

研究简报

# Delta 算子系统的鲁棒性能分析<sup>1)</sup>

张端金

(华南理工大学电力学院 广州 510640)

(E-mail: djzhang@mail.zzu.edu.cn)

杨成梧

(南京理工大学动力学院 南京 210094)

吴捷

(华南理工大学电力学院 广州 510640)

**关键词** 离散系统, Delta 算子, 鲁棒性能, 矩阵测度方法.

## ROBUST PERFORMANCE ANALYSIS OF DELTA OPERATOR SYSTEMS

ZHANG Duanjin

(Electric Power College, South China University of Technology, Guangzhou 510640)

YANG Chengwu

(School of Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

WU Jie

(Electric Power College, South China University of Technology, Guangzhou 510640)

**Key words** Discrete time system, delta operator, robust performance, matrix measure approach.

### 1 引言

线性连续和离散系统的鲁棒分析包括稳定鲁棒性与性能鲁棒性, 主要方法有特征值分析、Lyapunov 理论和矩阵测度方法, 现已取得较大进展. 但现有结果未能建立连续和离散系统鲁棒性能之间的直接联系. Delta 算子是一种统一的描述形式, 可以将连续和离散系统的许多结果纳入 Delta 算子系统的统一框架<sup>[1]</sup>. Piou<sup>[2]</sup> 基于模态分解法和 Gronwall 引理得到 Delta 统一模型稳定鲁棒的充分条件.

本文将文[3]的结果推广到 D 域稳定情形, 利用矩阵测度方法给出了 Delta 算子系统鲁棒 D 稳定的充分条件, 所得结论同时适用于连续和离散系统.

文中记  $\mu(M)$  表示矩阵  $M \in C^{n \times n}$  的矩阵测度.

1) 国家自然科学基金(69474021, 69674025)和高等学校博士学科点基金资助项目.

## 2 问题描述

考虑直线  $L$  将复平面分为图1所示的区域  $H$  和  $\bar{H}$ , 直线  $L$  与实轴交于  $(a,0)$  点, 与正虚轴的夹角为  $\theta$ . 设  $\theta$  沿逆时针方向在  $0 < \theta < 2\pi$  内取值. 与  $H$  和  $\bar{H}$  对应的  $\delta$  算子频域表示  $\gamma$  平面区域  $H^d$  和  $\bar{H}^d$  如图2所示.

