混杂系统模型与优化控制 1)

尹增山　张伟　高春华　李平

（浙江大学工业控制技术研究所　杭州　310027）

摘　要　本文研究了混杂系统的最优控制问题．在给出混杂系统自动机模型的基础上，分析了混杂系统最优控制的复杂性，并给出了层次混杂系统优化控制方法．这种方法通过对目标函数进行一定变换，把复杂的求解问题分成几个相对简单的子问题，从而简化了问题的求解，并给出了最优控制问题的一个次优解．

关键词　混杂系统，混杂自动机，最优控制

1　前言

随着计算机科学的发展，既包含连续动态，又包含离散动态的混杂系统大量出现．如飞行控制、柔性生产制造和交通运输系统等．近几年，混杂系统的研究得到了广泛的重视，取得了不少成果[1][2][3]．

文[5][6]对混杂控制系统的优化进行了一定的研究．文[5]首先进行逻辑、受限动态变换，把混杂系统转化为混合逻辑动态系统(MLD)，用混合整数平方规划(MIQP)优化求解，混合整数平方规划求解是 NP_Hard 的(Raman and Grossmann, 1991)．文[6]则采用受限的微分动态规划进行求解，这是一种数值解法．本文针对混杂最优控制问题提出层次优化方法，把复杂的求解问题分成几个相对简单的子问题，从而简化了问题的求解．

2 混杂系统模型

考虑以下受控混杂动态系统，用混杂自动机表示：

$$Hc = (\mathrm{V_D}, Q, u_1, u_2, u_3)$$

（i）V_D 为连续变量有限集．一个数据状态表示 V_D 中变量取值．记数据状态集为 Σ_D．

（ii）Q 为离散状态集．系统状态集 $\Sigma = Q\times\Sigma_D$，一个系统状态可用 (l,σ) 表示，其

1)本文由国家自然科学基金（69804009）、国家 863 课题（863-511-845-005）基金资助。

中$l \in Q$表示离散状态，$\sigma \in \Sigma_D$表示连续状态.

（iii）u_1为Q中的每个离散状态对应系统行为. 是从R^+映射到Σ_D上的一个C^∞函数.

（iv）u_2为每一$l \in Q$指定一个 exception 集$u_2(l) \subseteq \Sigma_D$,在 exception$u_2(l)$发生时离散状态跃变. 差集$\Sigma_D - u_2(l)$称为状态不变量.

（v）u_3表示离散状态变迁关系：$u_3(e) \subseteq \Sigma_D^2$，即从一离散状态跃变到另一离散状态.

例 1：如图 1 所示：连续状态集$V_D = \{x1, x2, x3\}$，离散状态集$Q = \{q1, q2, q3\}$，离散状态$q1$的系统行为$u_1(q1) \to x1 = f(x1, u1, t,)$，

