串行离散事件动态系统的建模、分析及设计*

疏松桂 谭民

(中国科学院自动化研究所 北京 100080)

摘要 本文提出的离散事件动态系统(DEDS)建模新方法，是从 $K+1$ 个缓冲库状态中抽取有库存 ($P_{\bar{0}}$) 和有空位 (P_K) 两种状态，合并到邻近的工作站中，构成相应的等效工作站，再将所有等效工作站联成 DEDS 生产系统，从而导出各项生产指标. 这种方法是将离散断续工作的多级生产线转化为连续工作的多级生产线，于是可以采用常微分方程数学工具，得出静态和动态的精确分析解，较好地解决了离散断续工作系统建模的难题.

关键词 离散事件动态系统, CIMS 问题, 大系统, 等效工作站

1 引言

离散事件动态系统(DEDS)在生产实践中是常见的，如综合制造系统，交通系统，通讯系统和各种服务系统等. 这种系统理论，从建模、分析到设计方法虽有一些学者做过深入细致的研究，取得了不少有用的成果[1]，但仍不够成熟，以致过程分析与优化设计难以进行. 问题的主要难度在于事件离散，状态断续，不便使用微分方程(或差分方程)描述系统的动态行为，因而无法直接求出系统的精确分析解.

本文应用等效工作站方法及流平衡原理[2,3]，将离散断续工作系统转化为连续不断工作系统，这样不但能用常微分方法求出系统的精确解，而且可由工件流平衡原理推出在生产流程中不丢失工件的充要条件. 最后通过计算实例，表明本文所得的理论结果可以直接应用于工程设计.

2 DEDS 中等效工作站的建模及分析

在离散工件加工中，为了提高系统的生产率，通常在工作站之间设有缓冲库，用以解决原料供应和加工生产率的不协调问题，如图 1 所示. 可是这样会带来生产线上的饥饿和阻塞现象，给分析与设计工作带来极大的困难. 等效工作站的设想是要将缓冲库的影响合并到工作站中，构成既不饥饿又不阻塞的工作站，也就是将离散断续工作的加工站转化为连续不断工作的加工站，于是所有分析和设计问题就好解决了.

* 《控制与决策》第 9 卷第 1 期, 42 — 48 页

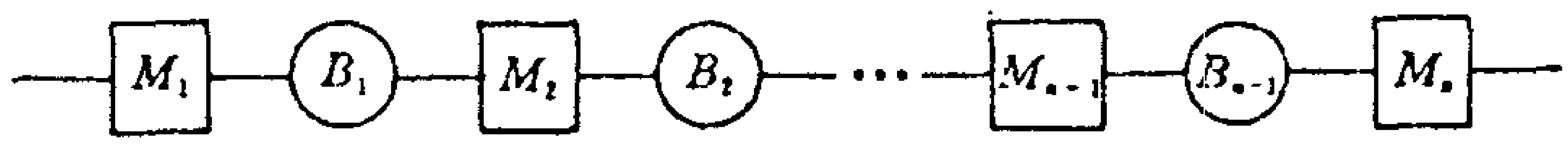

图 1 多级串联离散生产线

2.1 假设条件

下面提出 4 条假设，作为以后建模、分析及求解的依据：

1) 各个工作站及缓冲库完全可靠，无故障；

2) 工作站加工时间服从额定生产率为 ω_i 的指数分布；

3) 工件存入缓冲库和从缓冲库中取出的时间很短(相对生产率而言)，可以忽略不计；

4) 首级工作站不饥饿(有足够的原材料)，末级工作站不阻塞(有足够大的成品库).

2.2 缓冲库的存贮状态

设第 i 个缓冲库的容量为 K_i(包括工作站本身一个存贮单元在内)，前站额定生率为 ω_i，后站额定生产率为 ω_{i+1}，于是可以给出缓冲库的状态转移如图 2 所示. 其中上方 ω_i 表示存入，下方 ω_{i+1} 表示取出.

