

可修生产线生产率及缓冲库存的预计*

疏松桂 蒋昌俊

(中国科学院自动化研究所 北京 100080)

1 前言

多级可修生产线是一个特殊大系统. 由于中间缓冲库的容量有限及工作站的不可靠性带来生产线上的阻塞和饥饿现象, 从而形成不规则的断续生产. 这种系统拥有大量的状态空间, 难以精确地分解, 以致寻找解析答案非常困难.

国外已有不少学者做了大量的研究工作, 各自从不同的角度来讨论. 比如就工件加工时间讲, 则有二类, 第一类是确定加工时间的, 如文献[1]~[6], 第二类是随机加工时间, 如文献[7]~[9], 一般失效和修复时间都认为是随机的. 其中[2]、[3]、[7]是采用离散逼近法, 而其余则用连续逼近法. 如就机器失效形式而言, 则分为状态型失效(只当机器在加工工件时才能失效)和时间型失效(机器在运行时包括空转状态都可以失效)二种.

据本文作者所知, 国外只有文献[1]对2级站和文献[2]对3级站取得了精确角. 而对3级站以上的生产线都只能得到近似解: 大致有用分解法(分为 $n-1$ 个2级站如[9])和聚集法(从一端开始逐次聚集为 $n-1$ 个2站加[6]).

本文和[10]~[12]是属于第二类随机加工时间范畴, 且是针对多级生产线进行的. 采用作者提出的等效工作站方法^[10], 将整个系统分解成 n 个等效工作站, 再将所有的等效工作站串联为一条刚性可靠生产线, 排除了原有的阻塞、饥饿和失效状态, 将断续工作系统转化为连续工作系统, 大大地简化了分析求解的过程. 本文在前文的基础上作了进一步的改进与提高, 特别是对中间库的稳态库存状态作了详细分析, 也得出显式的解析解, 本文最后一部分引用文献[9]二个例题, 用本文的计算结果与[9]作了比较, 显示出本文的优越性, 主要是分析细致简单, 结论全面准确, 尤其是对多级中间缓冲库的库存, 提出了新的有效分析方法. 文章最后一个例子是将本文提出方法直接用于工程设计的问题.

2 生产线及运行条件

设有一条 n 级可修生产线, 如图1所示.

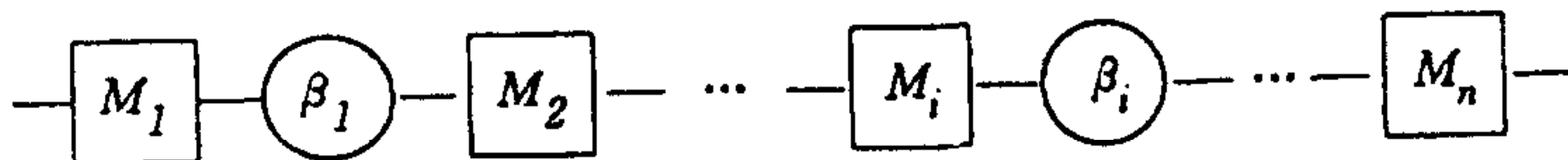


图1 n 级可修生产线

* 《系统研究》, 浙江教育出版社 1996

图中 M_i 表示第 i 级可修工作站, β_i 表示第 i 级中间缓冲库 ($i=1,2,\dots,n$).

定义. 当 β_{i-1} 全空时, 而且 M_{i-1} (或此前另一个工作站) 失效, 则称 M_i 处于饥饿状态. 当 β_i 全满时, 而且 M_{i+1} (或此后另一个工作站) 失效, 则称 M_i 处于阻塞状态.

假设. (1) 第 i 工作站的生产率 ω_i 、失效率 λ_i 和修复率 μ_i 均为随机量. 工件加工时间、工作站故障时间和修复时间服从 ω_i 、 λ_i 和 μ_i 的指数分布. (2) 工作站只在加工时才能失效 (即状态型失效). 任一工作站失效都得到及时修理. (3) 首站不饥饿, 末站不阻塞.

3 中间缓冲库

设在第 i 和 $i+1$ 两个可靠工作站之间有一容量为 K_i (含工作站内一个库存单位) 缓冲库, 构成一个独立隔离的分系统. 前站的生产率为 ω_i , 后站的生产率为 ω_{i+1} , 其中状态转移如图 2 所示.