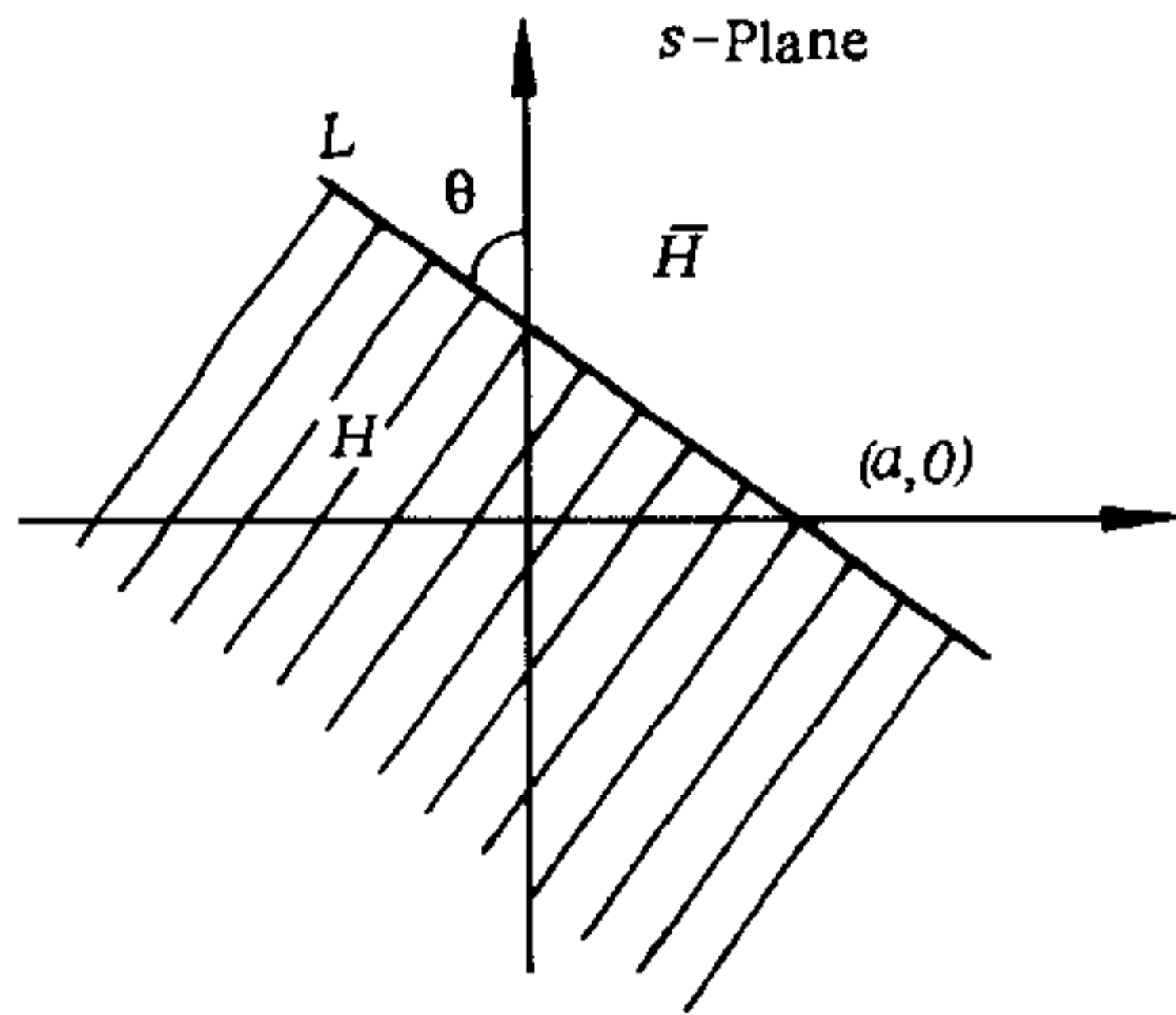


图1  $H(a, \theta)$  区域描述

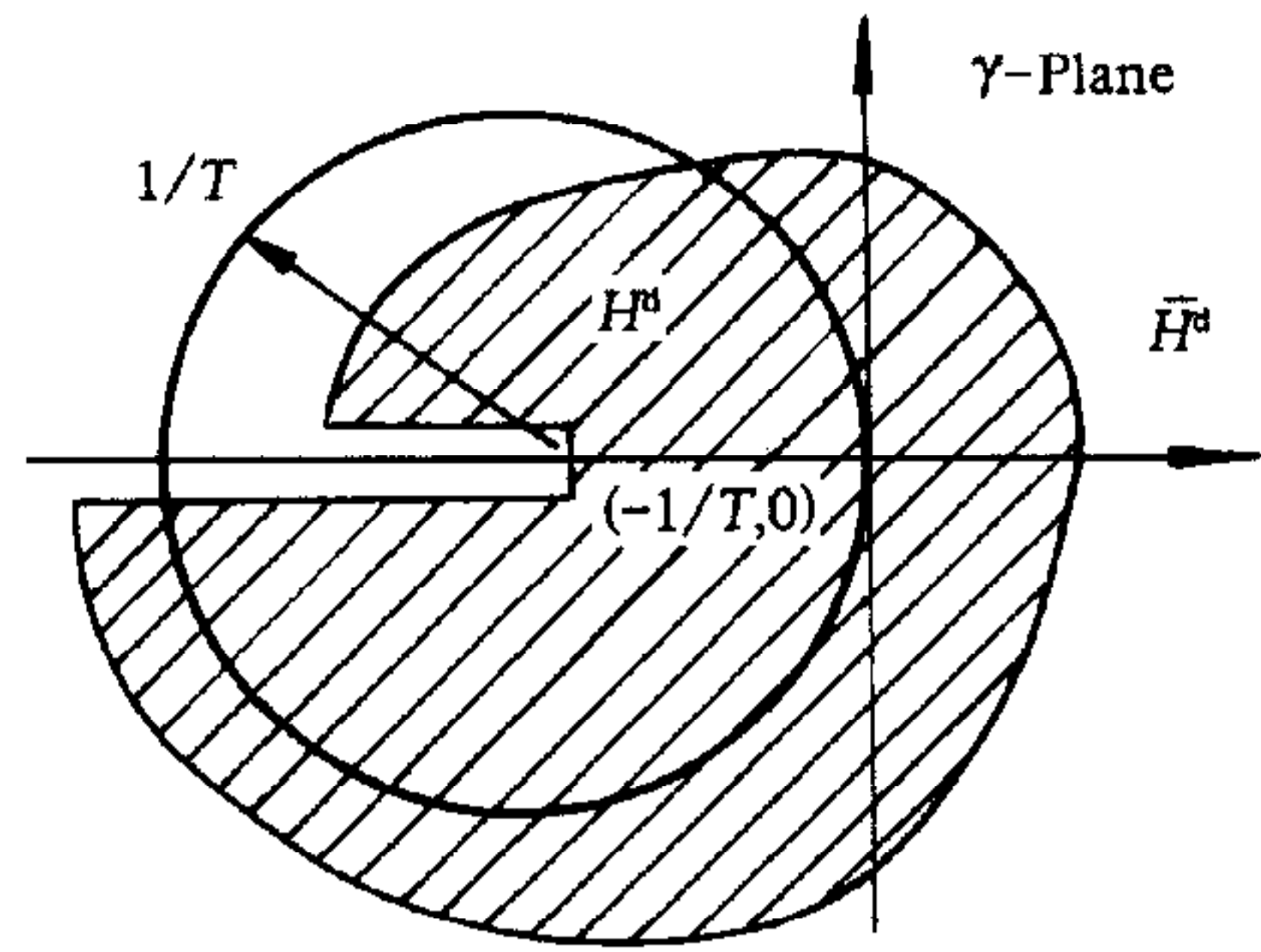


图2  $H^d(a, \theta)$  区域描述

**引理1.** 对于 Delta 算子描述的统一状态空间模型及其旋转变换模型

$$\rho \mathbf{x}(t) = A_\rho \mathbf{x}(t) + B_\rho \mathbf{u}(t), \tag{1}$$

$$\rho \tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{A}_\rho \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{B}_\rho \mathbf{u}(t), \tag{2}$$

则矩阵  $A_\rho$  的特征值位于连续时间  $H(a, \theta)$  或离散时间  $H^d(a, \theta)$  区域内, 当且仅当矩阵  $\tilde{A}_\rho$  是稳定的. 上式中

$$A_\rho = \begin{cases} A, & T = 0, \\ A_\delta = \Omega A, & T \neq 0, \end{cases} \quad \tilde{A}_\rho = \begin{cases} \tilde{A} = e^{-j\theta}(A - aI), & T = 0, \\ \tilde{A}_\delta = \tilde{\Omega} e^{-j\theta}(A - aI), & T \neq 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\tilde{B}_\rho = \begin{cases} \tilde{B} = e^{-j\theta}B, & T = 0, \\ \tilde{B}_\delta = \tilde{\Omega} e^{-j\theta}B, & T \neq 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\Omega = \frac{1}{T} \int_0^T \exp\{A\tau\} d\tau, \quad \tilde{\Omega} = \frac{1}{T} \int_0^T \exp\{e^{-j\theta}(A - aI)\tau\} d\tau. \tag{4}$$

