(\sqrt{\mu^2 + \xi^2}) \cos \omega(\mu, \xi), \quad V(\mu, \xi) = C(\sqrt{\mu^2 + \xi^2}) \sin \omega(\mu, \xi).$$

(19), (20)

条件1. $C(t)$ 是 $[0, \rho'_{\max}]$ 上的非负函数,且 $C(t)=0$ 当且仅当 $t=0$;

条件2. $\forall 0 < \rho' \leq \rho'_{\max}, \omega(\mu, \xi)$ 将圆周 $\gamma_{\rho'} = \{(\mu, \xi) | \mu^2 + \xi^2 = \rho'^2\}$ 映满 $[0, 2\pi)$.

证明. 必要性:假定基本假设2)成立,则 $\forall 0 < \rho' \leq \rho'_{\max}$ 均存在一个正数 ρ 使得

$$F_l(\gamma_{\rho'}) = \{(u, v) | u^2 + v^2 = \rho^2\}, \tag{21}$$

当 $\rho' = 0$ 时, $\gamma_0 = \{(0, 0)\}$,显然 $F_l(\gamma_0) = \{(0, 0)\}$. 令 $c(\rho') = \rho, C(0) = 0$,则 $c(t)$ 满足条件1.

$\forall (\mu, \xi) \in \gamma_{\rho'}$,由 $C(t)$ 的定义

$$(U(\mu, \xi))^2 + (V(\mu, \xi))^2 = (C(\rho'))^2 = (C(\sqrt{\mu^2 + \xi^2}))^2,$$

于是存在 L_G 上的函数 $\omega(\mu, \xi)$ 使得式(19), (20)成立.

证 $\omega(\mu, \xi)$ 必满足条件2. 假若不满足条件2,则存在 $\omega_0 \in [0, 2\pi)$ 使得 $\forall (\mu, \xi) \in \gamma_{\rho'}$, $\omega(\mu, \xi) \neq \omega_0$,于是 $\forall (\mu, \xi) \in \gamma_{\rho'}$ 有

$$(U(\mu, \xi), V(\mu, \xi)) \neq (C(\rho')\cos\omega_0, C(\rho')\sin\omega_0),$$

而 $(C(\rho')\cos\omega_0, C(\rho')\sin\omega_0) \in \{(u, v) | u^2 + v^2 = \rho^2\}$,这样必有

$$F_l(\gamma_{\rho'}) \neq \{(u, v) | u^2 + v^2 = \rho^2\},$$

与(21)式矛盾. 所以 $\omega(\mu, \xi)$ 满足条件(2).

充分性:显然成立.

对于基本假设3),它可用 $C(t)$ 的性质来刻划.

令

$$\gamma_{\rho'_1}: \mu^2 + \xi^2 = \rho'^2_1, \quad \gamma_{\rho'_2}: \mu^2 + \xi^2 = \rho'^2_2$$

是 L_G 中接近中心的两个圆周,不妨假定 $\rho'_2 > \rho'_1$. 对应于 L_S 中的两个圆周设为

$$\Gamma_{\rho'_1}: u^2 + v^2 = C(\rho'_1)^2, \quad \Gamma_{\rho'_2}: u^2 + v^2 = C(\rho'_2)^2.$$

由于接近中心有较高的分辨率,因此下式必须得到满足

$$C(\rho'_2) - C(\rho'_1) < \rho'_2 - \rho'_1.$$

因此有

$$C'(\rho'_1) = \lim_{\rho'_2 \rightarrow \rho'_1} \frac{C(\rho'_2) - C(\rho'_1)}{\rho'_2 - \rho'_1} < 1.$$

当 $\gamma_{\rho'_1}, \gamma_{\rho'_2}$ 远离中心时,有较低分辨率,所以下式必须得到满足

$$C(\rho'_2) - C(\rho'_1) > \rho'_2 - \rho'_1.$$

因此有

$$C'(\rho'_1) = \lim_{\rho'_2 - \rho'_1} \frac{C(\rho'_2) - C(\rho'_1)}{\rho'_2 - \rho'_1} > 1.$$

根据上面的分析,分辨率可由 $C(t)$ 的导数来刻划. 为了描述分辨率由高到低的连续变化过程, $C'(t)$ 必须满足

- 1) $C'(t)$ 是 $[0, \rho'_{\max}]$ 上单调递增的连续函数;
- 2) $C'(\rho'_{\max}) > 1, C'(0) = \epsilon$ (ϵ 为小正数或0).

总结上述讨论,具有凝视特征的直线参数化形式可在下列条件下刻划

- a) $F_l(\mu, \xi) = (U(\mu, \xi), V(\mu, \xi))$ 具有性质: $F_l(L_G) = L_S$ 且为 L_G 上的单叶映射;
- b) $\exists C(t), \omega(\mu, \xi)$ 分别满足条件 b1), b2)使式(19), (20)成立:
 - b1) $C(t)$ 是 $[0, \rho'_{\max}]$ 上的非负可微函数, $C(t) = 0$ 当且仅当 $t = 0$;它的导函数 $C'(t)$ 在

$[0, \rho'_{\max}]$ 上单调递增连续且 $C'(\rho'_{\max}) > 1, C'(0) = \epsilon$ (ϵ 为小正数或0);

b2) $\forall 0 < \rho' \leq \rho'_{\max}, \omega(\mu, \xi)$ 将圆周 $\gamma_{\rho'} = \{(\mu, \xi) | \mu^2 + \xi^2 = \rho'^2\}$ 映满 $[0, 2\pi)$.

4.3 凝视特征的主要定理

对于直线参数化形式, 验证条件 a) 是比较麻烦的工作. 事实上只需对条件 (b) 中的条件 b1), b2) 稍作修改, 条件 a) 可得到满足. 将它归结为下述定理:

定理10. 设 $F_l(\mu, \xi) = (U(\mu, \xi), V(\mu, \xi))$, 如果存在分别满足条件 A1), A2) 的函数 $C(t), \omega(\mu, \xi)$ 使式 (19), (20) 成立, 则 $F_l(\mu, \xi)$ 具有凝视特征.

A1) $C(t)$ 是 $[0, \rho'_{\max}]$ 上可微的非负函数, $C(t) = 0, C(\rho'_{\max}) = \rho_{\max}$; 它的导函数 $C'(t)$ 在 $[0, \rho'_{\max}]$ 上单调递增连续且 $C'(\rho'_{\max}) > 1, C'(0) = \epsilon$ (ϵ 为小正数或0);

A2) $\forall 0 < \rho' \leq \rho'_{\max}, \omega(\mu, \xi)$ 将圆周 $\gamma_{\rho'} = \{(\mu, \xi) | \mu^2 + \xi^2 = \rho'^2\}$ 单叶映满 $[0, 2\pi)$. 这里称 $C(t)$ 的导函数 $c(t) = C'(t)$ 为分辨率函数. 定理10的证明见附录.

从定理10, 我们有下述非常有用的推论:

推论5. 设函数 $C(t)$ 满足性质 A1), 则

$$F_l(\mu, \xi) = (C(\sqrt{\mu^2 + \xi^2}) \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \xi^2}}, C(\sqrt{\mu^2 + \xi^2}) \frac{\xi}{\sqrt{\mu^2 + \xi^2}}) \quad (22)$$

具有凝视特征.

证明. 定义 $\omega(\mu, \xi)$ 为 (μ, ξ) 对应的位置向量与 μ 轴正向之间的夹角, 它可由反正切函数来表示

$$\omega(\mu, \xi) = \arctan \frac{\xi}{\mu},$$

显然 $\omega(\mu, \xi)$ 满足性质 A2). 不难看出

$$\cos \omega(\mu, \xi) = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \xi^2}}, \sin \omega(\mu, \xi) = \frac{\xi}{\sqrt{\mu^2 + \xi^2}}.$$

故由定理10, $F_l(\mu, \xi) = (C(\sqrt{\mu^2 + \xi^2}) \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \xi^2}}, C(\sqrt{\mu^2 + \xi^2}) \frac{\xi}{\sqrt{\mu^2 + \xi^2}})$ 具有凝视特征.

式(22)可以更简洁地表示为 $(\rho, \theta) = (C(\rho'), \tilde{\omega})$, 其中 $(\rho, \theta), (\rho', \tilde{\omega})$ 分别为标准参数空间和一般参数空间的极坐标表示. 由于 $\theta = \tilde{\omega}$, (22) 式表明映射 $F_l(\mu, \xi)$ 不仅满足凝视特性, 它同时满足文献[17~19]中定义的均匀特性.

关于具有凝视特征的直线参数化形式的构造主要归结为分辨率函数的构造, 构造方法与圆类似(见本文5.3节).

5 具有凝视特征的圆参数化形式

5.1 凝视点到圆之间距离的度量

为了给出具有凝视特征的圆参数化形式, 首先要给出凝视点到圆之间距离的一种适当的度量. 在图3中的圆, 如何判定它们是否在给定的凝视范围之内, 从图中不难看出 C_1 在凝视范围之内, 而对 C_2, C_3, C_4, C_5 则难以从直觉上来判断. 因此必须给出判断度量标准. 这就需要定义凝视点到圆之间的距离.

不失一般性, 在本文中总假定凝视点 F 在图象平面坐标原点. 圆 $O(\rho, \theta, r)$ 的标准参数化形式为 $r^2 = (x - \rho \cos \theta)^2 + (y - \rho \sin \theta)^2$, 其中 (ρ, θ) 为圆心的极坐标, 即圆的位置参

数, r 是半径参数.

下面将给出 F 到 $O(\rho, \theta, r)$ 之间距离的两种度量 d_M, d_m .

定义2. $d_M(F, O(\rho, \theta, r))$ 为凝视点 F 到圆 $O(\rho, \theta, r)$ 上点之间距离的平均值, 即

$$d_M(F, O(\rho, \theta, r)) = \frac{1}{2\pi r} \int_{O(\rho, \theta, r)} \sqrt{x^2 + y^2} ds, \quad (23)$$

其中 (x, y) 是圆 $O(\rho, \theta, r)$ 上点的直角坐标, ds 为弧长元素.

下面考虑积分(23), 对于圆 $O(\rho, \theta, r)$ 上关于直线 L 的对称点 (x, y) 与 (x', y') (如图4所示)有

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

所以函数在 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在直线 L 两边的半圆 S_1 和 S_2 上积分相等, 于是

$$d_M(F, O(\rho, \theta, r)) = \frac{1}{\pi r} \int_{S_1} \sqrt{x^2 + y^2} ds.$$

由于 $(x, y) \in S_1$ 有

$$\begin{cases} x = r \cos \tilde{\omega} + \rho \cos \theta \\ y = r \sin \tilde{\omega} + \rho \sin \theta \end{cases}, \theta \leq \tilde{\omega} \leq \pi + \theta, \quad ds = r d\tilde{\omega},$$

所以

$$d_M(F, O(\rho, \theta, r)) = \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\pi+\theta} \sqrt{(r \cos \tilde{\omega} + \rho \cos \theta)^2 + (r \sin \tilde{\omega} + \rho \sin \theta)^2} d\tilde{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\pi+\theta} \sqrt{\rho^2 + r^2 + 2\rho r \cos(\tilde{\omega} - \theta)} d\tilde{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\rho^2 + r^2 + 2\rho r \cos(\tilde{\omega})} d\tilde{\omega}. \quad (24)$$

由此可推出

$$d_M(F, O(\rho, \theta, r)) = \frac{2(\rho + r)E(\frac{4\rho r}{(\rho + r)^2})}{\pi}, \quad (25)$$

其中 E 是第一类椭圆函数.