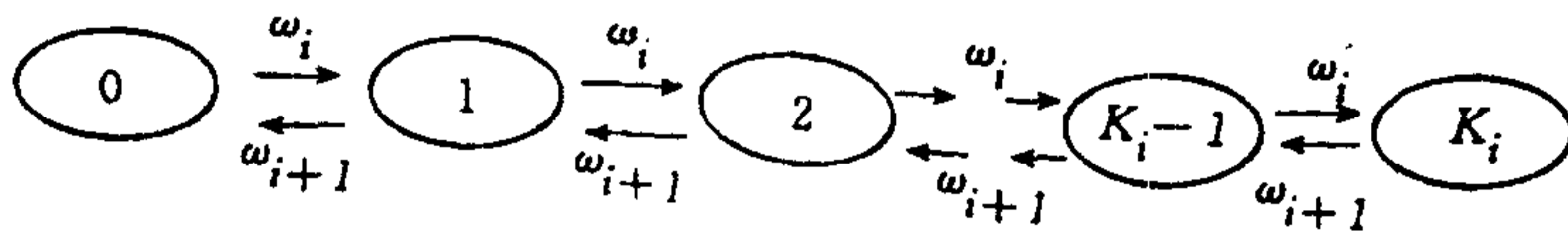


图 2 缓冲库的状态转移图

这里 j (从 0, 1, 2 到 K_i) 表示第 i 缓冲库存贮的工件数.

根据文献[11]应用马尔可夫过程, 解得稳态库存 j 个工件的概率为

$$P_j = \frac{\rho_i^j (1 - \rho_i)}{1 - \rho_i^{j+1}} \quad \left(\sum_{j=0}^{K_i} P_j = 1 \right) \tag{3.1}$$

其中 $\rho_i = \frac{\omega_i}{\omega_{i+1}}$, 显然当 $\rho_i = 1$ 时,

$$P_j = \frac{1}{K_i + 1} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, K_i) \tag{3.1a}$$

为了下部分讨论等效工作站的方便, 我们只要列出下面两种库存状态概率

$$\left. \begin{aligned} \text{有空位(即前站不阻塞)} \quad \bar{P}_{K_i} &= 1 - P_{K_i} = \frac{1 - \rho_i^{K_i}}{1 - \rho_i^{K_i+1}} \\ \text{有库存(即后站不饥饿)} \quad \bar{P}_0 &= 1 - P_0 = \frac{\rho_i (1 - \rho_i^{K_i})}{1 - \rho_i^{K_i+1}} \end{aligned} \right\} \tag{3.2}$$

$$\text{当 } \rho_i = 1 \text{ 时,} \quad \bar{P}_{K_i} = \bar{P}_0 = \frac{K_i}{K_i + 1} \tag{3.2a}$$

平均库存量为

$$\begin{aligned} MK_i &= \sum_{j=1}^{K_i} j P_j \\ &= \frac{\rho_i - (K_i + 1)\rho_i^{K_i+1} + K_i \rho_i^{K_i+2}}{1 - \rho_i - \rho_i^{K_i+1} + \rho_i^{K_i+2}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\text{当 } \rho_i \text{ 时,} \quad MK_i = \frac{K_i}{2} \tag{3.3a}$$

4 等效工作站

定义. 一个生产线上的工作站排除前后有限容量缓冲库造成饥饿和阻塞的空转概率和机器本身失效停车修理的概率, 则成为一个理想连续不停产的机器, 即所谓等效工作站.

令 P_{li} 表示第 i 工作站处于状态 l 的概率. 当 $l=1$ 到 5 时, 分别代表工作站处于 (1) 正常工作, (2) 阻塞, (3) 饥饿, (4) 既阻塞又饥饿, (5) 失效修理五种状态概率. 也就是这五种独立事件的时间比率. 它们的状态转移如图 3 所示.

