最可靠控制系统的综合*

疏　松　桂

(中国科学院自动化研究所)

摘　要　本文讨论利用复式的方法,综合最可靠控制系统的问题.对只受一个约束条件的系统,直接从工程设计中少花钱、多收益的概念出发,加强薄弱环节,平衡提高各个串联环节的可靠性,应用偏微分求最大值的原理,推导出最可靠控制系统的准确表达式.对带有多个约束条件的可靠性最优化问题,则借助拉格朗日乘子法直接求解.同时,指出不受任何条件约束的复式混合故障系统,也有可靠性最优化的问题,并导出了答案.另外举出计算例题,便于一般工程技术人员参阅和应用.

本文明确提出按照控制系统中元器件的故障性质分为独立(开路型)故障与相依(短路型)故障两类,这样不但有利于分析元器件或分系统故障对总系统可靠性影响的大小,同时也便于进行最可靠控制系统的设计.

1　前　言

近十多年来,自动控制系统应用日广,自动化程度越来越高,系统规模越来越大,因而系统可靠性越来越不能满足使用的要求,特别是在军用及航天设备方面.于是系统可靠性的最优设计也就成为一个现实问题.

最可靠控制系统可以认为是最优控制系统中的一个特例.这里主要是讨论在某些限制的条件下(如体积、重量、投资等限制),用给定类型的元器件构成可能达到最大可靠性的系统或装置.对混合故障系统而言,纵然不受上述条件的限制,也还有用可靠性已知的元器件,综合达到最可靠控制系统的问题.

为了便于系统可靠性的分析与综合和进行最优化设计,按系统中元器件的故障性质分为独立故障与相依故障两类.凡是并联的元器件或分系统的故障影响到其余并联的元器件或分系统也失去正常工作能力者,则称为相依故障(如短路型故障).如果这些元器件或分系统的故障不影响其余并联元器件或分系统的正常工作,则称为独立故障(如开路型故障).

一般系统可靠性的最优设计都是属于受不等式约束的最优化问题.通常对于这种类型的问题是要采用比较复杂的数学规划去解决[1,2].作者于1963年在某军事工程学院讲课时,曾用逻辑推理的办法,使用偏微分求最大值的原理直接推导出受一个约束条件的最可靠控制系统的数学表达式.对于受多个约束条件的问题,采用了拉格朗日乘子法(Lagrange Multipler)去处理.随后经过一些补充修改和实践,深信这种方法不但可行而且简便.

* 《自动化学报》第6卷第1期,8－17页.

近几年来国外也有人采用拉格朗日乘子法处理可靠性的最优化问题[3,4]. 但是他们在列出拉格朗日乘子方程的同时, 要将目标函数转换为对数形式, 再使用牛顿方法进行求解, 不如本文直接求解方便.

2　独立故障串并联复式系统可靠性的最优综合

普通元器件的故障属于独立性质者较多, (当然相依故障也是不可避免的). 国外一般文献所讨论的可靠性问题基本上都是指这一种类型的系统. 现在让我们先来讨论独立故障串并联复式系统可靠性最优化的问题.

设有一个独立故障串并联复式系统如图1所示. 总系统共有 n 个不同环节串联, 其中第 i 个环节又有 m_i 个相同的元器件并联. 现在要问在有限制的条件下, 各个环节中应配备多少并联元器件才能达到最可靠控制系统的设计.