定义3. $d_m(F, O(\rho, \theta, r))$ 为凝视点 F 到圆 $O(\rho, \theta, r)$ 上点之间距离平方均值的平方根, 即

$$d_m(F, O(\rho, \theta, r)) = \sqrt{\frac{1}{2\pi r} \int_{O(\rho, \theta, r)} (x^2 + y^2) ds}. \quad (26)$$

用类似方法, 可推知

$$d_m(F, O(\rho, \theta, r)) = \sqrt{\rho^2 + r^2}. \quad (27)$$

上述所定义的距离 d_M, d_m 满足如下基本性质:

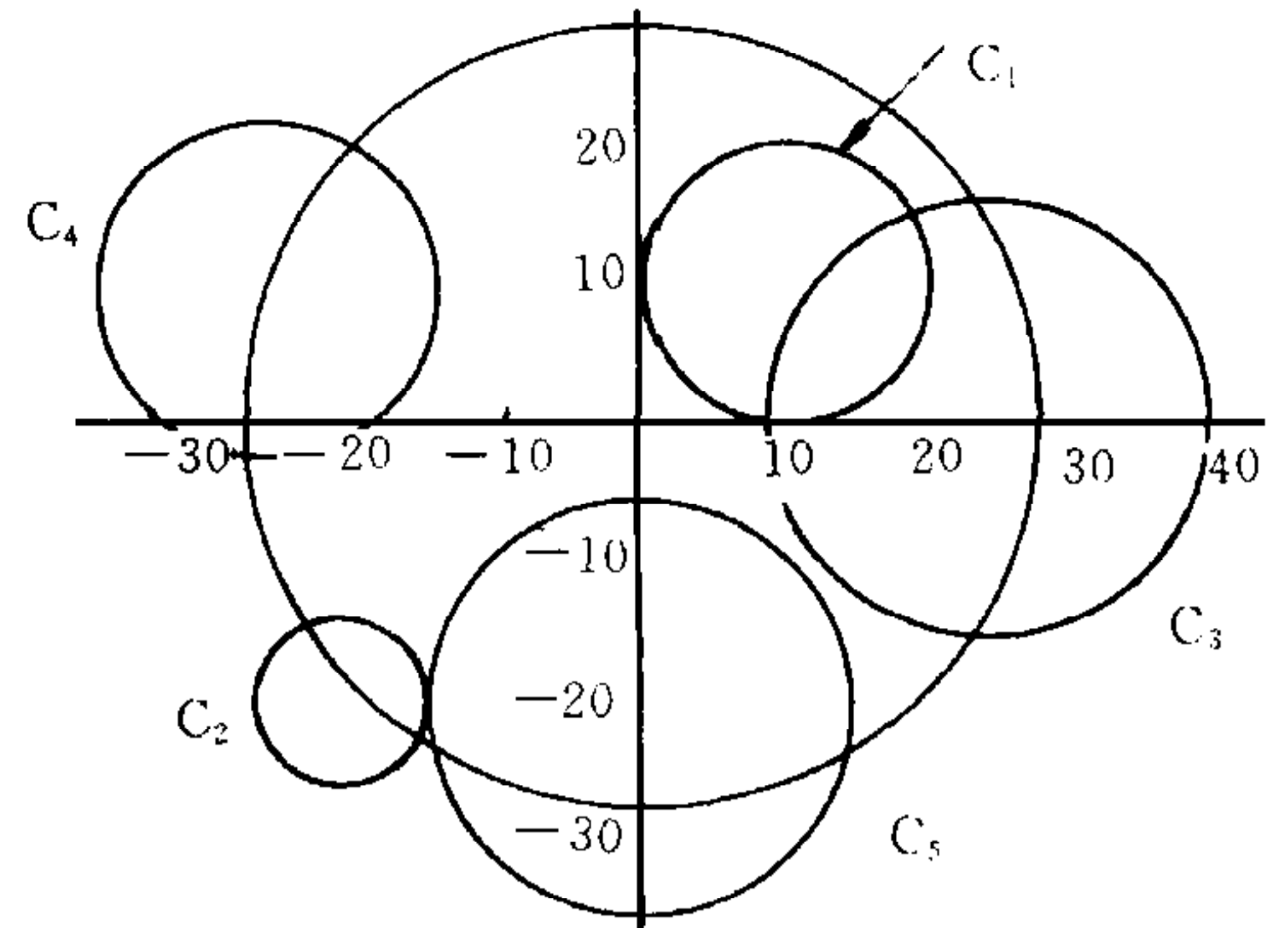


图3 凝视点在中心, 凝视半径为27. $C_1: (x-10)^2 + (y-10)^2 = 100, C_2: (x+20)^2 + (y+20)^2 = 25,$
 $C_3: (x - \sqrt{575})^2 + y^2 = 225, C_4: (x+25)^2 + (y-10)^2 = 144, C_5: x^2 + (y+20)^2 = 255.$
 两种距离的度量: 在距离 d_M 下, C_1, C_3, C_5 在凝视范围内; 在距离 d_m 下 C_1, C_5 在凝视范围内.

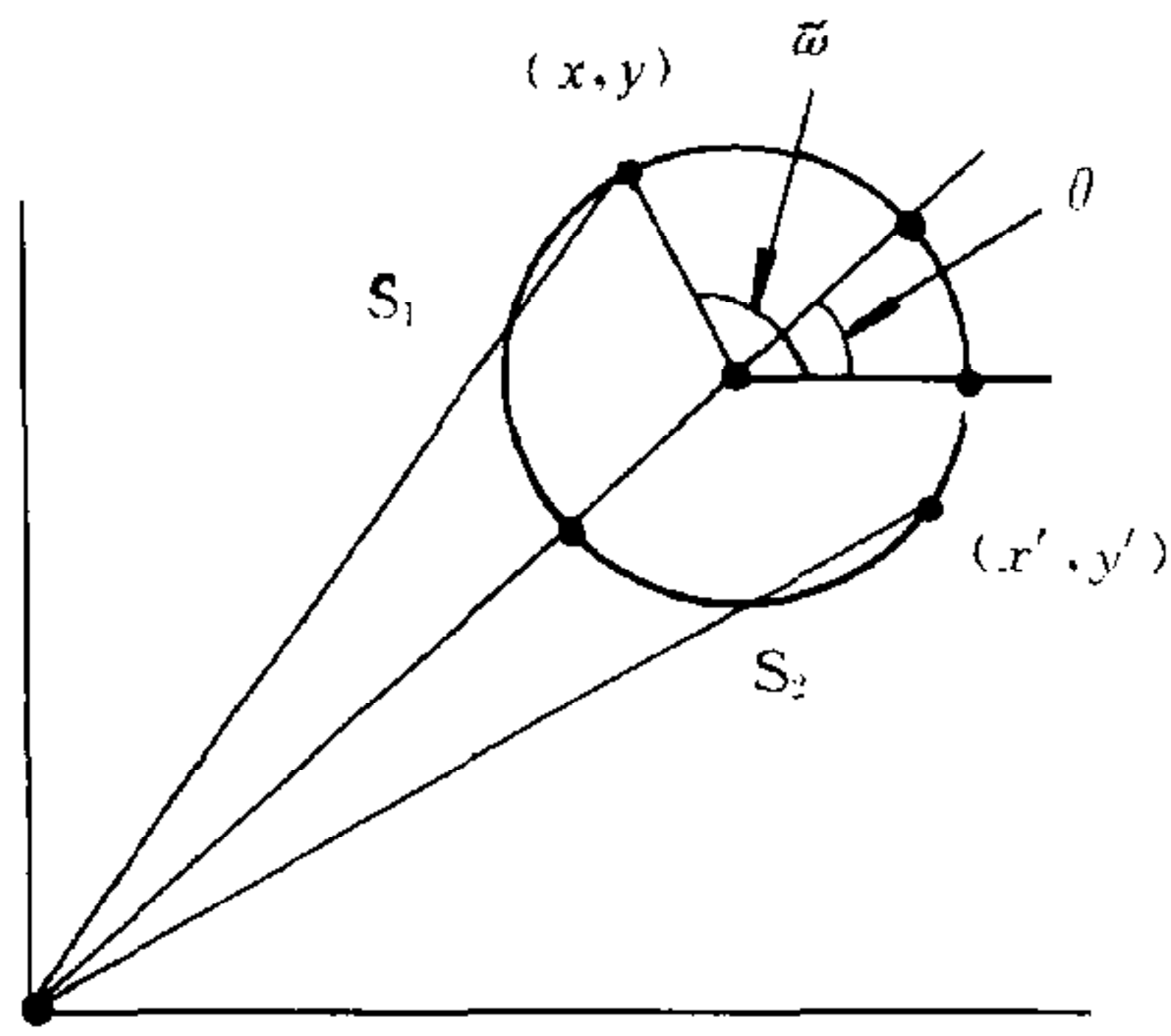


图4 凝视点 F 与 $O(\rho, \theta, r)$ 之间距离

- 1) 当圆心与凝视点重合时, 距离均等于圆的半径;
- 2) 距离仅与圆的半径 r 和关于凝视点位置的径向参数有关, 而与角参数无关;
- 3) 若 $(\rho_1, r_1) = s(\rho_2, r_2)$, 当 $s > 1$ 时, 则 $d(F, O(\rho_1, r_1)) > d(F, O(\rho_2, r_2))$; 当 $s < 1$ 时, 则 $d(F, O(\rho_1, r_1)) < d(F, O(\rho_2, r_2))$.