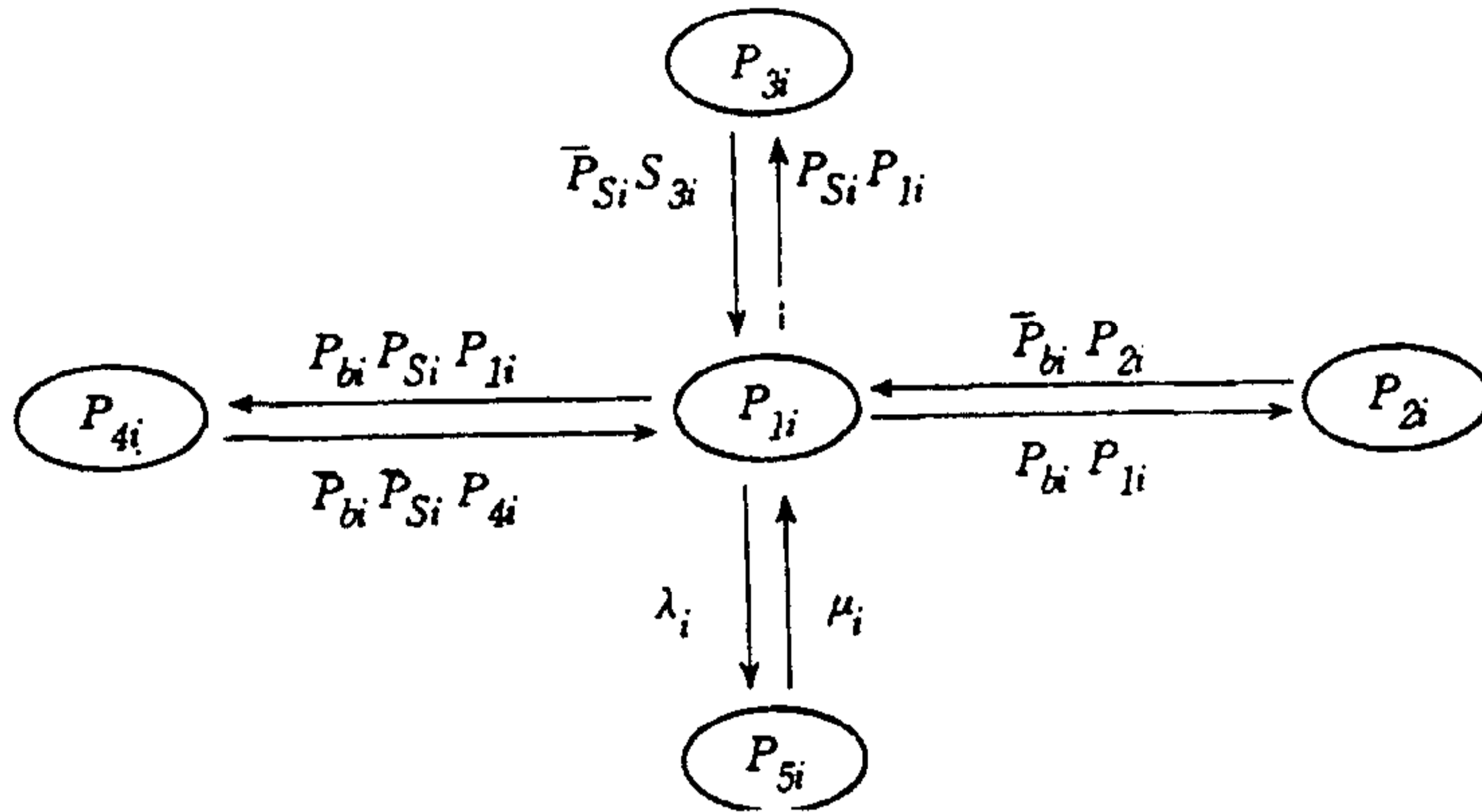


图 3 工作站 M_i 状态转移图

按照前面第二部分中对 M_i 处于阻塞状态 (P_{bi}) 和饥饿状态 (P_{Si}) 的定义, 并为了简化表达式起见, 略去 M_{i-1} 以前和 M_{i+1} 以后的机器失效对饥饿和阻塞的影响, 可得

$$\left. \begin{aligned} P_{bi} &= \bar{P}_{0(i-1)} P_{K_i} \bar{P}_{a(i+1)} \\ P_{Si} &= P_{0(i-1)} \bar{P}_{K_i} \bar{P}_{a(i-1)} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

其中 $P_{ai} = \frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i} = A_i$ (即单机 M_i 独立工作的可用度) 并令 $B_i = \bar{P}_{bi} \bar{P}_{Si} = (1 - P_{bi})(1 - P_{Si})$

(即 M_i 前后两个缓冲库相对 M_i 的总合可用度), 于是从图 3, 可得下列微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}_{1i} &= \bar{P}_{bi} P_{2i} + \bar{P}_{Si} P_{5i} + \bar{P}_{bi} \bar{P}_{Si} P_{4i} + \mu_i P_{5i} \\ &\quad - (P_{bi} + P_{Si} + P_{bi} P_{Si} + \lambda_i) P_{1i} \\ \dot{P}_{2i} &= P_{bi} P_{1i} - \bar{P}_{bi} P_{2i} \\ \dot{\bar{P}}_{3i} &= P_{Si} P_{1i} - \bar{P}_{Si} P_{2i} \\ \dot{\bar{P}}_{4i} &= P_{bi} P_{Si} P_{1i} - \bar{P}_{bi} \bar{P}_{Si} P_{4i} \\ \dot{\bar{P}}_{5i} &= \lambda_i P_{1i} - \mu_i P_{5i} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