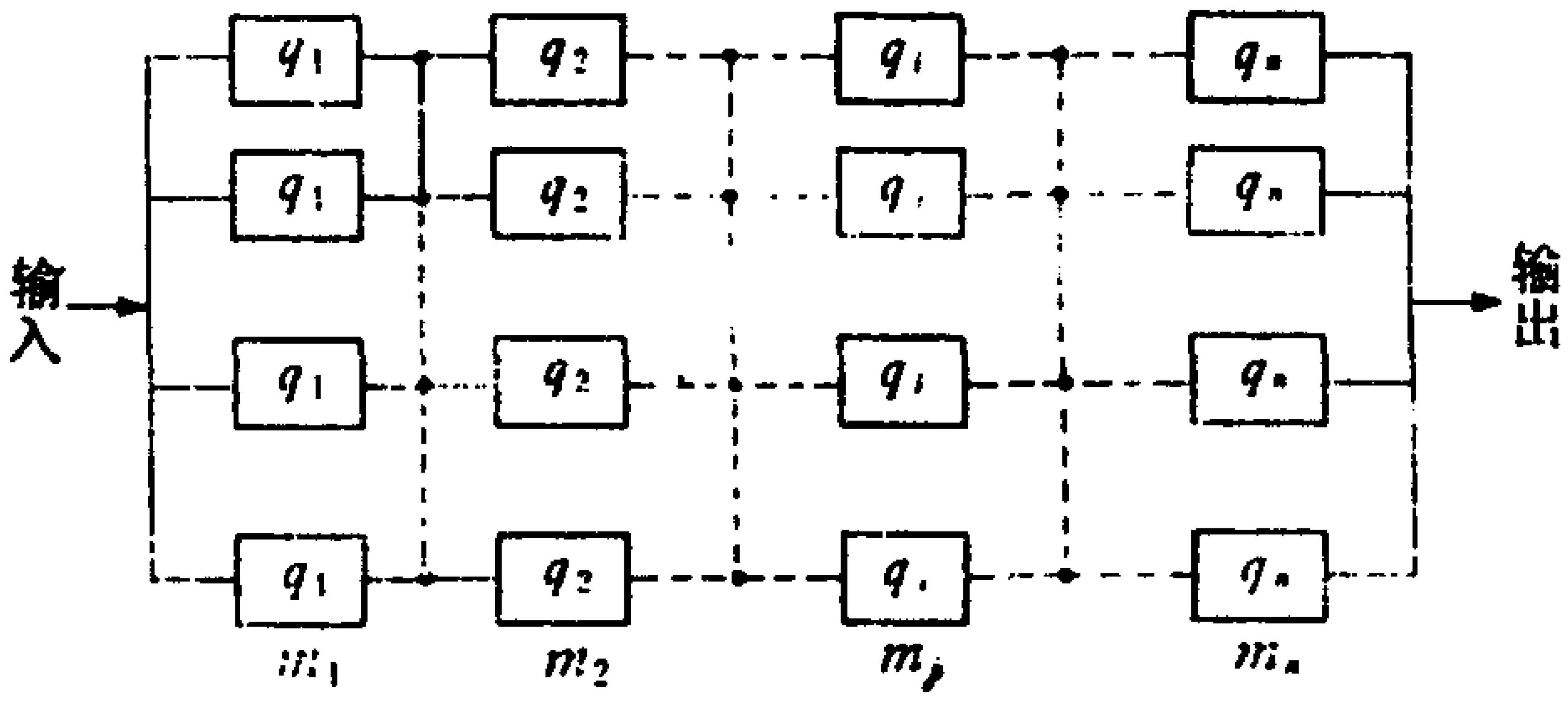

图 1　可靠性串并联复式系统

下面分两种情况来讨论这种系统可靠性最优化的问题.

1.　**给定一个限制条件　(如投资不能超过 W)**, 即

$$\sum_{i=1}^{n} w_i m_i \le W \tag{1}$$

其中 w_i 表示用于第 i 环节中的每个元器件的限制值, W 为总限制值, m_i 是待确定的并联元器件的数目.

根据串并联回路可靠性预计原理, 可知总系统的可靠度为

$$R=\prod_{i=1}^{n} R_i=\prod_{i=1}^{n}\left[1-Q_i\right]=\prod_{i=1}^{n}\left[1-q_i^{m_i}\right] \tag{2}$$

其中 R_i 及 Q_i 分别表示第 i 个环节的可靠度及故障概率, q_i 表示其中每个元器件的故障概率. 因为假定这个系统中元器件故障都是独立的, 所以要等到这个环节中所有的并联元器件都失败时, 这个环节才失去工作能力, 即这个环节的失败概率为

$$Q_i=q_i^{m_i}$$

在这个总系统中, 各个串联的环节都有其独特的作用, 不能减少任何一个或几个环节. 因此, 要提高系统可靠性只有提高各个环节的可靠性. 由于各个环节是由若干个相同的元器件并联而成的, 元器件的可靠性又是已定的. 这样要提高各个环节的可靠性, 唯一的办法是加大其中并联回路的数目 m_i. 但 m_i 是受了公式(1)条件的限制, 不能随意加大的.