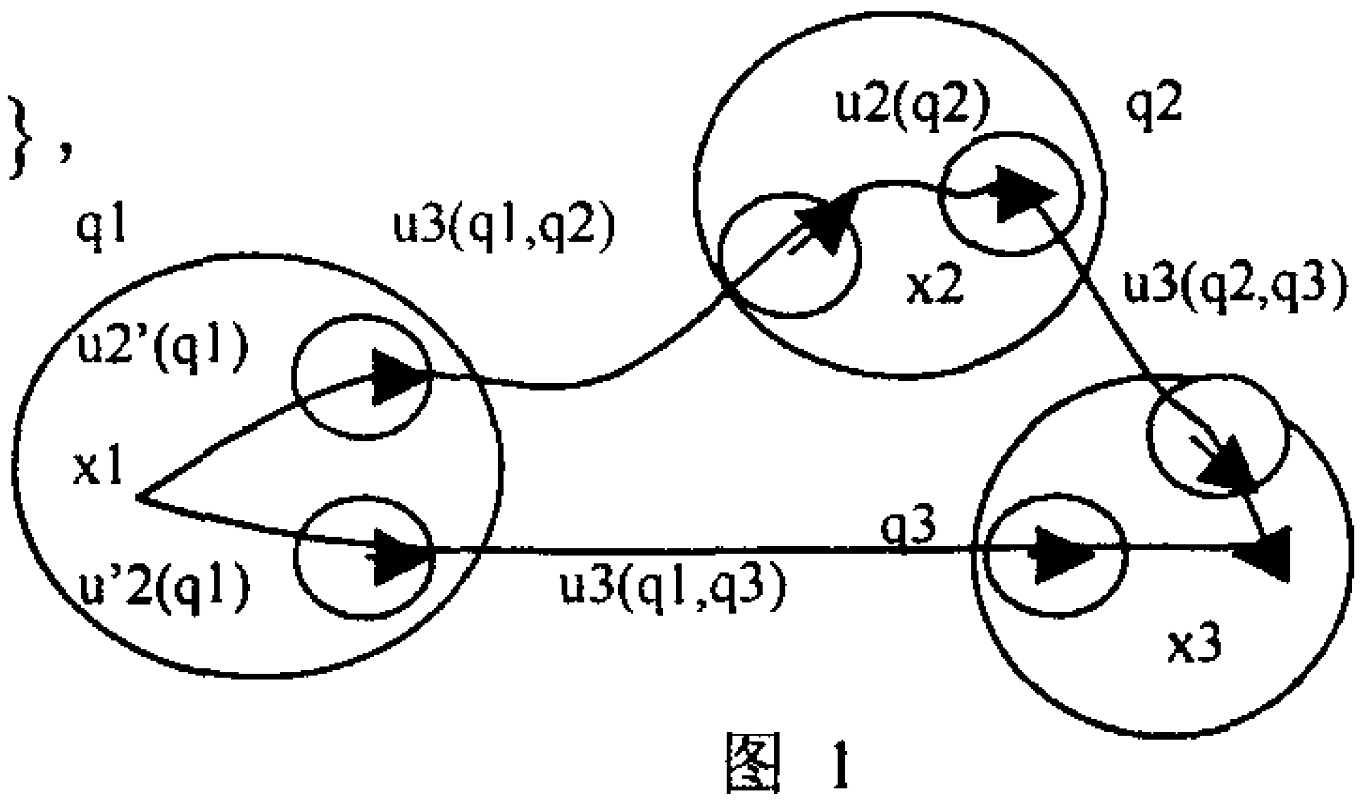

图 1

exception 集$u_2(q1)$(包括 u2'(q1)和 u'2(q1))，$u_2(q2)$，变迁关系$u_3(q1, q2)$、$u_3(q1, q3)$、$u_3(q2, q3)$分别如图所示.

当连续状态变量 x1 变化进入$u_2(q1)$时，离散状态分别由 q1 跃变到 q2、q3. 当连续状态变量 x2 变化进入$u_2(q2)$时，离散状态分别由 q2 跃变到 q3.

定义从一系统状态到达另一系统状态，所经历的离散状态的一个顺序为一条路径. 考虑到一条路径所对应的系统状态及变迁，当系统沿着这条路径演化时仍是一个离散变迁确定的混杂系统.

3 混杂系统最优控制的复杂性分析

3.1 最优控制目标函数

对于一般的混杂控制系统，要求在控制决策作用下，由初态(q_0, x_0)到达终态(q_f, x_f). 并且总代价最小，即：

$$J = \min_{u,v}\{\int_t e^{-at} L(x(t), u(t), t)dt + \sum_i e^{-a\sigma_i} M(x_i, x_j, v_i)\} \tag{1}$$

其中：$a > 0$为折扣因子. u为连续控制，v为离散的切换控制. $L(x(t), u(t), t)$为连

续动态能量函数. $M(x_i,x_j,v_i)$ 为离散动态切换的能量函数.:

3.2 最优控制的复杂性分析

文[4]证明一般混杂动态可控性分析是 NP_Hard 的. 其复杂性主要在以下两个方面:

I. 从初态 (q_0,x_0) 到达终态 (q_f,x_f)，离散状态数 n 的系统，可能的路径数(离散状态在控制过程中最多出现一次)为: $\sum_{i=0}^{n-2} p_{n-2}^i$，$(p_{n-2}^i=(n-2)\times(n-3)\times....(n-i-1))$ (2)

可见，路径随 n 的增大而指数增多.

II. 对于某固定路径，(1) 式仍是一个混杂最优控制问题.

考虑到系统的混合动态信息结构，(1) 式的求解非常困难. 基于此，我们提出以下近优的层次优化处理方法.