令上式的左边全为零, 则得稳态解为

$$P_{1i} = \frac{\mu_i B_i}{\mu_i + \lambda_i B_i} = \frac{1}{\frac{1}{B_i} + \frac{\lambda_i}{\mu_i}} = A'_i = E_i \text{ (即在生产线上正常工作的概率, 也叫等效工作站的可用度(效率))}$$

$$\left. \begin{aligned}
 P_{2i} &= \frac{P_{bi}}{P_{bi}} A'_i (M_i \text{ 阻塞状态概率}) \\
 P_{3i} &= \frac{P_{Si}}{P_{Si}} A'_i (M_i \text{ 饥饿状态概率}) \\
 P_{4i} &= \frac{P_{bi} P_{Si}}{B_i} A'_i (M_i \text{ 同时阻塞又饥饿的概率}) \\
 P_{5i} &= \frac{\lambda_i}{\mu_i} A'_i = \frac{\lambda_i B_i}{\mu_i + \lambda_i B_i} (M_i \text{ 停车修理的概率}) \\
 \sum_{i=1}^5 P_{ii} &= 1
 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

上式五种状态的概率也就是相应的时间比率(构成一个全概率).
 由于阻塞和饥饿的总合效应, M_i 空转的时间比率为

$$P_{bs_i} = P_{2i} + P_{3i} + P_{4i} = \frac{\mu_i(1 - B_i)}{\mu_i + \lambda_i B_i} \quad (4.3a)$$

等效工作站的生产率为

$$W_i = P_{ii} \omega_i = \omega_i A'_i = \frac{\omega_i \mu_i B_i}{\mu_i + \lambda_i B_i} \quad (4.4)$$

很明显,当 M_i 独立工作时,则无阻塞和饥饿现象,于是,代入以上各式可得

$$\left. \begin{aligned}
 P_{1i} &= \frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i} \\
 P_{2i} &= P_{3i} = P_{4i} = P_{bs_i} = 0 \\
 P_{5i} &= \frac{\lambda_i}{\mu_i + \lambda_i}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.3b)$$

$$W_i = \frac{\omega_i \mu_i}{\mu_i + \lambda_i} = W'_i \quad (4.4a)$$

5 等效生产线

根据等效工作站的分析结果,抛弃停产状态概率(包括阻塞和饥饿状态的空转和机器失效停车修理),将正常生产部分(即 P_{ii})串联起来,即为等效生产线,如图 4 所示.

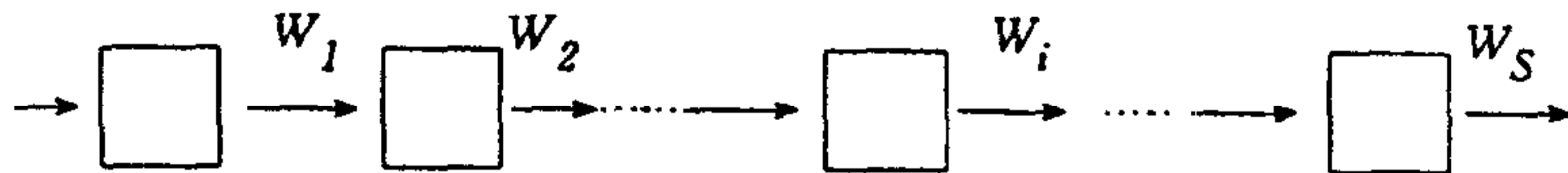


图 4 等效生产线

等效生产线是意味着理想无故障连续不断工作的生产线. 它的各站之间已无缓冲库而成为刚性的连接. 按照工件流守恒原理,各个工作站的平均生产率必相等,则由(4.4)式,可得系统生产率为

$$\left. \begin{aligned} W_s = W_i &= \frac{\omega_i \mu_i B_i}{\mu_i + \lambda_i B_i} = \frac{\omega_i}{\left(\frac{1}{B_i} + \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)} = A'_i \omega_i \\ \text{或 } W_s &= P_{ii} \omega_i = A'_i \omega_i, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

上式是生产线中工件流平衡(即生产线上不流失工件,也不新生工件)的充要条件.

定义. 系统有效度(效率)是指系统实际生产量相当全额生产量的概率,也就是每个工件在生产线上各站实际加工总时间对各站运行总时间之比,即

$$E_s = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{W_i}} = \frac{W_s}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i} \quad (5.2)$$

上式可以作为系统优化设计的目标函数.