公式(1)表示$\sum_{i=1}^{n} w_i m_i$随着$\sum_{i=1}^{n} m_i$的增加而上升，直至达到约束量的上限W为止. 公式(2)则表明R随着$\sum_{i=1}^{n} m_i$而单调的上升，最后趋近于1. 由此可见R的最大值必然出现在$\sum_{i=1}^{n} w_i m_i$的上限W.

现在的问题是要研究如何确定各个m_i以达到系统可靠性最优的目的. 从工程设计的概念出发，是要少花钱多收效，加强薄弱环节平衡发展，所以在增添复式元器件加大系统可靠性时，每次都要考虑应该增添哪个环节的并联元器件才能达到对可靠性贡献最大，直至达到约束量上限为止. 在理想情况下，各个串联环节的约束量(w_i, m_i)对系统可靠性的微商应相等.

取公式(2)对$(w_x m_x)$的偏微分(x是i中的一个特定数)，得

$$\frac{\partial R}{\partial(w_x m_x)} = \frac{\partial R}{w_x \partial m_x} = \left[\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1-q_i^{m_i}\right)}{w_x\left(1-q_x^{m_x}\right)}\right]\frac{\partial\left(1-q_x^{m_x}\right)}{\partial m_x}$$

$$= -\left[\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1-q_i^{m_i}\right)}{w_x\left(1-q_x^{m_x}\right)}\right] q_x^{m_x} \ln q_x \tag{3}$$

上式中方括弧内的数值对m_x讲是一个常数，因为它的分子中只有一个$\left(1-q_x^{m_x}\right)$项恰巧被分母中这一项消去了. 因$q_x < 1$，所以$\ln q_x$为负数，也就是说(3)式为正数，即R随m_i的加大而上升的.

将$x = 1,2\cdots n$分别代入(3)式，然后再令这些微商相等，并消去其中共同因子$\prod_{i=1}^{n}\left(1-q_i^{m_i}\right)$，则得

$$-\frac{q_1^{m_1}\ln q_1}{w_1\left(1-q_1^{m_1}\right)} = -\frac{q_2^{m_2}\ln q_2}{w_2\left(1-q_2^{m_2}\right)} = \cdots = -\frac{q_n^{m_n}\ln q_n}{w_n\left(1-q_n^{m_n}\right)} \tag{3a}$$

上式中实际上只有$n-1$个独立式，再加工公式(1)联解之，则可得n个待定的数：$m_1, m_2, \cdots, m_n$.

具体解法，可以先令(3a)式的数值等于一个比例常数c，即

$$-\frac{q_i^{m_i}\ln q_i}{w_i\left(1-q_i^{m_i}\right)} = c, \qquad (i = 1,2,\cdots,n.) \tag{3b}$$

解上式得$q_i^{m_i}\left(-\ln q_i + c w_i\right) = c w_i$

$$\therefore \qquad m_i = \frac{\ln\left[\dfrac{c w_i}{-\ln q_i + c w_i}\right]}{\ln q_i} = \frac{\ln\left[\dfrac{1}{1-\ln q_i / c w_i}\right]}{\ln q_i} \tag{4}$$

将上式代入公式(1)的等式约束条件(因为R的最大值出现在不等式约束的上限)，则得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i \ln\left[\frac{1}{1-\ln q_i / cw_i}\right]}{\ln q_i} = W \tag{5}$$

用试凑法(cut & try process)从上式可以求出 c 值, 再将此值代入(4)式, 则得 n 个待定数: $m_1, m_2, \cdots, m_n$. 舍、入这些数中的小数, 再代入公式(2), 则得系统最大的可靠性 R.

2. 设系统受有 k 个约束条件　(如投资、体积、重量等)

$$\sum_{i=1}^{n} w_{li} m_i \le W_l \qquad (l = 1,2,\cdots,k\ ;\text{通常}\ k < n) \tag{6}$$

其中 w_{li} 表示用于第 i 环节中每个元器件对 l 约束的数值, W_l 为系统对 l 约束的总数值.