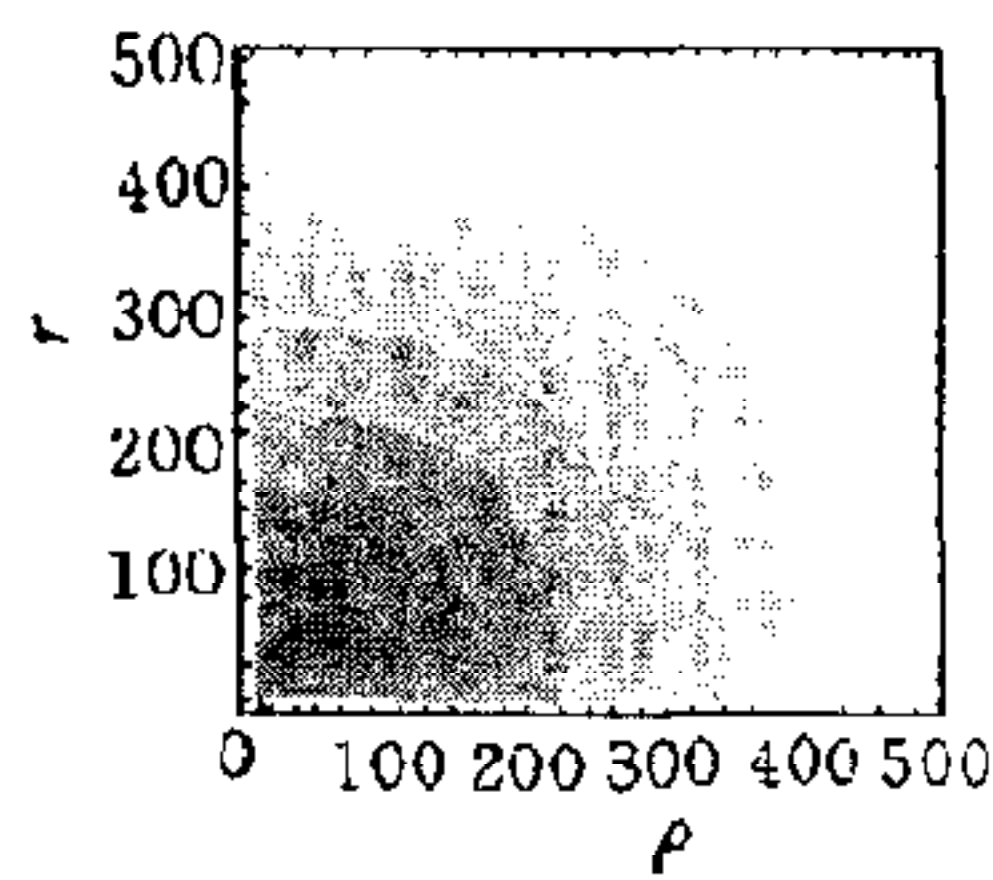
这些性质与我们的直觉是一致的. 以后在一般情况下论及距离时, 均假定具有这些性质.

d_M, d_m 的度量效果是不相同的, 见表1.

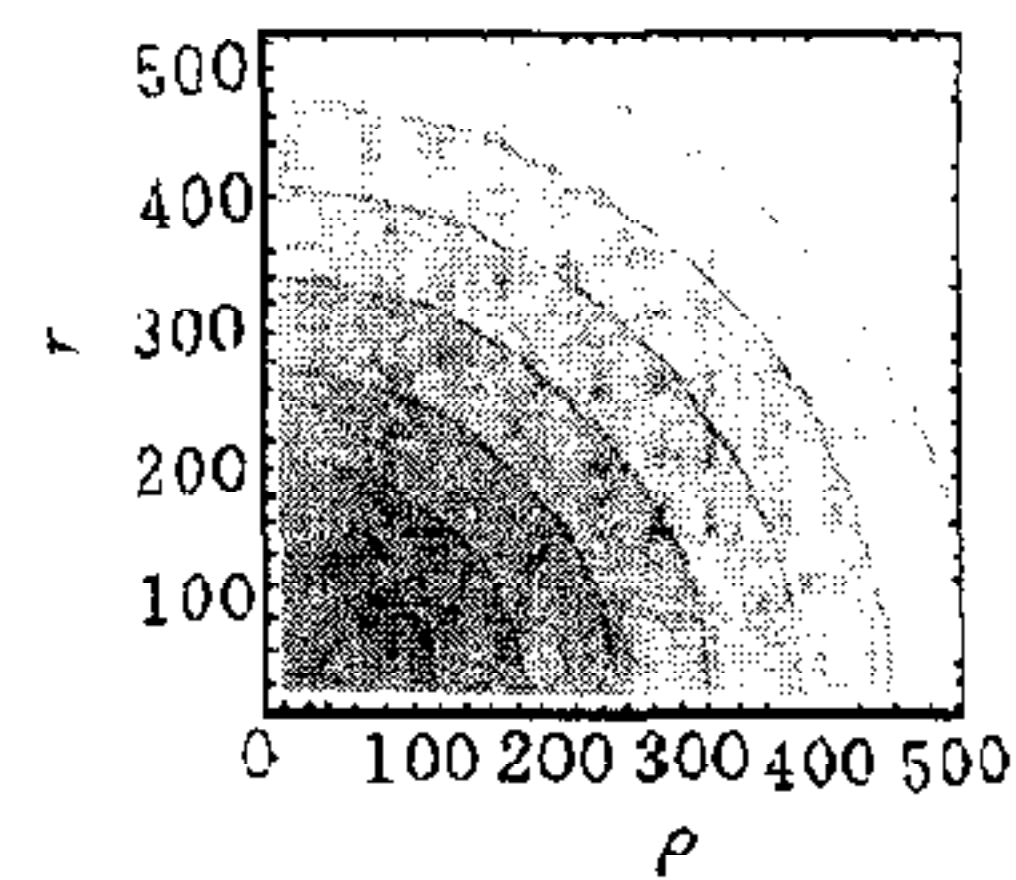
表1 图3中的圆在两种距离之下的度量结果

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
d_M	15.973 8	28.505 6	26.388 9	28.280 3	22.929 6
d_m	17.320 5	28.722 8	28.284 2	29.478 8	25.000 0

从表中可以看出: 在距离 d_M 下, C_1, C_3, C_5 在凝视范围内; 在距离 d_m 下, C_1, C_5 在凝视范围内. 因此, d_M 与 d_m 更合理、更精细. 它们的性态如图5所示.



(a) $d_M(\rho, r)$ 的等值图示



(b) $d_m(\rho, r)$ 的等值图示

图5 二种不同距离下的等值图

总结上述讨论, 有

命题2. 设凝视点为坐标原点, 凝视半径为 R :

1) 在度量 d_M 下, 标准参数空间中的点集

$$\{(\rho, \theta, r) \mid \frac{2(\rho + r)E(\frac{4\rho r}{(\rho + r)^2})}{\pi} < R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \quad (28)$$

所表示的圆均在凝视范围内.

2) 在度量 d_m 下, 标准参数空间中的点集:

$$\{(\rho, \theta, r) \mid \sqrt{\rho^2 + r^2} < R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \quad (29)$$

所表示的圆均在凝视范围内.

5.2 具有凝视特征的圆参数化形式

本节中假定凝视点 F 在图象中心, 即 F 的坐标为 $(0, 0)$. 给定凝视点 F 到圆 $O(\rho, \theta, r)$ 之间的一段距离 $d(O(\rho, \theta, r))$, 通常 $d(O(\rho, \theta, r))$ 与圆的方向参数 θ 无关, 简记为 $d(\rho, r)$. 在讨论凝视特征时, 为了避免过度的复杂性, 我们假定圆的一般参数 (u, ϕ, v) 与标准参数 (ρ, θ, r) 之间的映射具有下述形式:

$$(u, \phi, v) = (g_1(\rho, r), \Phi(\theta), g_2(\rho, r)), \quad (0 \leq \rho \leq \rho_{\max}, 0 \leq r \leq r_{\max}, 0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

其中 $\phi = \Phi(\theta)$ 为单调连续函数. 这样标准参数的二维子空间 $S_{\theta_0} = \{(\rho, \theta_0, r)\}$ 对应于一般参数的二维子空间 $E_{\phi_0} = \{(u, \Phi(\theta_0), v)\}$. 因距离 $d(\rho, r)$ 与圆的参数 θ 无关, 所以可将问题限制在 $S_0 = \{(\rho, 0, r)\}$ 和对应的 E_0 上来讨论. S_0 中的参数简记为 (ρ, r) , E_0 中的参数简记为 (u, v) .

由凝视特征知, 当圆愈接近凝视点, 对它的分辨率愈高; 反之愈低. 很显然, 与凝视点距离相同的圆必具有相同的分辨率. 也就是说, 当 $d(\rho, r)$ 愈小时, 对应的凝视参数空间的点有较高的分辨率, 反之愈低. 具有相同距离 $d(\rho, r)$ 的参数空间的点, 在凝视参数空间中它们的分辨率是相同的. 这样分辨率可以看作是距离 $d(\rho, r)$ 的单值函数, 记为 $c(t)$, 其中 $t = d(\rho, r) \in [0, d_{\max}]$, 且具有凝视特征: $c(t)$ 在 $[0, d_{\max}]$ 上连续单调递减, 且 $c(0) > 1, 0 < c(d_{\max}) < 1$.

为了用圆的一般参数化形式来刻划凝视特征, 必须将具有凝视特征的分辨率函数 $c(t)$ 与一般参数的二维子空间 E_0 中的参数 (u, v) 联系起来. 在标准参数的二维子空间 S_0 内, 我们将具有相同距离 $t (= d(\rho, r))$ 的 (ρ, r) 点, 对应在 E_0 中以原点为中心的某一个圆上. 由于相同距离 $t (= d(\rho, r))$ 的点 (ρ, r) 有相同的分辨率, 因此可以用在 E_0 中相应圆的半径 $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ 的变化率来反映, 即当 (ρ, r) 在凝视点附近有较小的变化时 (注意: 这里“附近”、“变化”是指在距离 d 意义下), 将引起 w 的值有较大的变化; 在凝视范围之外, 较大的变化也只能引起 w 的值有较小的变化. 亦即

$$\frac{dw}{dt} = c(t), (t = d(\rho, r), w = \sqrt{u^2 + v^2}). \tag{30}$$

令 $C(t) = \int_0^t c(\tau) d\tau$, 于是有

$$\sqrt{u^2 + v^2} = C(d(\rho, r)). \tag{31}$$

为了保证一般参数化满足唯一性条件, 令

$$\arg(u, v) = \arg(\rho, r), \tag{32}$$

其中 \arg 是幅角函数. 这样就有

$$u = C(d(\rho, r)) \cos(\arg(\rho, r)), \quad v = C(d(\rho, r)) \sin(\arg(\rho, r)). \tag{33}$$

引理1. 下述映射 $(u, \phi, v) = G_c(\rho, \theta, r)$:

$$u = C(d(\rho, r)) \cos(\arg(\rho, r)), \quad v = C(d(\rho, r)) \sin(\arg(\rho, r)), \quad \phi = \Phi(\theta) \tag{34}$$

具有逆映射, 其中 $\Phi(\theta)$ 为单调连续函数.

引理1的证明见附录.