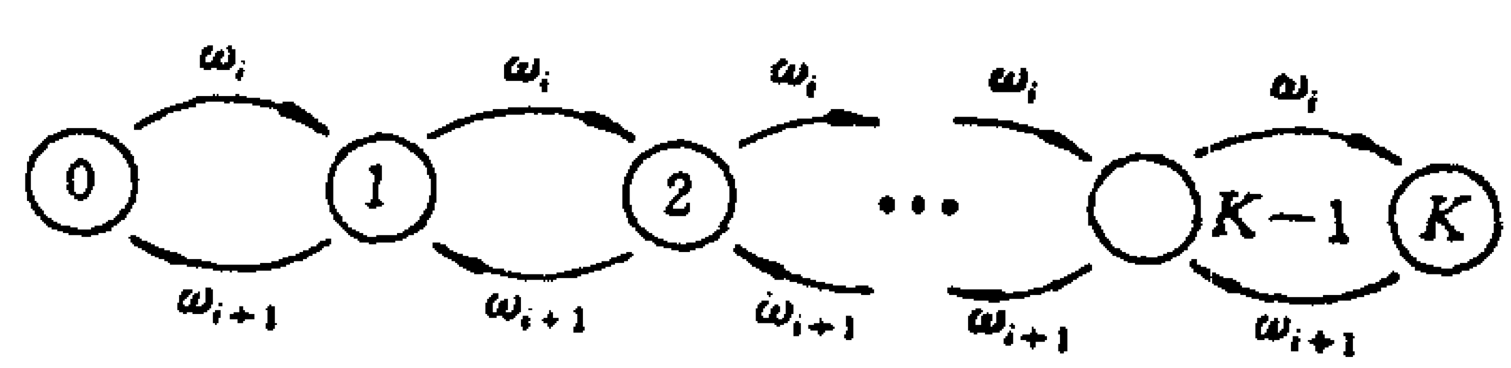

图 2 第 i 个缓冲库状态转移图

缓冲库的状态定义为：状态 0：表示缓冲库内全空；状态 1：表示缓冲库内有一次存贮；…；状态 K：表示缓冲库内全满. 于是可以得到第 i 个缓冲库的状态转移方程如下

$$\begin{cases} \dot{P}_0 = -\omega_i P_0 + \omega_{i+1} P_1 \\ \dot{P}_1 = \omega_i P_0 - (\omega_i + \omega_{i+1}) P_1 + \omega_{i+1} P_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ \dot{P}_K = \omega_i P_{K-1} - \omega_{i+1} P_K \end{cases} \tag{1}$$

显然，如果给定起始条件并引用拉氏变换，则可求得(1)式的瞬时解. 在工程设计中只需求出稳态解，令(1)式左边全为零，并令 $\rho_i = \omega_i / \omega_{i+1}$，则解得(ρ 和 K 的下标 i 省略)

$$P_1 = \rho P_0, \cdots, P_K = \rho^K P_0$$

$$\sum_{k=0}^{K} P_k = P_0 (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^K) = \frac{P_0 (1 - \rho^{K+1})}{1 - \rho} = 1 \tag{2}$$

于是得

全空 $$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}$$

全满 $$P_K = \frac{\rho^K (1 - \rho)}{1 - \rho^{K+1}}$$

全库存 $$P_{\bar{0}} = 1 - P_0 = \frac{\rho (1 - \rho^K)}{1 - \rho^{K+1}} \tag{3}$$

有空位 $$P_{K}=1-P_{K}=\frac{1-\rho^{K}}{1-\rho^{K+1}}$$

缓冲库存贮工件的平均数为

$$M_k=\sum_{k=1}^{K}kP_k=\frac{\rho-(K+1)\rho^{K+1}+K\rho^{K+2}}{1-\rho-\rho^{K+1}+\rho^{K+2}} \tag{4}$$

2.3 等效工作站

第 i 个工作站在生产过程中有四种状态(j): $j=1$ 代表正常工作状态; $j=2$ 代表输出通道阻塞，停车状态; $j=3$ 代表输入缺料，饥饿停车状态; $j=4$ 代表输出阻塞，同时输入缺料，停车状态.

用 P_{ji} 表示工作站 i 处于状态 j 的概率，显然有 $\sum_{j=1}^{4}P_{ji}=1$. 以上四种状态概率的转移如图 3 所示.