这里还是假定并联在同一环节中的各个元器件都是相同的, 所以系统可靠性 R 的表达式(2)仍适用.

引用拉格朗日乘子法[5], 设

$$G(m_i, \lambda_l) = R + \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \left(W_l - \sum_{i=1}^{n} (w_{li} m_i) \right) \tag{7}$$

其中 $i = 1,2,\cdots,n$ (表示串联环节的序号) $l = 1,2,\cdots,k$ (表示约束量的编号).

公式(7)中的 λ_l 是未定常数, W_l 是给定的约束量(亦为常数). 在此, 求 R 的最大值, 也就是求 G 的最大值.

取公式(7)对 m_x 的偏微分(x 是 i 中的指定数)则得

$$\frac{\partial G}{\partial m_x} = 0 = \frac{\partial R}{\partial m_x} - \sum_{l=1}^{k} \lambda_l w_{lx} \tag{8}$$

将公式(2)中的 R 代入上式, 则得

$$\frac{\partial R}{\partial m_x} = \left[\frac{\prod_{i=1}^{n} \left(1 - q_i^{m_i}\right)}{1 - q_x^{m_x}} \right] \frac{\partial\left(1 - q_x^{m_x}\right)}{\partial m_x}$$

$$= -\left[\frac{\prod_{i=1}^{n} \left(1 - q_i^{m_i}\right)}{1 - q_x^{m_x}} \right] q_x^{m_x} \ln q_x = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l w_{lx}. \quad (x = 1,2,\cdots,n) \tag{8a}$$

将公式(2)的 R 代入公式(8a), 然后两边再除以 R 则得

$$-\frac{q_x^{m_x} \ln q_x}{1 - q_x^{m_x}} = \sum_{l=1}^{k} \left(\frac{\lambda_l}{R} \right) w_{lx} = \sum_{l=1}^{k} c_l w_{lx}, \qquad (x = 1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

其中 R 是所求的系统可靠性的最大值, 它是一个客观存在的常数. 为了简化计算工作, 在这里用 $c_l = \frac{\lambda_l}{R}$ 作为一个新的比例常数, 这样处理就避免了一连串计算 n 个乘积的麻烦. 当 $\sum_{i=1}^{n} m_i$ 按规律平衡地增加直到某一个约束量(如 $l = j$)达到上限时 $\left(\text{即} \sum_{i=1}^{n} w_{ji} m_i = W_j\right)$ 则 c_l 为定值, 同时其余的约束条件则不起作用(即 $c_l = 0$, 其中 $l \ne j$). 这样将公式(6)中各等式分别与公式(9)中的相应式联解之, 则得 k 组 m_i. 然后取其中一组 m_i 对公式(6)均能满足

者(即有一个约束量达到上限,其余都在上限以内)即为所求的 m_i. 然后舍入小数取整数代入公式(2),则得系统可靠性的最大值. 实际上,这种解法与前面受一个约束条件的解法是相同的,只是先对各个约束条件求解,然后再从其中找出唯一最优的答案而已.

3 混合故障串并联复式系统可靠性的最优综合

在一般的情况下,各个元器件的独立故障与相依故障是并存的(独立故障常大于相依故障)称为混合故障. 根据前面对二类故障所下的定义,可以知道:单纯的相依故障不存在有采用并联复式系统提高可靠性的问题,因为这样做反而会降低了系统可靠性. 但是独立故障与相依故障混合的复式系统则有可靠性最优综合的问题. 这儿就是没有任何外界的限制,也还有一个最优综合的问题,下面分为三种情况来讨论.