定义. 均匀生产线. 如果各个工件站相同($\omega_i, \lambda_i, \mu_i$ 相同),各个缓冲库亦相同(K_i 相同),则公式(5.1)自然满足,这种系统中心任务理想均匀生产线.于是有

$$\begin{aligned} \rho_i &= \frac{\omega_i}{\omega_{i+1}} = 1 = \rho(i = 1, 2, \dots, n), K_i = K_{i+1} = K \\ P_0 &= P_K = \frac{1}{K+1}, \bar{P}_0 = \bar{P}_K = \frac{K}{K+1} \end{aligned}$$

将上列参数代入公式(4.1),则有

$$\left. \begin{aligned} P_{bi} &= \bar{P}_{0(i-1)} P_{K_i} \bar{P}_{a(i+1)} = \frac{K}{K+1} \times \frac{1}{K+1} \times \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \\ &= \frac{K}{(K+1)^2} \times \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \\ P_{Si} &= \bar{P}_{0(i-1)} P_{K_i} \bar{P}_{a(i-1)} = \frac{1}{K+1} \times \frac{K}{K+1} \times \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \\ &= \frac{K}{(K+1)^2} \times \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \\ B_i &= \bar{P}_{bi} \bar{P}_{Si} = (1 - P_{bi})(1 - P_{Si}) \\ &= \left(1 - \frac{K}{(K+1)^2} \times \frac{\lambda}{\mu + \lambda}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.1a)$$

将上式中值代入公式(5.1),则得 W_s ,于是从(5.2)式得 E_s .

如果各站的可靠性数据(λ_i, μ_i)不完全相同,但 $I_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}$ (在设计中可以调整修改

人力,即调整 μ_i 的大小),这样在 $\omega_i = \omega_{i+1} = \omega$ 和 $K_i = K_{i+1} = K$ 的情况下,公式(5.1)仍能满足,则此种系统仍可视作均匀生产线.如果只有 $\rho_i = 1$ 的条件,则称为一般均匀生产线.

定义. 非均匀生产线. 如果各站的设计数据不相同,缓冲库的容量也各异,则各个等效工作站的生产率也各不相同,这种系统叫做非均匀生产线.于是公式(5.1)不能成立.但各站的平均生产率须得满足工件流平衡原理,于是系统生产率

$$W_s = \min_i W_i = \min_i \frac{\omega_i \mu_i B_i}{\mu_i + \lambda_i B_i} \quad (5.3)$$

上式表明最小生产率等效工作站的输出率即为系统的生产率. 这就是所谓瓶颈作用. 在瓶颈站之前的各站仍会有不同程度的阻塞现象, 而在瓶颈后的各站则有不同程度的饥饿现象. (注意: 等效工作站的瓶颈不一定是孤立工作站的瓶颈.)

不难看出: 在非均匀生产线中, 如果加上智能控制措施, 适当地调节各站生产率 ω_i 的大小, 使得工件流平衡公式 (5.1) 随时满足, 这样可以对本来非均匀生产线, 维持均匀生产.

6 中间缓冲库平均库存量的推算

前面 (3.3) 式及 (3.3a) 式表示两个可靠工作站之间缓冲库的平均库存量, 对于多级可修生产线的库存状态则不适用.

由于任一工作站失效都得到及时修理, 则在稳态情况下可以认为没有两个工作站时失效. 于是可按下列步骤, 推算出各个中间缓冲库及全系统的库存工件数.

(1) 在无工作失效时, 库存工件数如 (3.3) 或 (3.3a) 式所示. 这种状态概率为

$$P(A_s) = \prod_{i=1}^n A_i = \prod_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i} \quad (6.1)$$

(1) 当第 i 工作站失效时, 则其前缓冲库都无空位 (阻塞), 其后缓冲库都无库存 (饥饿), 这种状态概率为

$$P(\bar{A}_i) = \frac{\bar{A}_i}{A_i} \prod_{i=1}^n A_i = I_i \prod_{i=1}^n A_i \quad (6.2)$$

$$\text{其中 } I_i = \frac{\bar{A}_i}{A_i} = \frac{\frac{\lambda_i}{\mu_i + \lambda_i}}{\frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i}} = \frac{\lambda_i}{\mu_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.2a)$$

(3) 为了简化计算工作起见, 可用权重代替概率. 令全无失效概率 ((6.1) 式) 的权重为 1, 那么第 i 工作站失效 ((6.2) 式) 的权重则为 I_i .

(4) 最后, 各个工作站及全系统的缓冲库平均库存工件数可按下表计算.