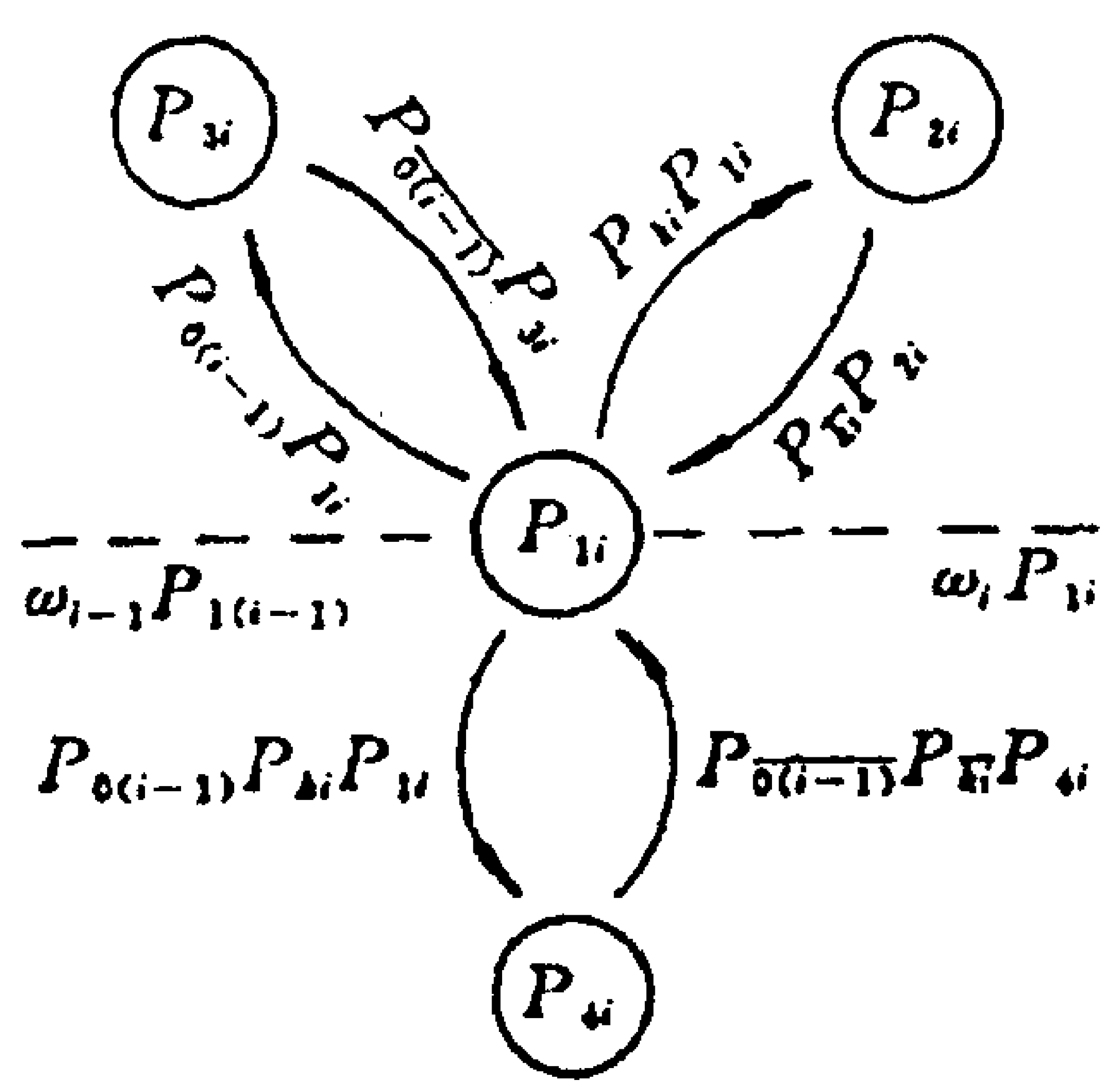

图 3 第 i 个工作站的状态概率转移图

根据假设条件 4), 工作站 1 不饥饿，有 $P_{31}=0$; 工作站 n 不阻塞，有 $P_{2n}=0$，当然 $P_{41}=P_{4n}=0$. 从图 3 可以写出第 i 个工作站状态转移概率方程如下

$$\begin{cases}\dot{P}_{1i}=-(P_{K_i}+P_{0(i-1)}+P_{0(i-1)}P_{K_i})P_{1i}\\ \quad +P_{\overline{K}_i}P_{2i}+P_{\overline{0(i-1)}}P_{3i}+P_{\overline{0(i-1)}}P_{\overline{K}_i}P_{4i}\\ \dot{P}_{2i}=P_{K_i}P_{1i}-P_{\overline{K}_i}P_{2i}\\ \dot{P}_{3i}=P_{0(i-1)}P_{1i}-P_{\overline{0(i-1)}}P_{3i}\\ \dot{P}_{4i}=P_{0(i-1)}P_{K_i}P_{1i}-P_{\overline{0(i-1)}}P_{\overline{K}_i}P_{4i}\end{cases} \tag{5}$$