1. 系统设计不受任何外界条件的约束

设有一个混合故障串并联复式系统,其结构如图 1 所示,但各个环节元器件的故障都包括有独立和相依部分. 如第 i 个环节中每个并联的元器件故障为

$$q_i = q_{0i} + q_{s1} \quad (0\ 表示独立部分,\ s\ 表示相依部分) \tag{10}$$

在这样一个环节中,必须全部并联的回路都发生独立故障,才会导致这个环节的独立故障,即

$$Q_{0i} = \left(q_{0i}\right)^{m_i} \tag{10a}$$

另一个方面,这个环节只要有任何一个并联的回路发生相依故障,则导致环节的相依故障,即

$$Q_{si} = 1 - \left(1 - q_{si}\right)^{m_i} \tag{10b}$$

从上列二式,可以写下第 i 个环节的可靠性为

$$R_i = 1 - Q_i = 1 - \left(Q_{0i} + Q_{si}\right) = \left(1 - q_{si}\right)^{m_i} - \left(q_{0i}\right)^{m_i} \tag{11}$$

为使 R_i 达到最大值,可令 R_i 对 m_i 的微分等于零(当然还要加以充分条件),即

$$\frac{dR_i}{dm_i} = \left(1 - q_{s1}\right)^{m_i} \ln\left(1 - q_{si}\right) - \left(q_{0i}\right)^{m_i} \ln q_{0i} = 0 \tag{12}$$

$$\therefore \qquad m_i = \ln\left[\frac{\ln\left(1 - q_{si}\right)}{\ln q_{0i}}\right] \Big/ \ln\left(\frac{q_{0i}}{1 - q_{si}}\right) \tag{13}$$

上式 m_i 必须取正整数.

如果 $m_i = 1$,则从公式(11)得

$${}_1R_i = 1 - q_{0i} - q_{si},$$

如果 $m_i = 2$,则

$$\begin{aligned} {}_2R_i &= \left(1 - q_{si}\right)^2 - \left(q_{0i}\right)^2 \\ &= \left(1 - q_{0i} - q_{si}\right)\left(1 + q_{0i} - q_{si}\right) \\ &= {}_1R_i\left(1 + q_{0i} - q_{si}\right) \end{aligned}$$

上式表明: ${}_2R_i > {}_1R_i$ 的条件是 $q_{0i} > q_{si}$ 这也就是公式(11)存在有最大值的条件.

将(13)式中的 m_i 代入(11)式,则得到第 i 环节可靠性的最大值 R_i, $i = 1,2,\cdots,n$.

于是得总系统可靠性的最大值为

$$R=\prod_{i=1}^{n} R_i=\prod_{i=1}^{n}\left[(1-q_{si})^{m_i}-(q_{0i})^{m_i}\right] \tag{14}$$

其中 m_i 见公式(13).(当然, 如果 m_i 是任意值时, 则上式表示相应的 R).

2. **系统设计只受一个约束条件(比如投资)**

现在一个不等式约束条件公式(1)和系统可靠性公式(14)都还适用, 但其中 m_i 要考虑到 W 的约束界限, 需要重新确定.

应用前面对受一个约束条件最可靠系统设计的逻辑推理, 在达到理想的可靠性设计时, 各个串联环节的约束量 (w_i, m_i) 对系统可靠性的微商应相等. 取公式(14)对 $(w_x m_x)$ 的偏微分, 得

$$\begin{aligned}\partial R/\partial(w_x m_x)&=\left\{\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[(1-q_{si})^{m_i}-(q_{0i})^{m_i}\right]}{w_x[(1-q_{sx})^{m_{x}}-(q_{0x})^{m_x}]}\right\}\frac{\partial\left[(1-q_{sx})^{m_x}-(q_{0x})^{m_x}\right]}{\partial m_x}\\&=\left\{\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[(1-q_{si})^{m_i}-(q_{0i})^{m_i}\right]}{w_x[(1-q_{sx})^{m_x}-(q_{0x})^{m_x}]}\right\}\left[(1-q_{sx})^{m_x}\ln(1-q_{sx})\right.\\&\qquad\left.-(q_{0x})^{m_x}\ln(q_{0x})\right]\end{aligned} \tag{15}$$