从表 1 最后一行的结果, 可得一般均匀生产第 i 缓冲库的稳态度存量为

$$MK'_i = \frac{\frac{K_i}{2} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^n I_i \right]}{1 + \sum_{i=1}^n I_i}, \left(I_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6.3)$$

对非均匀生产线, 在无失效的情况下, 各个库存量 MK'_i 则须按 (3.3) 式计算. 而在有失效的情况仍同下表. 于是得第 i 缓冲库的稳态库存量为

$$MK_i = \frac{MK_i' + K_i \sum_{i=1}^n I_i}{1 + \sum_{i=1}^n I_i} \quad (6.3a)$$

全生产线中总库存量为

$$MK = \sum_{i=1}^{n-1} MK_i \quad (6.4)$$

表 1

缓冲库 <i>i</i>		平均库存量, MK_i					备注
		1	2	...	$n-2$	$n-1$	
失效	权重	1	2	...	$n-2$	$n-1$	Eq. (3.3a)
无失效	1	$K_1/2$	$K_2/2$...	$K_{n-2}/2$	$K_{n-1}/2$	
第 1 站失效	I_1	0	0	...	0	0	
第 2 站失效	I_2	$K_1 I_2$	0	...	0	0	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
"(n-1)"	I_{n-1}	$K_1 I_{n-1}$	$K_2 I_{n-1}$...	$K_{n-2} I_{n-1}$	0	
"n"	I_n	$K_1 I_n$	$K_2 I_n$...	$K_{n-2} I_n$	$K_{n-1} I_n$	
和	$1 + \sum_{i=1}^n I_i$	$\frac{K_1}{2} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^n I_i \right]$	$\frac{K_2}{2} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^n I_i \right]$...	$\frac{K_{n-2}}{2} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^n I_i \right]$	$\frac{K_{n-1}}{2} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^n I_i \right]$	I_n

7 计算例题

例 1. 取文献[9]中表 1 的数据作为一个非线性非均匀生产线的例子(见表 2)

表 2

给定数据(见[9]表 1)							
<i>i</i>	$\mu_i(r)$	$\lambda_i(p)$	$A_i(l_i)$	$\omega_i(\mu_i)$	$W_i'(l_i)$	$k_i(c+1)$	备注
1	0.05	0.03	0.625	0.5	0.3125	9	$K_i = C_i + 1$
2	0.06	0.04	0.600	~	~	9	A_i 见(4.1a)
3	0.05	0.03	0.625	0.5	0.3125	-	W_i' 见(4.4a)

求解:按照上表改变 ω_2 数值, 计算出下面的答案:

- (1) 系统生产率 W_s ;

表 3

计算结果(括弧内数字是[9]的答案)											
ω_2	$W'_2 = \omega_2 A_2$	$\rho_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2}$	$\rho_2 = \frac{\omega_2}{\omega_3}$	\bar{P}_b	\bar{P}_S	B	W_S	E_S	MK_1	MK_2	备注
0	0	∞	0	1	1	1	0	0	9.0	0	\bar{P}_i 和见
0.1	0.06	5.0	0.2	1	1	1	0.0714 (0.060)	0.3332	7.029 (9.618)	1.953 (0.382)	(4.1), B 见 (5.2), W_S 见
0.5	0.30	1.0	1.0	0.9663	0.9663	0.9336	0.2877 (0.209)	0.5754	5.546 (6.203)	3.454 (3.736)	(5.3), E_S 见 (5.2), MK_i
1.0	0.60	0.5	2.0	1	0.9996	0.9996	0.3124 (0.246)	0.5207	4.322 (4.365)	4.678 (5.635)	见(6.3a)
3.0	1.80	0.1667	6.0	1	1	1	0.3125 (0.266)	0.4514	3.977 (3.153)	4.953 (6.849)	
100	60.0	0.005	2.00	1	1	1	0.3125	0.4177	3.977	5.021	
∞	∞	0	∞	1	1	1	0.3125	0.4167	3.977	5.023	

(2) 系统有效度 E_s ;

(3) 两个中间缓冲库的稳态库存量 MK_1 和 MK_2 .

解答:按照本文的方法,计算结果列入表 3.

(1) W_S 是生产线的瓶颈生产率,它是从(5.3)式得到的; W_S 随 ω_2 逐渐增大,直至 $W_2 = W_3$, 相应 $\omega_2 = \frac{5}{9}$ (可以算出). 这是瓶颈从 M_2 转移到 M_3 的交点. 从表中得数可以看出:本文的答案大于文献[9]的得数(见括弧中数字). 这是由于文献[9]的算式(22)用 P_{K_i} 和 $P_{0(i-1)}$ 代替了 P_{b_i} 和 P_{S_i} , 而且忽略了阻塞和饥饿同时发生的影响. 显然,后者是近似的算法.

(2) E_S 是从(5.2)式得到的,文献[9]未定义此项性能指标.

(3) MK_i 是从(6.3a)式直接算出的,得数 $MK_1 + MK_2 = 9.0$, 符合 $(K_1 + K_2)$ 的 $\frac{1}{2}$. 但文献[9] $(\bar{n}_1 + \bar{n}_2) = 10$, 这是由于 K_i 与 \bar{n}_i 的定义不同所致.