总结上述讨论有下述定理:

定理11. 设圆的标准参数空间为 $C_s = [0, \rho_{\max}] \times [0, 2\pi) \times [0, r_{\max}]$, $c(t)$ 为 $[0, d_{\max}]$ 上连续单调递减函数, 且 $c(0) > 1, 0 < c(d_{\max}) < 1$. $C(t)$ 为分辨率函数 $c(t)$ 的原函数, $\Phi(\theta)$ 为单调连续函数, 记

$$(\rho, \theta, r) = (P(u, v), \Theta(\phi), R(u, v))$$

为(34)式的逆映射, 则下述圆参数化形式

$$(x - P(u, v) \cos \Theta(\phi))^2 + (y - P(u, v) \sin \Theta(\phi))^2 = R^2(u, v) \tag{35}$$

具有凝视特征.

当 $d = d_M, d_m$ 时, 我们给出 $(\rho, \theta, r) = (P(u, v), \Theta(\phi), R(u, v))$ 的具体形式. 从(34)

式,有

$$d(\rho, r) = C^{-1}(\sqrt{u^2 + v^2}), \quad \arg(\rho, r) = \arg(u, v), \quad \theta = \Phi^{-1}(\phi); \quad (36)$$

由式(36b)知

$$\rho = \sqrt{\rho^2 + r^2} \cos(\arg(u, v)), \quad r = \sqrt{\rho^2 + r^2} \sin(\arg(u, v)). \quad (37)$$

当 $d(\rho, r) = \frac{2(\rho+r)E(\frac{4\rho r}{(\rho+r)^2})}{\pi}$ 时,利用式(36), (37)可解出

$$\begin{cases} \rho = \frac{\pi C^{-1}(\sqrt{u^2 + v^2}) \cos(\arg(u, v))}{2(\cos(\arg(u, v)) + \sin(\arg(u, v))) E(\frac{2\sin(2\arg(u, v))}{1 + \sin(2\arg(u, v))})}, \\ r = \frac{\pi C^{-1}(\sqrt{u^2 + v^2}) \sin(\arg(u, v))}{2(\cos(\arg(u, v)) + \sin(\arg(u, v))) E(\frac{2\sin(2\arg(u, v))}{1 + \sin(2\arg(u, v))})}, \\ \theta = \Phi^{-1}(\phi); \end{cases} \quad (38)$$

当 $d(\rho, r) = \sqrt{\rho^2 + r^2}$ 时,同理可解出

$$\begin{cases} \rho = C^{-1}(\sqrt{u^2 + v^2}) \cos(\arg(u, v)), \\ r = C^{-1}(\sqrt{u^2 + v^2}) \sin(\arg(u, v)), \\ \theta = \Phi^{-1}(\phi). \end{cases} \quad (39)$$

5.3 具有凝视特征的构造方法

在本节中,令圆的标准参数空间为 $C_s = [0, S] \times [0, 2\pi) \times [0, S]$, 一般参数空间为 $C_G = [0, G] \times [0, H) \times [0, G]$. 由上节讨论知,为了构造具有凝视特性圆参数化形式,只须确定函数 $c(t)$ 与 $\phi = \Phi(\theta)$. 由于 $\phi = \Phi(\theta)$ 是单调函数,且 $[0, H) = \Phi([0, 2\pi))$. 这样可取

$$\phi = \Phi(\theta) = \frac{H}{2\pi} \theta. \quad (40)$$

以下主要讨论分辨率函数 $c(t)$. 首先, $c(t)$ 必须满足

$$\int_0^{d_{\max}} c(t) dt = \sqrt{2} G, \quad (41)$$

其中 $d_{\max} = d(S, S)$, d 是在凝视点到圆之间的某种距离. 其次,假定凝视半径为 R , 由于在凝视区域的边缘分辨率通常取1, 即 $c(t)$ 必须满足

$$c(R) = 1. \quad (42)$$

最后,假定最大与最小分辨率分别为 $M > 1, m < 1$, 则 $c(t)$ 还必须满足

$$c(0) = M, c(d_{\max}) = m. \quad (43)$$

如果给定 S, G, R, M, m , 问题就归结为: 求满足条件(41~43)的严格单调减函数 $c(t)$. 很可惜这个问题有时是无解的, 因为根据 $c(t)$ 严格单调减性质, 从(41~43)可推出

$$\frac{(M - m)R + d_{\max}m}{\sqrt{2}} < G < \frac{(M - 1)R + d_{\max}}{\sqrt{2}}. \quad (44)$$

一旦这些量不满足不等式(44), 就无法构造出分辨率函数 $c(t)$.

在这些参数中, S 通常是已知的, 从而 d_{\max} 也是已知的. 凝视半径 R 是非常重要的参数, 应该事先被指定.

下面给出构造分辨率函数 $c(t)$ 的两种方法:

直接构造方法. 给定 d_{\max}, R, M, m , 按下述步骤构造 $c(t)$

- 1) 选取严格单调减数列 $\{y_i\}_{i=0}^I$, 使 $y_0 = M, y_{i0} = 1, y_I = m$;
- 2) 选取严格单调增数列 $\{t_i\}_{i=0}^I$, 使 $t_0 = 0, t_{i0} = R, t_I = d_{\max}$;

3) 构造 $c(t) = \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i}(t - t_i) + y_i, t \in [t_i, t_{i+1}], i = 0, 1, 2, \dots, I - 1$.

此时, $G = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{d_{\max}} c(t) dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{I-1} (y_i + y_{i+1})(t_{i+1} - t_i)$.

令 Y^* 为所有满足 1) 的严格单调减数列 $\{y_i\}_{i=0}^I$ 的集合, T^* 为所有满足 2) 的严格单调增数列 $\{t_i\}_{i=0}^I$ 的集合, 则对 (Y^*, T^*) 中的任一对数列 (Y, T) , 均对应于一个分辨率函数 $c(t)$, 记为 $c_{(Y,T)}(t)$. 不难推出这些函数之间具有下述性质:

a) 若 $T_1 < T_2$, 则对任意的 $Y \in Y^*$, 有

$$G_{(Y,T_1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{d_{\max}} c_{(Y,T_1)}(t) dt < \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{d_{\max}} c_{(Y,T_2)}(t) dt = G_{(Y,T_2)};$$

b) 若 $Y_1 < Y_2$, 则对任意的 $T \in T^*$, 有

$$G_{(Y_1,T)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{d_{\max}} c_{(Y_1,T)}(t) dt < \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{d_{\max}} c_{(Y_2,T)}(t) dt = G_{(Y_2,T)}.$$

根据性质 a), b), 可适当地选择 (Y, T) , 使得一般参数空间有合适的 G 值.

严格单调参数族方法. 若 $c(t, a, b, c, d)$ 对每一组参数 (a, b, c, d) 都是 $t \geq 0$ 的严格单调函数, 则称它为严格单调参数族. 给定一个严格单调参数族, 可根据给定的 d_{\max}, R, M, m, G 得关于参数 (a, b, c, d) 的方程组

$$\begin{cases} c(0, a, b, c, d) = M, \\ c(d_{\max}, a, b, c, d) = m, \\ c(R, a, b, c, d) = 1, \\ \int_0^{d_{\max}} c(t, a, b, c, d) dt = \sqrt{2} G. \end{cases} \tag{45}$$

通过解上述方程组, 可确定所需要的分辨率函数.

下面给出两种有用的严格单调参数族.

1) $c(t, a, b, c, d) = a(b + dt)^{-c} (a > 0, b > 0, c > 0, d > 0)$.

对每一对参数 (a, b, c, d) , $c(t, a, b, c, d)$ 都是 $[0, d_{\max}]$ 上的严格单调减函数. 对此, 方程组 (45) 化为

$$ab^{-c} = M, \tag{46}$$

$$a(b + d_{\max})^{-c} = m, \tag{47}$$

$$a(b + R)^{-c} = 1, \tag{48}$$

$$\frac{a(b^{1-c} - b(b + d_{\max})^{-c}) - d_{\max}((b + d_{\max})^{-c})}{\sqrt{2}(c - 1)} = G. \tag{49}$$

给定 $d_{\max} = 512\sqrt{2}, M = 10, m = \frac{10}{(2\sqrt{10} - 1)^2}, R = 256\sqrt{2}, G = 962$, 代入上式, 可解

1) 令 $T_1 = \{t_i^1\}_{i=0}^I, T_2 = \{t_i^2\}_{i=0}^I, T_1 < T_2$ 意指: 当 $i = 0, i_0, I$ 时, 有 $t_0^1 = t_0^2 = 0, t_{i_0}^1 = t_{i_0}^2 = R, t_I^1 = t_I^2 = d_{\max}$; 对其它 i , 有 $t_i^1 < t_i^2$; $Y_1 < Y_2$ 的意义与 $T_1 < T_2$ 类似.

出

$$a = \frac{5 \cdot 512^2}{(\sqrt{10} - 1)^2}, \quad b = \frac{256 \sqrt{2}}{(\sqrt{10} - 1)}, \quad c = 2, \quad d = 1.$$

于是有

$$c(t) = \frac{20 \cdot 512^2}{(512 \sqrt{2} + 2(\sqrt{10} - 1)t)^2}. \quad (50)$$

如果只注重于 M, R , 我们可利用子族: $c(t, a, b, 1, 1) = a(b+t)^{-1} (a > 0, b > 0)$, 通过

$$M = ab^{-1}, a(b+R)^{-1} = 1$$

确定 a, b 的值, 来构造所需的分辨率函数. 例如, 取

$$d_{\max} = 512 \sqrt{2}, \quad M = 20, \quad R = \frac{512 \sqrt{2}}{3},$$

有

$$a = \frac{10240 \sqrt{2}}{57}, \quad b = \frac{512 \sqrt{2}}{57},$$

所求的分辨率函数为

$$c(t) = \frac{10240 \sqrt{2}}{512 \sqrt{2} + 57t}, \quad (51)$$

且 $m = \frac{10}{29}, G = 730$.

$$2) c(t, a, b, c, d) = ae^{-\frac{(t+d)^c}{b}} (a > 0, b > 0, c > 0, d > 0).$$

对每一对参数 (a, b, c, d) , $c(t, a, b, c, d)$ 都是 $[0, d_{\max}]$ 上的严格单调减函数, 根据上述相同的方法可构造出所需要的分辨率函数. 例如, 取

$$d_{\max} = 512 \sqrt{2}, \quad M = e^2, \quad m = e^{-2}, \quad R = 256 \sqrt{2}, \quad G = 928,$$