4 层次优化方法

记从初态 (q_0,x_0) 到达终态 (q_f,x_f) 的路径集为 R，$u^{'},v^{'}$ 为路径 r 对应的连续控制和离散切换控制. 则 (1) 式可改写为:

$$J=\min_{r\in R}\left\{\min_{u^{'},v^{'}}[\int_T e^{-at}L(x(t),u^{'}(t),t)dt+\sum_i e^{-a\sigma_i}M(x_i,x_j,v^{'}_i)]\right\}\overset{\Delta}{=}\min_{r\in R}J^{'} \tag{3}$$

其中:
$$J^{'}=\min_{u^{'}}[\int_T e^{-at}L(x(t),u^{'}(t),t)dt+\sum_i e^{-a\sigma_i}M(x_i,x_j,v^{'}_i)] \tag{4}$$

$J^{'}$ 的求解非常困难，我们转而考虑以下近优目标函数的求解问题.

$$J^{''}\overset{\Delta}{=}\min_{u^{'}}\int_T e^{-at}L(x(t),u^{'}(t),t)dt+\min_{x_i,x_j}\sum_i e^{-a\sigma_i}M(x_i,x_j,v^{'}_i) \tag{5}$$

记 $S_{ij}=\{x_i,x_j\mid q_i(x_i)\to q_j(x_j)\}$，假设 S_{ij} 为闭集且 $M(x_i,x_j,v^{'}_i)$ 关于变量 x_i,x_j 连续，则 $J_2=\min_{v^{'}}[\sum_i e^{-a\sigma_i}M(x_i,x_j,v_i)]$ 存在.

因此，根据 (5) 式，可以得出 (4) 式的以下近优控制算法:

算法 1:

i. 寻找路径上所有 S_{ij}.

ii．计算$J_2=\min[\sum_i e^{-a\sigma_i}M(x_i,x_j,v_i')]$．找出$S_{ij}$上使$M(x_i,x_j,v_i')$达到最小的

$\tilde{x}_i,\tilde{x}_j$．$\tilde{x}_i$则为离散状态q_i对应连续动态的末态，$\tilde{x}_j$为离散状态q_j对应连续动态的

初态．从而可求出一路径对应的所有连续动态的初态值和末态值，$\tilde{x}_i,\tilde{x}_j$可为一曲线．

iii．对应路径上每个离散状态寻找使连续动态从初态到达末态并使$J_1=\int_{T'}e^{-at}L(x_i(t),u_i(t),t)dt$达到最小的最优控制$u_i(t)$．

iv．$J=J_1+J_2$．

根据（1）（3）（5）式，整个混杂系统的求解归纳为如下层次优化方法：

算法 2：

i．利用某种规则寻找合适路径．

ii．根据算法 1 求解这条路径对应最优控制$u_i(t)$，$v_i(t)$．

iii．重复步骤 i 、ii．

iv．求出所有路径的最优值，对应的控制量$u_i(t)$、v_i即为所求．

可以看出，以上每一步骤求解都相对简单．从而可较容易求出混杂控制系统一个次优解．

5　示例

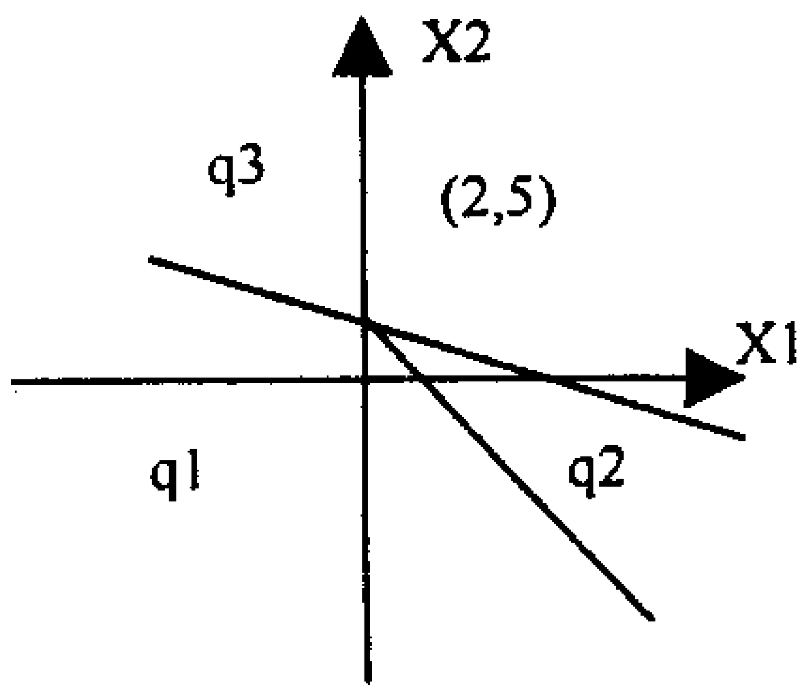

图 2

考虑系统：$\dot{x}(t)=A(q)x(t)+B(q)u(t)$　　（6）

如图 2 所示，寻找一最优控制,使状态(x_1,x_2)从初态(0,0)到达末态（2,5）,并且使以下目标函数达到最优．

$$J=\int_T x(t)^TQx(t)+\sum_i x_i^TRx_i,\ \text{其中}\ Q=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix},R=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$$