令 $x=1,2,\cdots,n$ 分别代入上式, 并令这些微商相等, 然后消去其中共同的因子 R 的表达式, 则得

$$\begin{aligned}&\frac{(1-q_{s1})^{m_1}\ln(1-q_{s1})-(q_{01})^{m_1}\ln(q_{01})}{w_1[(1-q_{s1})^{m_1}-(q_{01})^{m_1}]}\\&=\frac{(1-q_{s2})^{m_2}\ln(1-q_{s2})-(q_{02})^{m_2}\ln(q_{02})}{w_2[(1-q_{s2})^{m_2}-(q_{02})^{m_2}]}\\&=\cdots=\frac{(1-q_{sn})^{m_n}\ln(1-q_{sn})-q_{0n}\ln(q_{0n})}{w_n[(1-q_{sn})^{m_n}-(q_{0n})^{m_n}]}=c\ (\text{常数}),\end{aligned} \tag{16}$$

当 $q_{si}=0$ 时, 则上式化为(3b)式. 解上式得

$$m_i=\ln\left[\frac{\ln(1-q_{si})-cw_i}{\ln q_{0i}-cw_i}\right]\Big/\ln\left(\frac{q_{0i}}{1-q_{si}}\right). \tag{17}$$

(16)实际上只有 $(n-1)$ 个独立式, 再加上公式(1)联解之, 可得 n 个待定的 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ (具体解答步骤及细节同第 2、1 节中的叙述. 然后将 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ (舍、入其中的小数)代入公式(14), 则得系统最大的可靠性 R.

必须指出: 混合故障复式系统的可靠性 R (公式(14))与独立故障可靠性 R (公式(2))不同. 后者 R 随 $\sum_{i=1}^{n} m_i$ 而单调地上升, 直到 $\sum_{i=1}^{n} m_i$ 到无穷大时, R 则趋近于 1; 前者 R 随 $\sum_{i=1}^{n} m_i$ 单调地上升直至达到最大值(当然, 此时各个环节的 R_i 也都达到最大值). 然后 R 则

随 $\sum_{i=1}^{n} m_i$ 的增加而单调地下降直到零. 因此, 这里所求得的 m_i 一定都不能超过(13)式所表达的 m_i 的数值, 否则就应该以(13)式所表达的 m_i 为准.

3. 系统设计受到 k 个约束条件(如投资、体积、重量等)

表达有 k 个约束量的公式(6)和系统可靠性公式(14)都还适用.

由于各个串联环节在达到约束量上限时的 m_i 和其在无外界约束条件下最大可靠性的 m_i (见公式(13))都是可以求得的. 这样就可以再引用拉格朗日乘子法来解答受多个约束条件的混合故障可靠性最优化的问题.

将公式(14)中的 R 代入公式(8)则得

$$\frac{\partial R}{\partial m_x}=\left\{\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[(1-q_{si})^{m_i}-(q_{0i})^{m_i}\right]}{(1-q_{sx})^{m_x}-(q_{0x})^{m_x}}\right\}\frac{\partial\left[(1-q_{sx})^{m_x}-(q_{0x})^{m_x}\right]}{\partial m_x}$$

$$=\left\{\frac{\prod_{i=1}^{n}\left[(1-q_{si})^{m_i}-(q_{0i})^{m_i}\right]}{(1-q_{sx})^{m_x}-(q_{0x})^{m_x}}\right\}\left[(1-q_{sx})^{m_x}\ln(1-q_{sx})-(q_{0x})^{m_x}\ln(q_{0x})\right]$$

$$=\sum_{l=1}^{k}\lambda_l w_{lx}\qquad (x=1,2,\cdots,n) \tag{18}$$

将公式(14)中的 R 代入上式, 然后再除以 R, 则得

$$\frac{(1-q_{sx})^{m_x}\ln(1-q_{sx})-q_{0x}^{m_x}\ln q_{0x}}{(1-q_{sx})^{m_x}-q_{0x}^{m_x}}=\sum_{l=1}^{k}\left(\frac{\lambda_l}{R}\right)w_{lx}$$

$$=\sum_{l=1}^{k}c_l w_{lx}\qquad (x=1,2,\cdots,n) \tag{19}$$

用公式(19)代替公式(9), 按照第 2、2 节中的方法分别与公式(6)的相应式联解之, 得 k 组 m_i. 最后选定一组完全满足公式(6)的 m_i 代入公式(14), 即得系统可靠性的最大值.

4　计算例题

要求设计一个混合故障最可靠的串并联复式系统, 共有五个串联环节. 各个环节中并联元器件的参数如表 1 所示.