利用方程(45), 可得

$$a = e^2, \quad b = 128 \sqrt{2}, \quad c = 1, d = 0,$$

于是所求的分辨率函数为

$$c(t) = e^{2 - \frac{t}{128 \sqrt{2}}}. \quad (52)$$

6 特殊参数化形式与滤波之间的关系

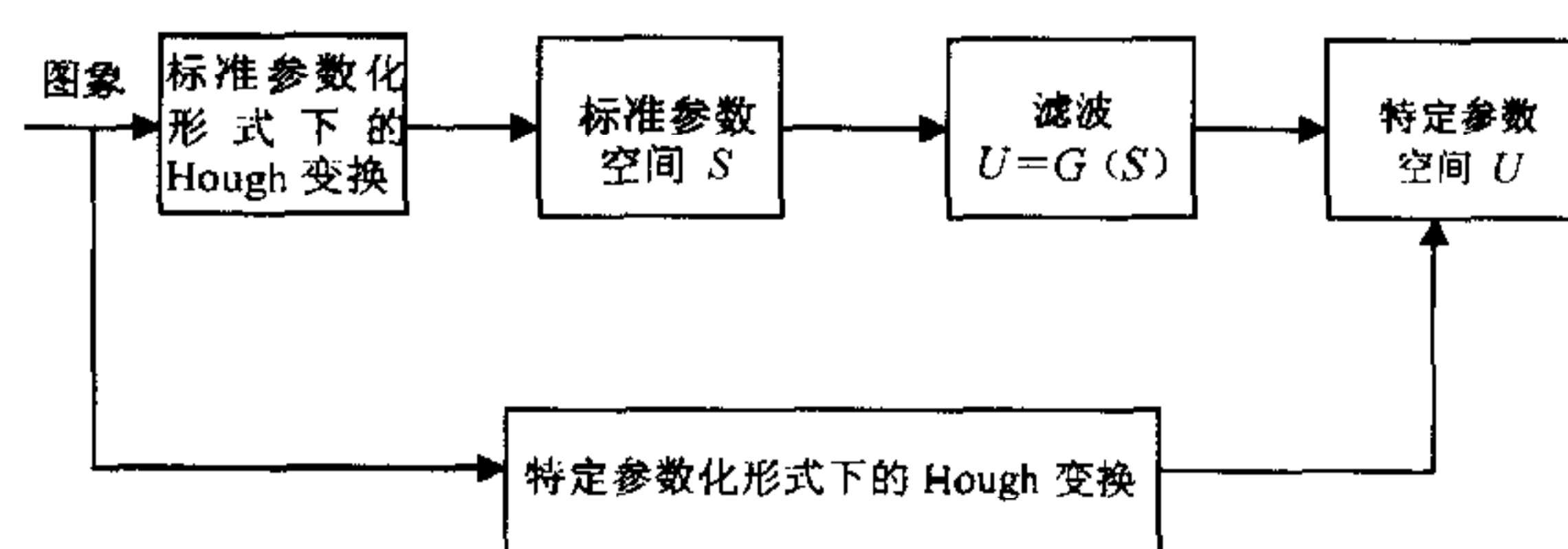


图6 特殊参数化形式与滤波之间的关系

从前面的讨论可知, 当使用的参数化形式具有某种特定性质时, 如伸缩性质、凝视性质, 对应的 Hough 变换可以看作由标准参数下的 Hough 变换加滤波级构成, 如图6所示。

对特定参数化形式下的 Hough 变换作如此解释有两个好处. 其一是将文献中经常使用的在标准参数化形式下的 Hough 变换与特定参数化形式下的 Hough 变

换联系起来. 另外,更主要的是,从图6可以看到,特定参数化形式下的 Hough 变换可以通过先求标准参数化形式下的 Hough 变换,然后,对变换后的函数进行滤波得到. 一般来说,这种实现方法要比直接使用特定参数化形式进行 Hough 变换容易得多.这是因为从前面的讨论可知,一般情况下求从标准参数空间到特定参数空间的变换函数 $U=G(S)$ (对于直线 $U=G(\rho,\theta)$;对于圆 $U=G(\rho,\theta,r)$)要比直接求 $G(S)$ 的反函数容易得多.

7 实验结果

本文的主要工作是一些关于设计一般参数化形式和具有特定性能的参数化形式的理论探讨. 为了表明这些理论结果的有用性,设计了下面两组简单实验.

7.1 关于具有凝视特征直线参数化形式的实验

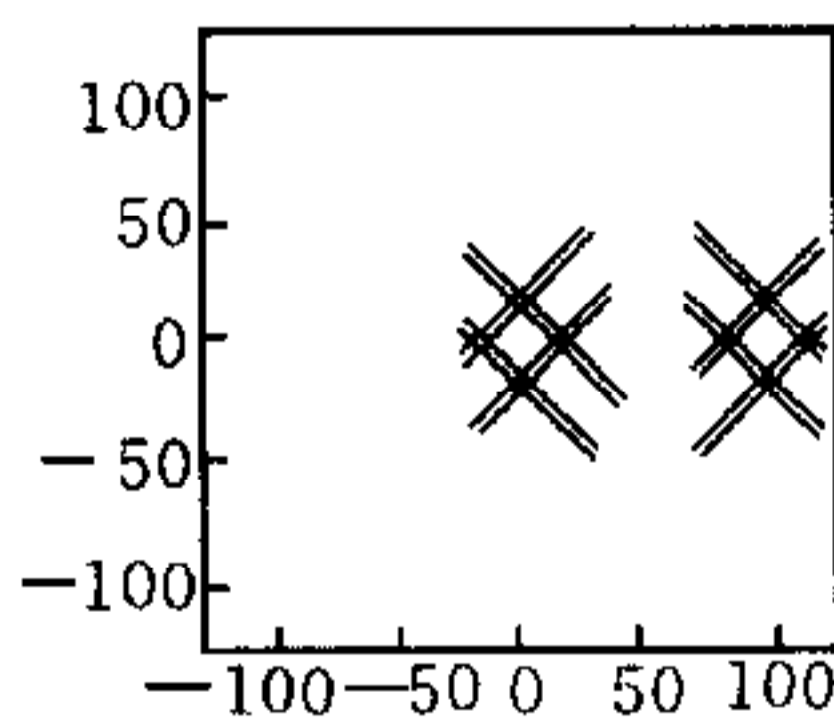
图7(a)是图象空间(256×256),有16条直线. 其中一组直线靠近图象中心,另一组直线接近图象边缘. 每组有8条直线分为4对,每对直线相互平行且非常靠近.

图7(b)是图7(a)的标准参数化空间(256×256),从图7(b)可以看出:由于标准参数空间的分辨率是均匀的,所以非常接近的两条直线不论位于图象中心还是位于图象边缘都是非常难以区分的.

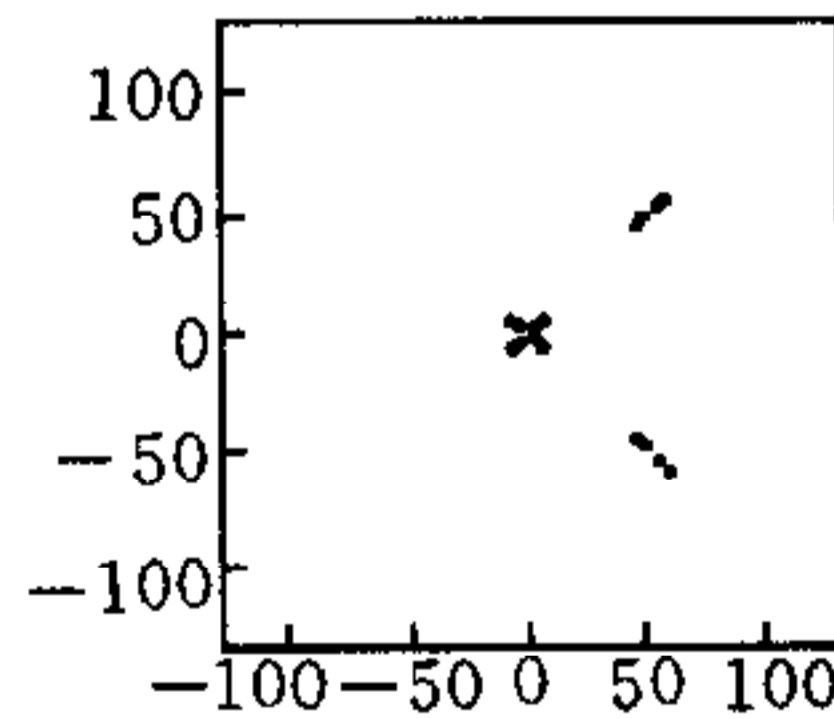
图7(c)是图7(a)的凝视特征参数化空间,此时使用与标准参数化空间相同的空间规模(即空间消耗一样):256×256,凝视中心在图象空间的中心. 具有凝视特征的直线参数化形式为

$$F_l(\mu, \xi) = (C(\sqrt{\mu^2 + \xi^2}) \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \xi^2}}, C(\sqrt{\mu^2 + \xi^2}) \frac{\xi}{\sqrt{\mu^2 + \xi^2}}),$$

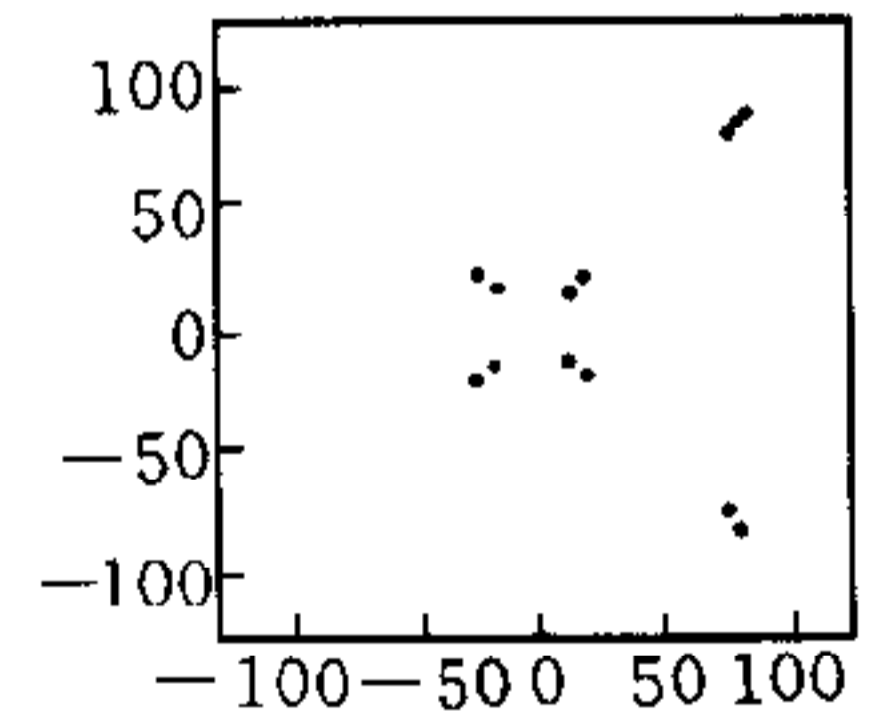
其中 $C(t) = 20 \tan\left(\left[\frac{\arctan(32\sqrt{2}/5)}{128}t\right]\right)$, 如图8所示.