显然，如果给定起始条件并引用拉氏变换，则可求得上式的瞬时解. 但在工程实践中只需求出稳态解即可. 令(5)式左边全为零，则得稳态解如下

$$P_{2i}=\frac{P_{K_i}}{P_{\overline{K}_i}}P_{1i},\quad P_{3i}=\frac{P_{0(i-1)}}{P_{\overline{0(i-1)}}}P_{1i},\quad P_{4i}=\frac{P_{0(i-1)}P_{K_i}}{P_{\overline{0(i-1)}}P_{\overline{K}_i}}P_{1i}$$

$$\sum_{j=1}^{4}P_{ji}=1=\left[1+\frac{P_{K_i}}{P_{\overline{K}_i}}+\frac{P_{0(i-1)}}{P_{\overline{0(i-1)}}}+\frac{P_{0(i-1)}P_{K_i}}{P_{\overline{0(i-1)}}P_{\overline{K}_i}}\right]P_{1i}=\frac{P_{1i}}{P_{\overline{0(i-1)}}P_{\overline{K}_i}}$$

于是得

$$\begin{cases}P_{1i}=P_{\overline{0(i-1)}}P_{\overline{K}_i}=B_i=A_i & \text{(第 } i \text{ 个站的可用度)表明正常工作概率}\\ P_{2i}=P_{\overline{0(i-1)}}P_{K_i} & \text{阻塞停车概率}\\ P_{3i}=P_{0(i-1)}P_{\overline{K}_i} & \text{饥饿停车概率}\\ P_{4i}=P_{0(i-1)}P_{K_i} & \text{既阻塞又饥饿停车概率}\end{cases} \tag{6}$$

根据以上对第 i 个工作站的状态分析，排除阻塞、饥饿及既阻塞又饥饿三种停车状态，则得到正常工作状态概率 P_{1i}，这就是既无饥饿又无阻塞的正常工作的等效工作站.

设等效工作站的稳态生产率为

$$W_i = P_{\overline{0(i-1)}} P_{\overline{K_i}} \omega_i = B_i \omega_i \ (\text{件/小时})$$

每个工件在第 i 等效工作站中平均加工时间为 $T_{qi} = 1/W_i$，则

$$\begin{cases} \text{实际加工时间} & T_{1i} = 1/\omega_i = B_i/W_i \\ \text{通道阻塞停车时间} & T_{2i} = P_{\overline{0(i-1)}} P_{K_i}/W_i \\ \text{饥饿停车时间} & T_{3i} = P_{0(i-1)} P_{\overline{K_i}}/W_i \\ \text{饥饿又阻塞停车时间} & T_{4i} = P_{0(i-1)} P_{K_i}/W_i \end{cases} \tag{7}$$

以上四种时间相加，则是第 i 个等效工作站加工一个工件的平均时间，即

$$T_{qi} = (P_{\overline{0(i-1)}} P_{\overline{K_i}} + P_{\overline{0(i-1)}} P_{K_i} + P_{0(i-1)} P_{\overline{K_i}} + P_{0(i-1)} P_{K_i})/W_i = 1/W_i \tag{7a}$$

第 i 个工作站的有效度(对单个工作站即为可用度)

$$E_i = W_i/\omega_i = T_{1i}/T_{qi} = B_i = A_i \tag{8}$$

3 串行生产线建模与分析

将 n 个等效工作站串联起来，图 1 的串联生产线则变成等效生产线，如图 4 所示.

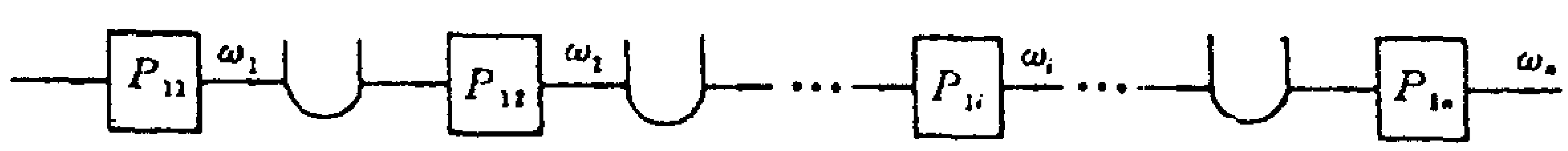

图 4 n 级串联等效生产线

根据工件流平衡原理，如果各站之间不丢失工件，则系统的稳态生产率等于各站生产率，即

$$\begin{cases} W_s = W_1 = W_2 = \cdots = W_n \\ P_{11}\omega_1 = P_{12}\omega_2 = \cdots = P_{1n}\omega_n \\ B_1\omega_1 = B_2\omega_2 = \cdots = B_n\omega_n \end{cases} \tag{9}$$