表 1　给定数据

环节: i	1	2	3	4	5
单价: w_{1i}	6.0	6.2	7.0	8.5	8.0
单件重量: w_{2i}	8	6	7	5	10
单件故障概率: q_{0i}	0.007	0.006	0.015	0.008	0.010
q_{si}	0	0	0	0.0002	0.0001

总价上限 $W_1=120$　总重上限 $W_2=125$

求解的步骤如下:

(1) 首先求在无外界约束条件下，各个混合故障环节并联元器件的上限数目（本题为 m_4 和 m_5）

将有关故障概率代入公式(13)，得

$$m_4 = \ln\left[\frac{\ln(0.9998)}{\ln(0.008)}\right] \Big/ \ln\left(\frac{0.008}{0.9998}\right) = 2.0901723$$

$$m_5 = \ln\left[\frac{\ln(0.9999)}{\ln(0.010)}\right] \Big/ \ln\left(\frac{0.010}{0.9999}\right) = 2.3316626 .$$

(2) 初估 m_i 的平均值，

$$\overline{m}_i = [\frac{W_1}{\sum_{i=1}^{s} w_{1i}} + \frac{W_2}{\sum_{i=1}^{s} w_{2i}}] = \left[\frac{120}{35.7} + \frac{125}{36}\right] \div 2 = (3.3613 + 3.4722) \div 2 = 3.4168 .$$

从上面的计算及表 1 的数据，可知 $m_3 > m_1 > m_2 > m_5 > m_4$，

(3) 现在先按 W_1 计算，初估 $m_2 = 4$ 代入公式(16)或(19)，得

$$c_1 = \frac{0 - (0.006)^4 \ln(0.006)}{6.2\left[1 - (0.006)^4\right]} = 1.0694081 \times 10^{-9}$$

代入公式(17)，得

$$m_1 = \ln\left[\frac{-cw_{11}}{\ln q_{01} - cw_{11}}\right] \Big/ \ln(q_{01})$$

$$= \ln\left[\frac{-6 \times 1.0694081 \times 10^{-9}}{\ln(0.007) - 6 \times 1.0694081 \times 10^{-9}}\right] \Big/ \ln(0.007) = 4.1247113$$

$$m_3 = \ln\left[\frac{-7 \times 1.0694081 \times 10^{-9}}{\ln(0.015) - 7 \times 1.0694081 \times 10^{-9}}\right] \Big/ \ln(0.015) = 4.7968284$$

$$m_4 = \ln\left[\frac{\ln(0.9998) - 8.5 \times 1.0694081 \times 10^{-9}}{\ln(0.008) - 8.5 \times 1.0694081 \times 10^{-9}}\right] \Big/ \ln\left(\frac{0.008}{0.9998}\right) = 2.090163$$

$$m_5 = \ln\left[\frac{\ln(0.9999) - 8 \times 1.0694081 \times 10^{-9}}{\ln(0.01) - 8 \times 1.0694081 \times 10^{-9}}\right] \Big/ \ln\left(\frac{0.01}{0.9999}\right) = 2.331644 .$$

实际上，m_i 必须取整数，对上面计算的数值采取四舍五入，得

$$m_1 = m_2 = 4, \quad m_3 = 5, \quad m_4 = m_5 = 2$$

(4) 根据前面所得的结果代入公式(6)，得

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{5} w_{1i} m_i &= 6 \times 4 + 6.2 \times 4 + 7 \times 5 + 8.5 \times 2 + 8 \times 2 = 116.8 < 120 = W_1 \\ \sum_{i=1}^{5} w_{2i} m_i &= 8 \times 4 + 6 \times 4 + 7 \times 5 + 5 \times 2 + 10 \times 2 = 121 < 125 = W_2 \end{aligned}\right\}$$

符合要求，现在用求得的 m_i 值代入公式(14)，则得

$$R = \left[1 - (0.007)^4\right]\left[1 - (0.006)^4\right]\left[1 - (0.015)^5\right]\left[(1 - 0.0002)^2 - (0.008)^2\right]\left[(1 - 0.001)^2 - (0.01)^2\right] = 0.99924 ,$$

而单套系统的可靠性为

$$R = (1 - 0.007)(1 - 0.006)(1 - 0.015)(1 - 0.0002 - 0.008)(1 - 0.0001 - 0.01)$$

$= 0.95452$.