(a) 图象空间



(b) 标准参数化空间



(c) 凝视特征参数化空间

图7 当凝视点位于第一组直线时,标准参数化空间与凝视特征参数化空间的特征

从图7(c)可以看出:靠近凝视中心的8条直线明显地被分辨出来,即靠近凝视中心对直线有很高的分辨率;对远离凝视中心的8条直线,由于此时参数空间的分辨率很低,所以这组直线比在标准参数空间中更难以区分. 值得指出的是,尽管此时不能完全区分这8条直线,但这些直线在参数空间的整体效应仍能引起视觉系统对它的适度注意,从而将新的注视点移动到该区域^[16].

当将凝视中心移至图7(a)中靠近图象边缘的

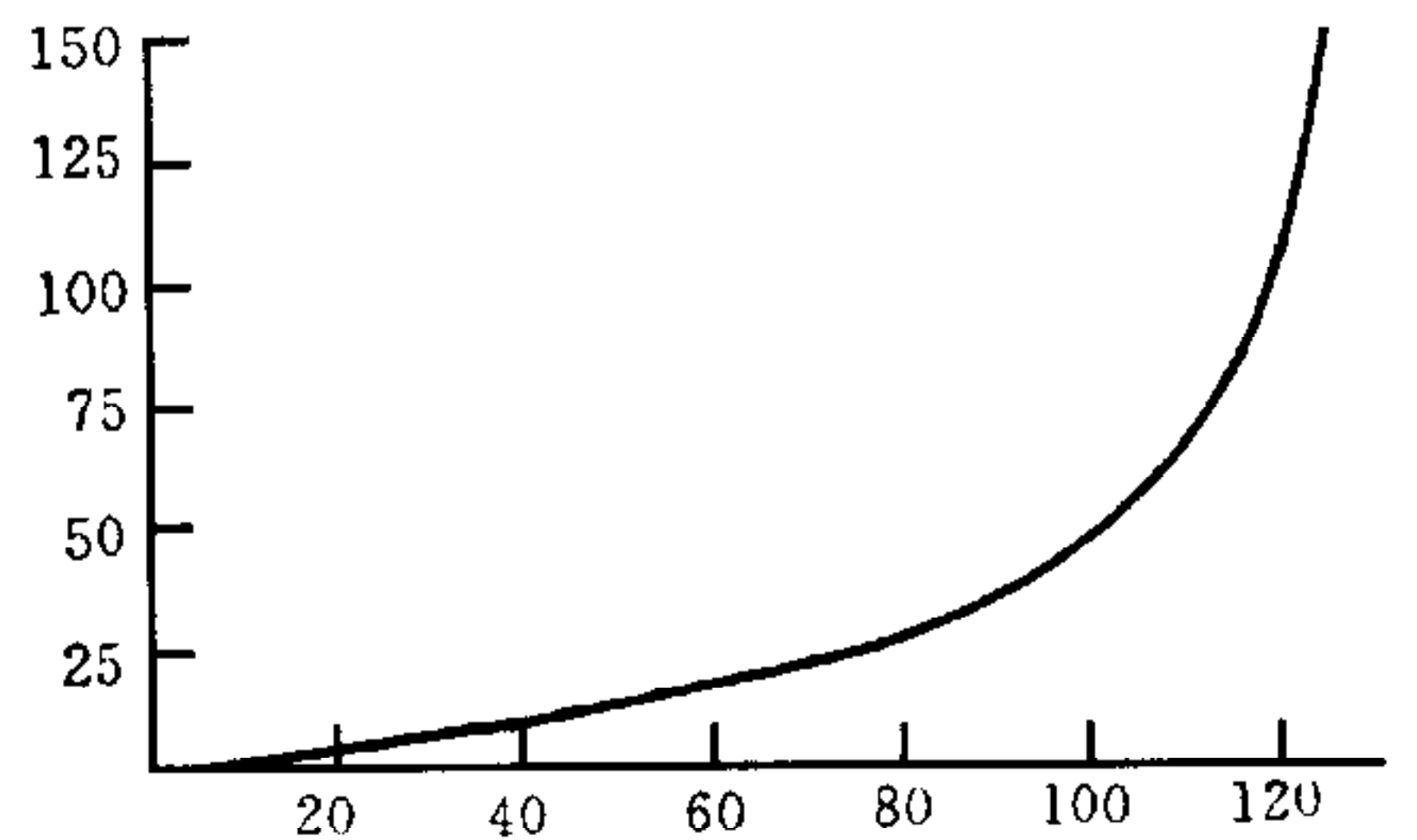


图8 函数 $C(t)$

一组直线时, 图象空间变为图9(a), 此时在凝视特征参数化空间内, 在标准参数空间, 如图9(b)难以区分的8条直线现在明显地被分辨出来, 如图9(c)所示.

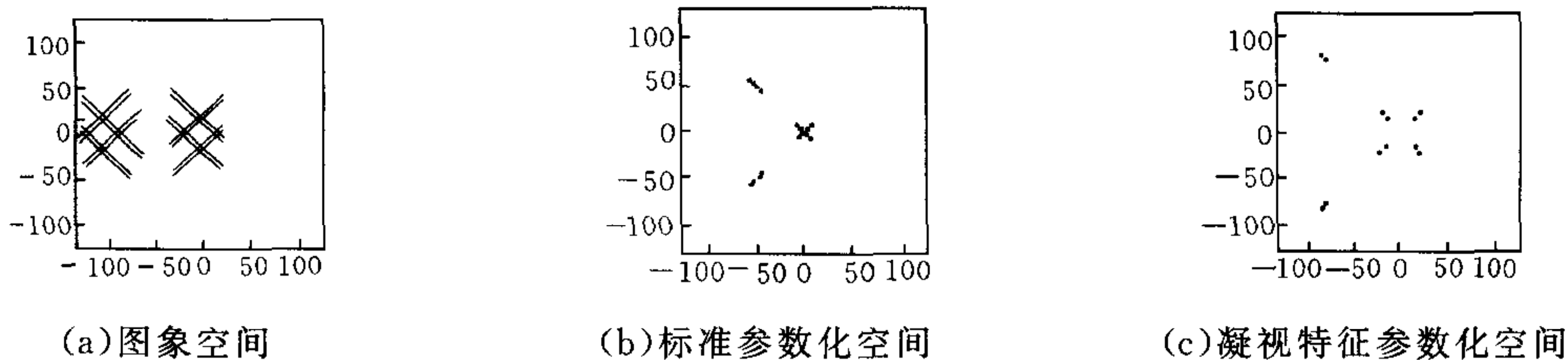


图9 当凝视点位于第二组直线时, 标准参数化空间与凝视特征参数化空间的特性

7.2 关于具有凝视特征圆参数化形式的实验

一般地圆参数化空间是三维的. 在本实验中设计的圆其圆心均位于通过图象中心的一条直线上, 于是这些圆的参数化可用二维点来表示, 这只是为了几何直观而并不失一般性.

图10(a)是图象空间(256×256), 有8个圆, 其中一组靠近图象中心, 另一组接近图象边缘. 图10(b)是图10(a)的标准参数化空间(256×256), 从图10(b)可以看出: 由于标准参数空间的分辨率是均匀的, 所以非常靠近的圆不论位于图象中心还是位于边缘都是非常难以区分的. 图10(c)是图10(a)的凝视特征参数化空间, 作者使用与标准参数化空间相同的空间规模: 256×256, 凝视中心在图象空间的中心. 凝视特征的圆参数化形式为

$$\begin{cases} \rho = C^{-1}(\sqrt{u^2 + v^2})\cos(\arg(u, v)), \\ r = C^{-1}(\sqrt{u^2 + v^2})\sin(\arg(u, v)), \\ \theta = \Phi^{-1}(\phi), \end{cases}$$

其中分辨率函数为 $c(t) = \frac{128}{25\text{arc tan}(\frac{128\sqrt{2}}{25})(1 + \frac{t^2}{625})}$, 其原函数为 $C(t) = \frac{128}{\text{arc tan}(\frac{128\sqrt{2}}{25})}\text{arc tan}(\frac{t}{25})$, 如图11所示.

从图10(c)可以看出: 靠近凝视中心的4个圆比标准参数空间更明显地被分辨出来, 即靠近凝视中心对圆有较高的分辨率; 相反, 对远离凝视中心的4个圆, 由于此时参数空间的分辨率很低, 所以这组圆比在标准参数空间中更难以区分. 同上述关于直线的讨论类似, 此时这组圆在参数空间的整体效应仍能引起视觉系统对它的适度注意, 从而将新的注视点移动到该区域.