其中

$$\begin{cases} B_1 = P_{\overline{0(i-1)}} P_{\overline{K_1}} = P_{\overline{K_1}} = \dfrac{1-\rho_1^{K_1}}{1-\rho_1^{K_1+1}} \\ B_2 = P_{\overline{01}} P_{\overline{K_2}} = \dfrac{\rho_1(1-\rho_1^{K_1})}{1-\rho_1^{K_1+1}} \cdot \dfrac{1-\rho_2^{K_2}}{1-\rho_2^{K_2+1}} \\ \quad \cdots\cdots \\ B_n = P_{\overline{0(n-1)}} P_{\overline{K_n}} = \dfrac{\rho_{n-1}(1-\rho_{n-1}^{K_{n-1}})}{1-\rho_{n-1}^{K_{n-1}+1}} \end{cases} \tag{9a}$$

公式(9)为串联生产线在加工过程中不丢失工件的充要条件，但(9)式中隐含着 K_i 及 $\rho_i = \omega_i / \omega_{i+1}$，不便直接求解. 现做一些分析工作，以助于具体求解及设计问题.

从(9)式可得

$$\rho_i = \frac{\omega_i}{\omega_{i+1}} = \frac{B_{i+1}}{B_i} = \frac{\rho_i(1-\rho_i^{K_i})}{1-\rho_i^{K_i+1}} \cdot \frac{1-\rho_{i+1}^{K_{i+1}}}{1-\rho_{i+1}^{K_{i+1}+1}} \cdot \frac{1-\rho_{i-1}^{K_{i-1}+1}}{\rho_{i-1}(1-\rho_{i-1}^{K_{i-1}})} \cdot \frac{1-\rho_i^{K_i+1}}{1-\rho_i^{K_i}}$$
$$= \frac{\rho_i(1-\rho_{i+1}^{K_{i+1}})}{1-\rho_{i+1}^{K_{i+1}+1}} \cdot \frac{1-\rho_{i-1}^{K_{i-1}+1}}{\rho_{i-1}(1-\rho_{i-1}^{K_{i-1}})}$$

于是

$$\begin{cases} \dfrac{1-\rho_{i+1}^{K_{i+1}}}{1-\rho_{i+1}^{K_{i+1}+1}} = \dfrac{\rho_{i-1}(1-\rho_{i-1}^{K_{i-1}})}{1-\rho_{i-1}^{K_{i-1}+1}} \\ P_{\overline{0(i-1)}} = P_{K_{\overline{i+1}}} \end{cases} \tag{10}$$

(10)式为(9)式有解的充要条件，它意味着结构定理如下:

定理 1　在不丢失工件的串行生产线中，第 $i-1$ 个库有库存的概率等于第 $i+1$ 个缓冲库有空位的概率.

从(7a)和(9)式得，每个工件在 n 个工作站上平均逗留时间为

$$T_q = \sum_{i=1}^{n} T_{qi} = \sum \frac{1}{W_i} = \frac{n}{W_s} \tag{11}$$

每个工件在 n 个工作站上实际加工时间为

$$T_p = \sum_{i=1}^{n} T_{1i} = \sum \frac{B_i}{W_i} = \sum B_i / W_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_i} \tag{12}$$

每个工件在 $n-1$ 个缓冲库中的平均逗留时间为

$$T_B = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{M_{K_i}}{W_i} = \sum_{i=1}^{n-1} M_{K_i} / W_s \tag{13}$$

每个工件在整个生产线上平均逗留时间为

$$T = T_B + T_p = \frac{1}{W_s} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} M_{K_i} + \sum_{i=1}^{n} B_i\right) \tag{14}$$

系统的有效度为

$$E_s = \frac{T_p}{T_q} = \left(\sum B_i / W_s\right) \cdot \frac{W_s}{n} = \sum B_i / n = \frac{W_s}{n} \cdot \sum \frac{1}{\omega_i} \tag{15}$$

系统的可用度[2]

$$A_s = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - A_i) \tag{16}$$

4　计算实例

例 1　试设计一条四站串行的离散生产线，要使系统稳态生产率 $W_s = 10$ 件/小时，且中途不丢失工件. 求各缓冲库的容量，各站的额定生产率及系统的有效度和可用度.