5 结束语

根据以上的分析与综合，归纳成下面几点：

(1) 一般文献讨论系统可靠性问题，包括最优化问题都局限于独立故障系统[1-4]，不能满足实际系统设计的需要，本文提出将系统中所有的元器件故障分为独立(开路型)与相依(短路型)二类，这不但有利于系统可靠性的分析与综合，更方便于进行系统可靠性的最优设计，基本解决了系统可靠性中客观存在迄今未得到妥善处理的相依故障问题.

(2) 这里明确提出对于混合故障复式系统在不受任何外界约束的条件下也有一个最可靠的综合问题，并且使用通常微积分求最大值的方法确切地解答了这个问题.

(3) 本文对只有一个外界约束条件的最可靠系统的设计，是直接从工程设计中少花钱、多收益的概念出发，使用逻辑推理的办法，权衡轻重，加强薄弱环节，推导出准确的表达式，通俗易懂便于应用.

(4) 本文对于受多个不等式约束的系统最可靠问题则借助拉格朗日乘子法来过渡一下，并引用 $c_i = \lambda_i / R$ 作为一个新的未定常数处理，大大简化了计算工作量，这与一般国外文献[3,4]使用拉格朗日乘子法有别，他们一般先将目标函数转换为对数形式，并使用牛顿方法进行解答计算，比较繁琐，而且都是局限于独立故障系统. 至于解答混合故障系统的最优化问题，则尚未见有其它论述.

当然，这个方法也适用于只受一个不等式约束的问题，其结果与使用逻辑推理直接导出来的结果相符.

(5) 从本文可以归纳出一种规律：用拉格朗日乘子法解决一般受不等式约束的最优化问题也是可行的. 前提是只要目标函数能满足下列条件之一：①所求的目标函数的最大值出现在限制量的上限. 如单调上升的函数，这时只须用约束量的上限代入运算式即可. ②在无约束的条件下，目标函数的最大值(和最小值)能够求得出来的. 如目标函数为一凸形曲形，这时还是先用约束量上限求解，然后查看结果落在曲线什么位置. 再确定最优值.

这种规律在一定的范围内，还有推广应用的可能，特别是对连续单调上升的目标函数和连续变化的约束量，这样就不存在舍、入得数中的小数问题.

本文在写作、质疑、讨论及定稿过程中，得到许国志、秦元勋、童世璜、涂序彦、韩京清、高怀宝等同志的帮助，谨在此对他们表示衷心地感谢.

参 考 文 献

1. F. A. Tillman,Optimization by Integer Programming of Constrained Reliability Problems with Several Modes of Failure, *IEEE Transactions on Reliability*, R-**18**, (1969), No.2.
2. K. B. Misra. A Method of Solving Redundancy Optimization Problem, *IEEE Transactions on Reliability*, R-**20**, (1971), No. 3.
3. K. B. Misra, Reliability Optimization of a Series-Parallel System, *IEEE Transactions on Reliability*, R-**21**, (1972), No.4
4. K. B. Misra and M. D. Ljubojevic, Optimal Reliability Design of a System: a New Loak, *IEEE Transactions on Reliability*, R-**22**, (1973), No.5
5. C. W. Merriam 111, Optimization Theory and Design of Feedback Control Systems, 1964, MeGraw-Hill, Inc. 23-24.

THE SYNTHESIS OF THE MOST RELLABLE CONTROL SYSTEMS

SHU Song-gui

(Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences)

Abstract This paper Discusses the synthesis of the most reliable control systems by means of redundancy approach. For one constraint we start from the concept that the weakest section of reliability must be reinforced first until the upper limit of the given constraint is reached. For multiple constraints we introduce the Lagrange multiplier method for solving the optimal problems of system reliability.

According to the properties of failures we divide the unreliability into two types, namely, independent failures (as open circuit) and dependent failures (as short circuit). This is not only convenient for analyzing the influence of the failures on adjacent paralleled elements but also for design of optimal control systems.