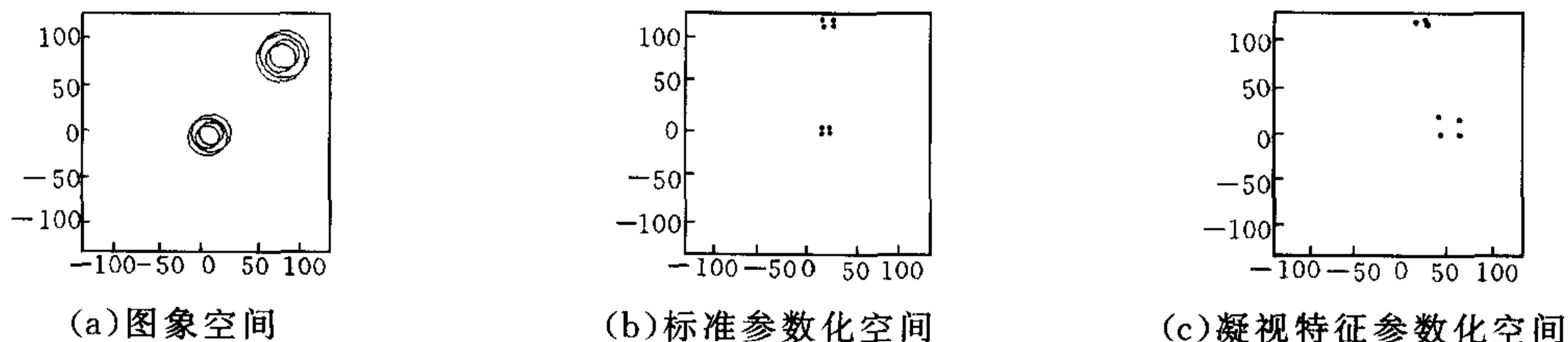


图10 当凝视点位于第一组圆时, 标准参数化空间与凝视特征参数化空间的特性

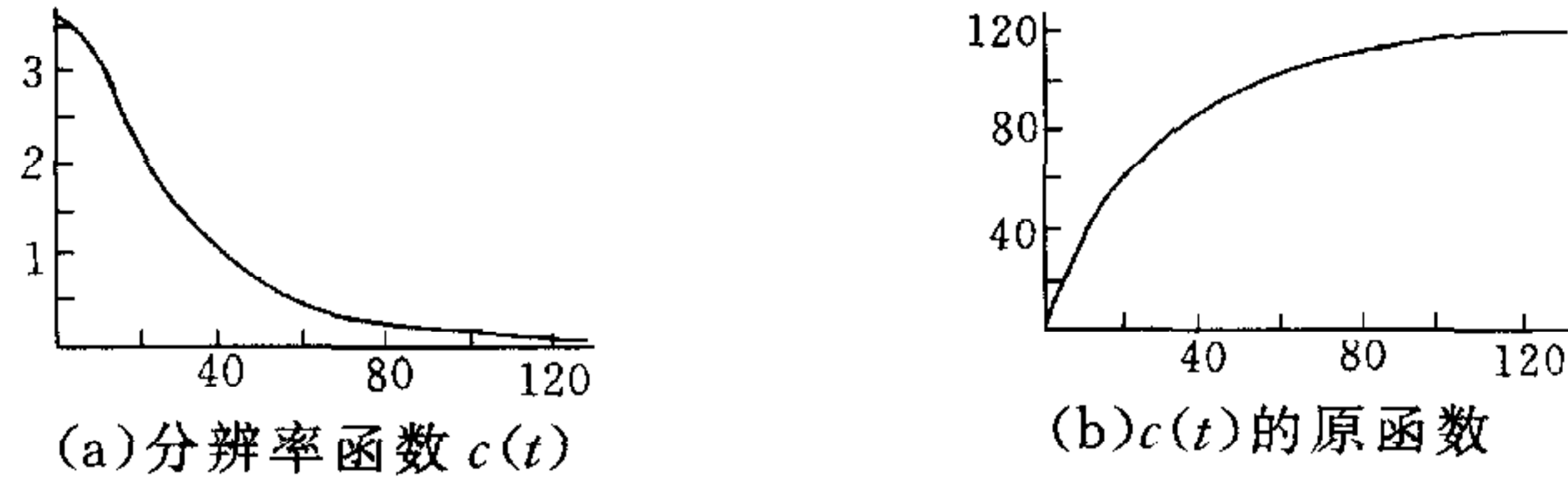


图11 分辨率函数及其原函数

当将凝视中心移至图10(a)中靠近图象边缘的一组圆时,图象空间变为图12(a),此时在标准参数空间难以区分的4个圆(如图12(b)),在凝视特征参数空间内可以明显地被分辨出来,如图12(c)所示.

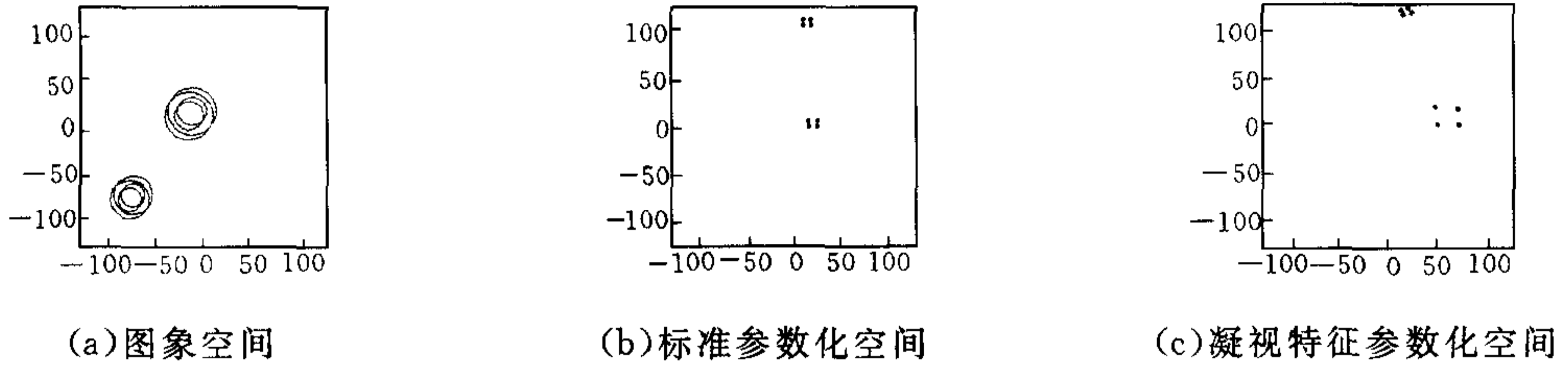


图12 当凝视点位于第二组圆时,标准参数化空间与凝视特征参数化空间的特性

7.3 注记

A. 凝视特征直线(圆)参数化形式,在凝视范围内具有扩张性,在凝视范围之外具有压缩性.因此凝视特征直线(圆)参数化在凝视范围扩张性可以视为直线(圆)参数化的特殊情形.因此以上的实验也同时说明,对于直线与圆使用扩张性参数化比标准参数化更容易检测与定位.

B. 本文中所说的当使用具有凝视特性的参数化形式时,可以检测到直线(圆),当使用标准参数化形式时检测不到直线(圆),是指在相同的空间消耗下而言.当然,如果不考虑噪声,不考虑离散误差,不考虑空间消耗,当标准参数空间的分辨率足够高时,如高到与具有凝视特性的参数空间在凝视中心处的分辨率时,直线(圆)同样可以检测出来.

C. 本文的实验是非常理想化的情景,旨在表示具有凝视特性的参数化形式较标准参数化形式对几何基元的“区分”能力.当然,当有随机噪声或输入图象为真实图象时,情况就会复杂得多.

8 结束语

本文系统地研究了构造一般直线(圆)参数化形式的理论方法.由于任何直线(圆)参数化形式均必须满足唯一性条件,本文首先从微分映射和解析映射出发,系统研究了满足唯一性条件的直线(圆)参数化形式的构造方法.由于一种好的直线(圆)参数化形式不仅仅只限于满足起码的唯一性条件,进而系统地研究了具有扩张性及凝视特性的直线(圆)参数化形式的构造方法.上述两种直线(圆)参数化形式在机器人视觉和主动视觉中具有重要的应用价值.从某种程度上来说,本文的研究为设计具有任意特定性能的直线(圆)参数化形式提供了系统的理论基础.

参 考 文 献

- 1 Hough P V C. A method and means for recognizing complex patterns, U. S. Patent 3069654, 1962
- 2 Ballard D H. Generalizing the Hough transform to detect arbitrary shapes. *Pattern Recognition*, 1981 **13**:111~122
- 3 Illingworth J Kittler J, A survey of the Hough transform, *CVGIP* 44, 87~116, 1988
- 4 Leavers V F. Which Hough transform. *CVGIP: Image Understanding*, 1993, **58**(2): 250~264
- 5 Xu L Oja E. Randomized Hough transform; Basic mechanisms, algorithms, and computational complexities. *CVGIP: Image Understanding*, 1993, **57**(2): 131~154
- 6 胡占义, 杨长江, 马颂德. Hough 变换的新定义. *计算机学报*, 1997, **20**(8): 744~752
- 7 Soffer M, Kiryati N. Guaranteed convergence of the Hough transform. *Computer Vision and Image understanding*, 1998, **69**(2): 119~134
- 8 Chutatape O, Guo L F. A modified Hough transform for line detection and its performance. *Pattern Recognition* **32**: 181~192, 1999
- 9 Maitre H. Contribution to the prediction of performances of the Hough transform. *IEEE Trans. PAMI* 1986, **8**: 669~674
- 10 Hu Z Y, Destine J. Performance comparison of line parameterizations. In: Proceedings, 11th International Conference on Pattern Recognition, 1992, **3**: 335~338
- 11 Hu Z Y, Ma S D. Performance prediction of the Hough transform. *Journal of Computer Science & Technology*, 1997, **12**(1): 49~57
- 12 Risse T. Hough transform for line recognition: Complexity of evidence accumulation and cluster detection. *CVGIP*, 1989, **46**: 327~345
- 13 Xu C P, Velastin S A. A comparison between the standard hough transform and the mahalanobis distance hough transform. *ECCV'94*, 1994, 95~100
- 14 Hu Z Y, Destine J. Parameter probability density analysis for the Hough transform. *Signal Processing*, 1993, **33**(2): 159~168
- 15 Koshimizu H, Numada M, Murakami K. Askant vision architecture using warp model of Hough transform——For realizing dynamic & central/peripheral camera vision. *Trans. IEICE*, 1994, **E77-D**(11): 1206~1212
- 16 汪威, 胡占义, 马颂德. 扩展 Hough 变换及其在主动视觉中的应用. *自动化学报*, 1998, **24**(5): 599~607
- 17 Hu Z Y, Ma S D. Three conditions of a good line parameterization. *pattern recognition Letters* 1995, **16**: 385~388
- 18 Hu Z Y, Ma S D. Uniform line parameterization. *Pattern Recognition Letters*, 1996, **17**: 503~507
- 19 胡占义, 杨长江, 汪威, 马颂德. 直线参数化形式的优化设计. *自动化学报*, 1998, **24**(3): 307~314
- 20 Suiu Yin Yuan, Chi Ho Ma. An investigation of the nature of parameterization for the Hough transform. *Pattern Recognition*, 1997, **30**(6): 1009~1040
- 21 Kamat-Sadekar V, Ganesan S. Complete description of multiple line segments using the Hough transform. *Image and Vision Computing*, 1998, **16**: 597~613
- 22 Conway J. , *Function of One Complex Variable*, 2nd ed. Springer-Verlag, 1984
- 23 吴立德. *计算机视觉*. 上海: 复旦大学出版社, 1993
- 24 马颂德, 张正友. *计算机视觉——计算理论与算法基础*. 北京: 科学出版社, 1998

附 录

定理1的证明.

$\forall t_1, t_2 \in D, t_1 \neq t_2$, 令 $h = t_2 - t_1$, 则 $t_1 + ah, \alpha \in [0, 1]$ 是连接 t_1, t_2 的直线节, 由于 D 是凸集, 该线节仍在 D 内. 令

$$f(\alpha) = (G(t_1 + ah))^T h,$$

则 $f(\alpha)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上可导, 且

$$f'(\alpha) = h^T DG(t_1 + \alpha h)h \neq 0,$$

由中值定理, $\exists \alpha_0 \in (0, 1)$, 使

$$f(1) - f(0) = f'(\alpha_0).$$

由于

$$f(1) = (G(t_2))^T h, \quad f(0) = (G(t_1))^T h,$$

所以

$$[(G(t_2))^T - (G(t_1))^T]h = f(1) - f(0) = h^T DG(t_1 + \alpha_0 h)h \neq 0,$$

因此

$$(G(t_2))^T - (G(t_1))^T \neq 0.$$

即

$$G(t_2) \neq G(t_1).$$

故 $G(t)$ 在 D_S 内是单叶映射.

定理6的证明.