(4) 更进一步可以看出:本文的算法适用于 ω_i 从 0 到 ∞ 的变化,对其参数(如 λ_i, μ_i)也是一样的适用,而文献[9]则否.

例 2. 取文献[9]中表 3 的数据作为一个 l 级生产线的例子(如表 4).

表 4

给定数据(见[9]表 3)							
i	$\mu_i(r)$	$\lambda_i(p)$	$A_i(e_i)$	$\omega_i(\mu_i)$	$W_i(\rho_i)$	$k_i(c+1)$	备注
1	0.3	0.02	0.9375	0.20	0.1875	3	
2	0.4	0.05	0.8889	0.23	0.2044	3	
3	0.1	0.01	0.9091	0.30	0.2727	5	
4	0.4	0.07	0.8511	0.26	0.2213	3	
5	0.3	0.03	0.9091	0.21	0.1909	3	
6	0.1	0.03	0.7692	0.27	0.2077	5	
7	0.4	0.06	0.8696	0.26	0.2261	—	

求解:

表 5

计算结果(括弧内数字是[9]的答案)								
i	1	2	3	4	5	6	7	备注
$\rho_i = \omega_i / \omega_{i+1}$	0.2/0.23	0.23/0.3	0.3/0.26	0.26/0.21	0.21/0.27	0.27/0.26		
W_i	0.1836	0.1982	0.2596	0.2111	0.1672	0.2011	0.2192	用(4.4)式
E_i	0.9180	0.8617	0.8653	0.8119	0.7962	0.7448	0.8431	用(5.2)式
M_k	2.0709 (2.3460)	1.8095 (1.9121)	3.2915 (3.8464)	1.6927 (2.4337)	1.3566 (1.6054)	1.6661 (1.4906)		用(6.3a)式

- (1) 系统生产率 W_s ;
- (2) 系统有效度 E_s ;
- (3) 各个中间缓冲库的库存量及全线库存量.

解答: 计算结果列入表 5

(1) 系统生产率

$$W_s = \min_i W_i = 0.1672 \text{ (它比文献[9]答案 } 0.1333 \text{ 稍大)}$$

(2) 系统有效度

$$E_s = \frac{W_s}{n} \sum_{i=1}^7 \frac{1}{\omega_i} = \frac{0.1672}{7} \left(\frac{1}{0.2} + \frac{1}{0.23} + \frac{1}{0.3} + \frac{1}{0.26} + \frac{1}{0.21} + \frac{1}{0.27} + \frac{1}{0.26} \right)$$

(3) 各个中间缓冲库的库存量见表 5

全线库存量 $\sum_{i=1}^6 MK_i = 11.8873$, 比文献[9]的 $\sum_{i=1}^6 (\bar{n}_i) = 13.6242$ 要小, 二者的差别是由于定义的不同所致.

同所致.

例 3. 试设计一条 5 级生产线, 给定工作站机器可靠性数据及中间缓冲库容量和系统生产率如表 6

表 6

i	1	2	3	4	5	备注
λ_i	0.07	0.05	0.05	0.05	0.07	$n=5$
μ_i	0.5	0.4	0.4	0.4	0.5	$K_i=6$
$I_{i6} = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$	0.140	0.125	0.125	0.125	0.14	$W_s=10$ 件/小时

求解:

- (1) 各级工作站的设计(额定)生产率 ω_i ;
- (2) 系统的有效度 E_s ;
- (3) 各级缓冲库的稳态库存量及全线总库存量.

解答:

(1) 从给定的数据, 可以认为中间三个站是一般均匀生产线.

于是有

$$\rho_i = \frac{\omega_i}{\omega_{i+1}} = 1, \quad i = 2, 3, 4$$

$$\bar{P}_{K_i} = \frac{K_i}{K_i + 1} = \frac{6}{7} = 0.85714 = \bar{P}_{0_i}$$

$$A_i = \frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i} = \frac{1}{1 + 0.125} = 0.88889 = P_{a_i} = 1 - \bar{P}_{a_i}$$

$$\bar{P}_{a_i} = 0.11111$$

从(4.1)式, 得

$$P_{b_i} = \bar{P}_{0(i-1)} P_{K_i} \bar{P}_{a(i+1)} = \frac{6}{7} \times \frac{1}{7} \times 0.11111 = 0.01361$$

$$\bar{P}_{S_i} = \bar{P}_{0(i-1)} \bar{P}_{K_i} P_{a(i+1)} = \frac{1}{7} \times \frac{6}{7} \times 0.11111 = 0.01361$$

$$B_i = \bar{P}_{b_i} \bar{P}_{S_i} = 0.97297, \quad i = 2, 3, 4$$

$$B_1 = B_5 = \bar{P}_{K_1} = \bar{P}_{0_5} = 1 - P_{b_1} = 1 - 0.01361 = 0.98639$$