（6）式中：

$$A(q)=\begin{cases}\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix} & if\ \begin{cases}x_1(t)+x_2(t)-1<=0\\x_1(t)+2x_2(t)-2<=0\end{cases}\\ \begin{bmatrix}0&-3\\2&1\end{bmatrix} & if\ \begin{cases}x_1(t)+x_2(t)-1>=0\\x_1(t)+2x_2(t)-2<=0\end{cases}\\ \begin{bmatrix}0&1\\-2&2\end{bmatrix} & if\ \ x_1(t)+2x_2(t)-2>=0\end{cases}\qquad B(q)=\begin{cases}\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix} & if\ \begin{cases}x_1(t)+x_2(t)-1<=0\\x_1(t)+2x_2(t)-2<=0\end{cases}\\ \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} & if\ \begin{cases}x_1(t)+x_2(t)-1>=0\\x_1(t)+2x_2(t)-2<=0\end{cases}\\ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} & if\ \ x_1(t)+2x_2(t)-2>=0\end{cases}$$

根据算法 2 步骤求解：

1) 寻找从初态(0,0)到达末态（2,5）路径，共有两条：ⅰ. q1->q2->q3，ⅱ. q1->q3

2) 对每条路径根据算法 2 求解．如对路径ⅰ：

Ⅰ. 跳集 S_{12} 为直线 $x_1(t)+x_2(t)-1=0$，$(x_1(t)>=0)$．跳集 S_{23} 为直线 $x_1(t)+2x_2(t)-2=0$，$(x_1(t)>=0)$

Ⅱ. 计算 $J_2=\min\limits_{x_i,x_j}\sum\limits_i x_i{}^T Rx_i$．对应 S_{12}，S_{23} 可分别求出 q1 的末态(2/3,1/3)，q2 的初态（2/3,1/3），末态（2/9,8/9），q3 初态（2/9,8/9）．

Ⅲ. 计算 $J_1=\min\limits_{u_i}\int\limits_{T'} e^{-at}L(x_i(t),u_i(t),t)dt$，即对应离散状态 q1,q2,q3 在初态和末态约束下最优及最优控制 $u_i(t)$．q1、q2、q3 分别为受边界约束的初态和末态已知的线性控制系统．可以采用极大值原理求解．

Ⅳ. $J=J_1+J_2$ 为路径ⅰ的最优解

Ⅴ. 对路径ⅱ重复步骤Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ.

3) 比较两条路径的最优解．寻找出系统最优．

6 总 结

本文提出了混杂优化控制的层次方法，示例证明这种方法是有效的．最后控制优化求解的复杂性集中在路径的选择上．实际上，在现实的物理对象中，路径一般是有限的．在很多情况下可以根据实际的物理意义来简化寻优路径．本文的后续工作就是要改进寻找可达路径的算法，简化路径数量．

参 考 文 献

1 Michael S.Branicky, Vivek S.boarkar, and Sanjoy K. Mitter, A Unified Framework for Hybrid Control:Model and Optimal Control Theory, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. **43**, pp.31-45, Jan.1998

2. John Lygeros, Claire Tomlin, Shankar Sastry, Controllers for reachability specifications for hybrid systems, *Automatica*, vol **35**, pp.349-370,1999

3 Michael Tittus, Egardt. Control Design for Integrator Hybrid Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. **43**, pp.31-45, Jan.1998

4. Vincent D.Blondel, John N. Tsitsiklis, Complexity of stability and controllability of elementary hybrid systems, *Automatica*, vol **35**, pp.479-489,1999

5. Alberto Bemporad, Manfred Morari, Control of systems integrating logic, dynamics, and constrains, *Automatica*, vol **35**, pp.407-427,1999

6. Jin lu, Li-Zhi Liao, Anil Nerode, James H. Tayoe, Optimal Control of Systems with Continuous amd Discrete States, Proc. IEEE Conf. Decision Contr., San Antonlo,Texas,Dec.1993,pp. 2292-2297.