令 G 的逆映射为 F . 因

$$\min\{\sigma \mid \sigma \in \Sigma(D(G(t)))\} > c,$$

所以

$$\max\{\sigma \mid \sigma \in \Sigma(D(F(s)))\} < \frac{1}{c}.$$

$\forall t_1, t_2 \in D, t_1 \neq t_2$, 则

$$s_1 (= G(t_1)) \neq s_2 (= G(t_2)).$$

记 $\Delta s = s_2 - s_1$, 令 $y^0 = F(s_1 + \Delta s) - F(s_1)$, 定义

$$l(x) = (y^0, x), \forall x \in R^n,$$

其中 (y^0, x) 表示内积. 则 $l(x)$ 是线性函数. 令

$$\tau(u) = l(F(s_1 + u\Delta s)), u \in [0, 1],$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\tau(u + \Delta u) - \tau(u)}{\Delta u} &= \frac{l(F(s_1 + u\Delta s + \Delta u\Delta s)) - l(F(s_1 + u\Delta s))}{\Delta u} = \\ &= l\left(\frac{F(s_1 + u\Delta s + \Delta u\Delta s) - F(s_1 + u\Delta s)}{\Delta u}\right). \end{aligned}$$

由于 F 是可微映射, 所以

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\tau(u + \Delta u) - \tau(u)}{\Delta u} = l(DF(s_1 + u\Delta s)\Delta s),$$

即 $\tau(u)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 且

$$\tau'(u) = l(DF(s_1 + u\Delta s)\Delta s), u \in [0, 1],$$

于是由中值定理 $\exists 0 < \theta < 1$ 使

$$\tau(1) - \tau(0) = \tau'(\theta).$$

由于

$$\tau(1) - \tau(0) = l(F(s_1 + \Delta s)) - l(F(s_1)) = l(F(s_1 + \Delta s) - F(s_1)) = l(y^0) = \|y^0\|^2,$$

$$\tau'(\theta) = l(DF(s_1 + \theta\Delta s)\Delta s) = (y^0, DF(s_1 + \theta\Delta s)\Delta s),$$

$$\|DF(s_1 + \theta\Delta s)\| = \max\{\sigma \mid \sigma \in \Sigma(DF(s_1 + \theta\Delta s))\} < \frac{1}{c},$$

所以

$$\|y^0\|^2 = (y^0, DF(s_1 + \theta\Delta s)\Delta s) \leq \|y^0\| \cdot \|DF(s_1 + \theta\Delta s)\| \cdot \|\Delta s\|,$$

因此

$$\|y^0\| \leq \|DF(s_1 + \theta\Delta s)\| \cdot \|\Delta s\|,$$

所以

$$\|F(s_2) - F(s_1)\| \leq \|DF(s_1 + \theta\Delta s)\| \cdot \|s_2 - s_1\| < \frac{1}{c} \|s_2 - s_1\|,$$

即

$$\|t_2 - t_1\| < \frac{1}{c} \|G(t_2) - G(t_1)\|,$$

因此

$$\|G(t_2) - G(t_1)\| > c \|t_2 - t_1\|.$$

故满足 $G(t)$ 扩张性条件.

定理 10 的证明.

由于 $C(t)$ 的性质知 $C(t)$ 是 $[0, \rho'_{\max}]$ 上的严格递增的连续函数, 于是由条件 A1), A2), 性质 b) 必然得到满足. 下面证明性质 a) 也成立.

先证 $F_l(L_G) = L_S$. 由于 $C(t)$ 是 $[0, \rho'_{\max}]$ 上的严格递增的连续函数且 $C(0) = 0, C(\rho'_{\max}) = \rho_{\max}$, 所以 $\forall 0 \leq \rho' \leq \rho'_{\max}$ 均存在 $0 \leq \rho \leq \rho_{\max}$ 使得 $C(\rho') = \rho$. 令

$$\gamma_{\rho'} = \{(\mu, \xi) \mid \mu^2 + \xi^2 = \rho'^2\},$$

则 $\forall (\mu, \xi) \in \gamma_{\rho'}$ 有 $U^2(\mu, \xi) + V^2(\mu, \xi) = C^2(\rho')$, 于是 $F(\gamma_{\rho'}) \subset L_S$. 因此

$$F_l(L_G) = \bigcup_{0 \leq \rho' \leq \rho'_{\max}} F_l(\gamma_{\rho'}) \subset L_S.$$

反之, 由 $C(t)$ 的性质知

$$C([0, \rho'_{\max}]) = [0, \rho_{\max}],$$

所以 $\forall \rho \in [0, \rho_{\max}], \exists \rho' \in [0, \rho'_{\max}]$ 使得 $C(\rho') = \rho$. 令

$$\Gamma_{\rho} = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 = \rho^2\}.$$

$\forall (\mu, \xi) \in \gamma_{\rho'}$,

$$U(\mu, \xi) = C(\sqrt{\mu^2 + \xi^2})\cos\omega(\mu, \xi) = \rho\cos\omega(\mu, \xi),$$

$$V(\mu, \xi) = C(\sqrt{\mu^2 + \xi^2})\sin\omega(\mu, \xi) = \rho\sin\omega(\mu, \xi).$$

由于 $\omega(\mu, \xi)$ 将圆周 $\gamma_{\rho'}$ 单叶映满 $[0, 2\pi)$, 所以有

$$\Gamma_{\rho} = \{(U(\mu, \xi), V(\mu, \xi)) \mid U^2(\mu, \xi) + V^2(\mu, \xi) = \rho^2\} \subset F_l(L_G),$$

因此

$$L_S = \bigcup_{0 \leq \rho \leq \rho_{\max}} \Gamma_{\rho} \subset F_l(L_G),$$

故有 $F_l(L_G) = L_S$.

再证 $F_l(\mu, \xi) = (U(\mu, \xi), V(\mu, \xi))$ 在 L_G 上单叶

假定 $(\mu_1, \xi_1) \neq (\mu_2, \xi_2)$. 当 $\mu_1^2 + \xi_1^2 \neq \mu_2^2 + \xi_2^2$ 时, 不妨假定 $\mu_1^2 + \xi_1^2 < \mu_2^2 + \xi_2^2$ 则有

$$C(\sqrt{\mu_1^2 + \xi_1^2}) < C(\sqrt{\mu_2^2 + \xi_2^2}),$$

于是

$$U^2(\mu_1, \xi_1) + V^2(\mu_1, \xi_1) = C^2(\sqrt{\mu_1^2 + \xi_1^2}) < C^2(\sqrt{\mu_2^2 + \xi_2^2}) = U^2(\mu_2, \xi_2) + V^2(\mu_2, \xi_2),$$

所以

$$U^2(\mu_1, \xi_1) + V^2(\mu_1, \xi_1) \neq U^2(\mu_2, \xi_2) + V^2(\mu_2, \xi_2),$$

因此

$$(U(\mu_1, \xi_1), V(\mu_1, \xi_1)) \neq (U(\mu_2, \xi_2), V(\mu_2, \xi_2)).$$

当 $\mu_1^2 + \xi_1^2 = \mu_2^2 + \xi_2^2 = \rho'^2$ 时

$$(U(\mu_1, \xi_1), V(\mu_1, \xi_1)) = (C(\rho') \cos \omega(\mu_1, \xi_1), C(\rho') \sin \omega(\mu_1, \xi_1)),$$

$$(U(\mu_2, \xi_2), V(\mu_2, \xi_2)) = (C(\rho') \cos \omega(\mu_2, \xi_2), C(\rho') \sin \omega(\mu_2, \xi_2)).$$

因 $\omega(\mu, \xi)$ 将圆周 $\gamma_{\rho'} = \{(\mu, \xi) | \mu^2 + \xi^2 = \rho'^2\}$ 单叶映满 $[0, 2\pi)$, 所以

$$\omega(\mu_1, \xi_1) \neq \omega(\mu_2, \xi_2) \text{ 且 } 0 \leq \omega(\mu_1, \mu_1), \omega(\mu_2, \xi_2) \leq 2\pi,$$

于是必有

$$(U(\mu_1, \xi_1), V(\mu_1, \xi_1)) \neq (U(\mu_2, \xi_2), V(\mu_2, \xi_2)),$$

故 $F_l(\mu, \xi) = (U(\mu, \xi), V(\mu, \xi))$ 为 L_G 上的单叶映射.

引理1的证明.

$$\forall (\rho_1, \theta_1, r_1) \neq (\rho_2, \theta_2, r_2).$$

1) 若 $\theta_1 \neq \theta_2$, 因 $\Phi(\theta)$ 是单调连续函数, 所以 $\Phi(\theta_1) \neq \Phi(\theta_2)$, 因此

$$(u, \phi_1, v_1) \neq (u_2, \phi_2, v_2).$$

2) 若 $\theta_1 = \theta_2$, 则必有 $(\rho_1, r_1) \neq (\rho_2, r_2)$ 以及

$$(u_1, v_1) = (C(d(\rho_1, r_1)) \cos(\arg(\rho_1, r_1)), C(d(\rho_1, r_1)) \sin(\arg(\rho_1, r_1))),$$

$$(u_2, v_2) = (C(d(\rho_2, r_2)) \cos(\arg(\rho_2, r_2)), C(d(\rho_2, r_2)) \sin(\arg(\rho_2, r_2))).$$

2.1) 若 $\arg(\rho_1, r_1) \neq \arg(\rho_2, r_2)$, 则必有 $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$, 所以

$$(u_1, \phi_1, v_1) \neq (u_2, \phi_2, v_2).$$

2.2) 若 $\arg(\rho_1, r_1) = \arg(\rho_2, r_2) = \omega$, 则可令

$$(\rho_1, r_1) = (s_1 \cos \omega, s_1 \sin \omega), (\rho_2, r_2) = (s_2 \cos \omega, s_2 \sin \omega),$$

其中 $s_1 = \sqrt{\rho_1^2 + r_1^2}, s_2 = \sqrt{\rho_2^2 + r_2^2}, s_1 \neq s_2$. 于是

$$(\rho_1, r_1) = \frac{s_1}{s_2} (\rho_2, r_2).$$

由距离 d 的基本性质3), 必有 $d(\rho_1, r_1) \neq d(\rho_2, r_2)$. 由 $c(t)$ 的性质知 $C(t)$ 为单调递增连续函数, 所以

$$C(d(\rho_1, r_1)) \neq C(d(\rho_2, r_2)),$$

故必有 $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$, 因此 $(u_1, \phi_1, v_1) \neq (u_2, \phi_2, v_2)$.

吴福朝 男, 教授、博士生导师, 1957年10月出生. 主要研究方向为三维视觉、主动视觉、模式识别以及特征提取.

胡占义 男, 研究员, 博士生导师, 1961年11月出生. 1985年毕业于北方工业大学自动化系, 1985年12月至1993年2月在比利时列日大学电子工程系读硕士及博士, 1993年1月获比利时国家博士学位. 专业为计算机视觉. 主要研究方向有: 三维视觉、机器人导航、主动视觉、特征提取等.