从(5.1)式, 得

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= W_s \left(\frac{1}{B_i} + \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right) = 10 \left(\frac{1}{0.98669} + \frac{0.07}{0.5} \right) = 11.5380, \quad i = 1, 5 \\ \omega_i &= 10 \left(\frac{1}{0.97297} + \frac{0.05}{0.4} \right) = 11.5278, \quad i = 2, 3, 4 \end{aligned} \right\} \quad \text{答数(1)}$$

$$(2) E_s = \frac{W_s}{n} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{W_i} = \frac{10}{5} \left(\frac{2}{11.5380} + \frac{3}{11.5278} \right) = 0.8672$$

(3) 从 ω_i 的得数看, 可以认为所设计的系统是一般均匀生产线, 可按公式(6.3), 得各级缓冲库的稳态库存量按序为 $MK_i = 3.6798, 3.2266, 2.7734, 2.3203, i = 1, 2, 3, 4$, 全线稳态总库存 $\sum_{i=1}^4 MK_i = 12.00$.

8 结论

本文在前文^[11]的基础上, 进一步精确地定义了阻塞和饥饿的含义, 提高了系统生产率, 并详细地分析了多级缓冲库的稳态库存量. 主要成果有以下几点:

(1) 首先分析两个可靠工作站之间缓冲库的存贮状态, 并从 $K_i + 1$ 个状态概率中取两个作为构成等效工作站之用.

(2) 再将第 i 工作站运行的全概率分为五个独立状态概率. 取其中正常工作状态作为一个无故障的等效工作站.

(3) 将所有等效工作站串联成一条等效生产线. 这样就将一个断续生产系统转变成一个无故障连续工作系统.

(4) 对系统的主要可靠性性能指标, 如系统生产率、系统有效度(效率)、各个工作站运行状态的时间比率等, 都推导出明显的表达式.

(5) 特别是对中间缓冲库的稳态贮存状态推导出显式表示式.

(6) 这里准确地定义了阻塞(P_{b_i})和饥饿(P_{S_i})代替前文中 P_{K_i} 和 $P_{0(i-1)}$. 这样提高了计算精度和系统生产率.

(7) 第 7 部分中前两个例题比较了本文与文献[9]的计算结果, 显示出本文的优越性. 第三个例题是将本文的结果直接应用于生产设计.

参考文献

1. Wijngaard J. The effect of interstage buffer storage on the output of two unreliable production units in series, with different production rates. *AIIE Trans*, 1979(11 1):42~47
2. Gershwin S B, Schick I C. Modeling and analysis of three-stage transfer lines with unreliable machines and finite buffers. *Operations Research*, 1983,31(2):354~380
3. Gershwin S B. An efficient decomposition method for the approximate evaluation of tandem queues with finite storage space and blocking. *Oper. Res.*, 1987,35(2):291~305
4. Glassey C R, Hong Y. Analysis of behaviour of an unreliable m-stage transfer line with (n-1) inter-stage storage buffer. *Int. J. Prod. Res.*, 1993,31(3):519~530
5. Dallery Y, David R, Xie Xiaolan. Approximate analysis of transfer lines with unreliable machines and finite buffers. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 1989, 34(9):943~953
6. Dekoster M B M. Estimation of line efficiency by aggregation. *Int. J. Prod. Res.*, 1987,25(4):615~626
7. Gershwin S B, Berman O. Analysis of transfer lines consisting of two unreliable machines with random processing times and finite storage buffers. *AIIE Trans*, 1981, 13(1):2~11
8. Koster D. An improved algorithm to approximate the behaviour of flow lines. *Int. J. Prod. Res.*, 1988,26(4):691~700
9. Choong Y F, Gershwin S B. A decomposition method for the approximate evaluation of capacitated transfer lines with unreliable machines and random processing times. *IIE Transactions*, 1987,19(2)
10. 疏松桂. 带有缓冲库的 CIMS 分析及其可靠性的研究. *自动化学报*, 1992(1)
11. Shu songgui, Yao Z Q. The modeling and analysis of the multiple stage repairable CIMS with finite buffers. Preprints of IFAC/EFORS/IMACS Symposium Large Scale System: theory and Application, August, 1992
12. 疏松桂, 张一刚. 级联生产线的可靠性分析. *控制理论与应用*, 1994,11(4)