第26卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol. 26, No. 2
2000年3月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 2000

问题讨论

关于《一类非线性时滞系统的稳定化控制器设计研究》一定理的讨论[1)]

佘 焱
(上海交通大学信控系 上海 200240)
(E-mail: y * she@mail1. sjtu. edu. cn)

文献[1]将精确线性化的方法应用到一类时滞非线性系统稳定化控制器设计中，提出一种新的稳定化控制器设计方法，其思路是可取的. 但是我认为其中的定理1有误，下面提出一家之言与作者商讨.

考虑单输入非线性时滞系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u(t-\tau), \tag{1}$$

其中 $x\in R^n, u\in R, f(\cdot), g(\cdot)$ 为 C^∞ 非线性向量场；τ 为时滞，$f(0)=0$.

同时引入线性时滞系统

$$\dot{w} = Aw + bu(t-\tau), \tag{2}$$

其中 $w=[w_1\cdots w_n]^{\mathrm{T}}\in R^n$ 为新的状态变量

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

原定理为

定理1. 对于非线性时滞系统(1)，通过微分同胚变换 $w=T(x)$ 将其转化成线性时滞系统(3)的充分必要条件是

(i) $\mathrm{rank}M(x)=n$，其中 $M(x)=[g(x), ad_{f(x)}g(x), \cdots, ad_{f(x)}^{(n-1)}g(x)]$.

(ii) $[ad_f^i g, ad_f^j g](x)=0, 0\leqslant i, j\leqslant n$.

上述定理有误，下面是一个反例.

例. 考虑线性系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t-\tau). \tag{4}$$

下面验证(4)式满足定理1的条件. 这里 $n=2, f(x)=\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, g(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，所以 $ad_f g=[f,g]=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, ad_f^2 g=[f, ad_f g]=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，代入条件(i)，得 $\mathrm{rank}M(x)=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=2$. 由于

1) 上海交通大学青年基金(A9931002)资助项目.

收稿日期 1998-04-28 收修改稿日期 1999-07-30

$g(x),ad_f g(x),ad_f^2 g(x)$是常向量场,所以也满足条件(ii).

下面用反证法证明不存在坐标变换将式(4)变成式(3)的形式

$$\begin{pmatrix}\dot{w}_1\\ \dot{w}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t-\tau). \tag{5}$$

假设这样的微分同胚坐标变换存在,因为(4)式是线性系统,所以该变换只能是线性变换,不妨设为 $w=Mx$,其中

$$M=\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}$$

是可逆阵,令

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}\tilde{m}_{11} & \tilde{m}_{12}\\ \tilde{m}_{21} & \tilde{m}_{22}\end{pmatrix},$$

由式(4),(5),有

$$\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{m}_{11} & \tilde{m}_{12}\\ \tilde{m}_{21} & \tilde{m}_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由上式的第一式可得 $m_{12}=0,m_{22}=1$,再由第二式得

$$\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix}.$$

将 m_{12},m_{22}代入,得

$$\begin{pmatrix}m_{11} & 0\\ m_{21} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{11} & 0\\ m_{21} & 1\end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{pmatrix}0 & m_{11}\\ 1 & m_{21}+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_{21} & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

由上式得 $m_{21}=0,m_{21}=1$就矛盾了,所以这样的变换不存在.

下面是正确的结果.

定理 A. 存在微分同胚坐标变换 $w=T(x)$,将非线性时滞系统(1)化成线性时滞系统(3)的充分必要条件是

(i)$\operatorname{rank}M(x)=n$,其中 $M(x)=[g(x)ad_{f(x)}g(x)\cdots ad_{(x)}^{(n-1)}]$;

(ii)$[ad_f^i g,ad_f^j g](x)=0,0\leqslant i,j\leqslant n-1$;

(iii)$ad_{f(x)}^n g(x)=0$.

证明. 必要性. 假设存在微分同胚坐标变换 $w=T(x)$,将非线性时滞系统(1)化成线性时滞系统(3),由于微分同胚不改变括号积,所以要验证式(1)满足定理 A 条件,只要验证式(3)满足定理 A 条件,直接验证知必要性成立.

充分性. 由定理 A 的条件(i)和条件(ii),可知,存在微分同胚坐标变换 $\omega=T(x)$满足

$$T_*(ad_f^{i-1}g)=\frac{\partial}{\partial\omega_i}=\underbrace{\mathrm{col}(0\cdots010\cdots0)}_{\text{第}i\text{个分量为}1}=T_*[f,ad_f^{i-2}g]=$$
$$[T_*f,T_*(ad_f^{i-2}g)],i=1,\cdots,n. \tag{6}$$

由(6)式,对 $i=2,\cdots,n$,有

$$[T_* f, T_*(ad_f^{i-2} g)] = \left[T_* f, \frac{\partial}{\partial \omega_{i-1}}\right] = \frac{\partial (T_* f)}{\partial \omega_{i-1}} = \frac{\partial}{\partial \omega_i},$$

即$\dfrac{\partial (T_* f_i)}{\partial \omega_j} = \begin{cases} 0, i \neq j+1 \\ 1, i = j+1, \end{cases}$ $j=1,\cdots,n-1$，所以$\dfrac{\partial T_* f}{\partial \omega}$具有以下形式

$$\frac{\partial T_* f}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \times \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \times \\ 0 & \cdots & 1 & \times \end{pmatrix}.$$

由定理 A 的条件(iii)，$T_*(ad_f^n g) = [T_* f, T_*(ad_f^{n-1} g)] = \left[T_* f, \dfrac{\partial}{\partial \omega_n}\right] = \dfrac{\partial T_* f}{\partial \omega_n} = 0$，所以

$$\frac{\partial T_* f}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

考虑到(6)式，并引入线性变换 $w_1 = \omega_n, \cdots, \omega_n = \omega_1$，得式(5). 定理 A 得证.

再看例，由于 $ad_f^2 g = [f, ad_f g] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$，所以不满足定理 A 的条件，因此不存在坐标变换将式(4)变成式(5).

参　考　文　献

1　苏宏业，褚健. 一类非线性时滞系统的稳定化控制器设计研究. 自动化学报，1998，**24**(1)：30～36

余焱　见24卷5期592页.