解 引用公式(10), 有

$$\frac{\rho_1(1-\rho_1^{K_1})}{1-\rho_1^{K_1+1}}=\frac{1-\rho_3^{K_3}}{1-\rho_3^{K_3+1}} \tag{10a}$$

$$\frac{\rho_2(1-\rho_2^{K_2})}{1-\rho_2^{K_2+1}}=1 \tag{10b}$$

从(10a)和(10b)解得 $\rho_2=1$, 即 $\omega_2=\omega_3$, K_2 的大小不限. 根据假设条件 4), 并考虑对称结构设计, $\omega_1=\omega_4$, 于是 $\rho_1=\omega_1/\omega_2=\omega_4/\omega_3=1/\rho_3$, $K_1=K_3$, ρ_1 大小不限. 为简化设计, 令 $K_1=K_2=K_3=4$, 有

$$W_s=B_1\omega_1=B_2\omega_2=B_3\omega_3=B_4\omega_4=10$$

取 $\rho_1=3/4=0.75$, 当 $K_1=4$ 时, 则

$$B_1=\frac{1-\rho_1^4}{1-\rho_1^5}=0.896\,286\,8=B_4=A_1=A_4$$

$$B_2=\frac{\rho_1(1-\rho_1^4)}{1-\rho_1^5}\cdot\frac{1-\rho_1^4}{1-\rho_2^5}=0.537\,772\,1=B_3=A_2=A_3$$

$$\omega_1=W_s/B_1=11.157\,(\text{件/小时})=\omega_4$$

$$\omega_2=10/B_2=18.595\,(\text{件/小时})=\omega_3$$

每个工件在四个工作站上平均逗留时间: $T_q=n/W_s=0.4$ (小时);

每个工件在四个工作站上实际加工时间: $T_p=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\omega_i}=0.286\,811\,6$ (小时);

系统的有效度为: $E_s=T_p/T_q=0.717\,029$;

系统的可用度为: $A_s=1-\prod_{i=1}^{4}(1-A_i)=0.997\,701\,8$.

当然, 上面所得的结果只是一组可行解. 如果加大 K_i, 则可以提高系统的有效度和可用度.

5 结束语

本文应用文献[2]提出的“等效工作站”方法, 将离散断续工作的生产系统转化为连续不断工作的生产系统, 较好地解决了 DEDS 的建模及分析的问题. 主要结果为:

1) 首先把缓冲库作为一个封闭系统, 用马氏链方法分析, 得出 $K+1$ 个稳定贮存状态, 从中抽取有库存 $(P_{\bar{0}})$ 和有空位 $(P_{\bar{K}})$ 两种状态, 作为系统分析与建模的基础, 这样就解决了维数灾的问题.

2) 将第 i 个工作站上游缓冲库有库存(不饥饿停车)下游缓冲库有空位(不阻塞)两种状态合并到中间的工作站中, 构成一个等效工作站. 再应用概率流稳态平衡原理, 分析得出工作站四种工作状态概率(正常工作, 饥饿, 阻塞, 既饥饿又阻塞).

3) 将所有 n 个等效工作站联成整个系统, 将断续工作的系统转化为连续工作系统, 解决了求解的难题. 同时利用工件流平衡原理, 得出生产线中途不丢失工件的充要条件, 作为合理设计的依据.

4) 最后通过计算实例, 表明文中推导出的理论结果可以直接应用到工程设计中去.

参考文献

1 郑大钟, 郑应平, 离散事件动态系统理论 现况和展望, 自动化学报, 第 18 卷, 第 2 期, 1992 年

2. 疏松桂, 带有缓冲库的 CIMS 分析及其可靠性的研究, 自动化学报, 第 18 卷, 第 1 期, 1992 年

3. 疏松桂, 张 刚, 级联生产线的可靠性分析, 中国自动化学会第三届全国学术年会论文集, 1991 年

MODELLING AND ANALYSIS IN DISCRETE EVENT DYNAMIC SYSTEM

SHU Songgui TAN Min

(Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences)

Abstract A new method, which is called equivalent workstation, is proposed for modelling and analyzing the discrete event dynamic system (DEDS), and some performance indexes are obtained. Finally an example is used for illustrating the application of this method.

Key words DEDS, CIMS problem, complex system, equivalent workstation