式(1)中  $\rho$  称为广义微分算子, 分别表示  $d/dt$ (连续)或  $\delta$ (离散),  $\delta$  即 Delta 算子<sup>[4]</sup>, 定义为  $\delta = (q-1)/T$ , 其中  $q$  为前向移位算子,  $T$  为采样周期.

证明. 采用旋转变换方法易证, 此处略.

## 3 主要结果

考虑 Delta 算子描述的线性不确定系统

$$\rho \mathbf{x}(t) = (A_\rho + \Delta A_\rho) \mathbf{x}(t), \tag{5}$$

$$\rho \tilde{\mathbf{x}}(t) = (\tilde{A}_\rho + \Delta \tilde{A}_\rho) \tilde{\mathbf{x}}(t). \tag{6}$$

上式中摄动矩阵  $\Delta A_\rho$  设为如下的结构不确定性:

$$\Delta A_\rho = \begin{cases} \Delta A = \sum_{i=1}^m k_i E_i, & T = 0, \\ \Delta A_\delta = \Gamma(A + \Delta A) - \Omega A, & T \neq 0, \end{cases}$$

$$\Delta\tilde{A}_\rho = \begin{cases} \Delta\tilde{A} = e^{-j\theta}\Delta A, & T = 0, \\ \Delta\tilde{A}_\delta = \tilde{\Gamma}e^{-j\theta}(A + \Delta A - aI) - \tilde{\Omega}e^{-j\theta}(A - aI), & T \neq 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\Gamma = \frac{1}{T} \int_0^T \exp\{(A + \Delta A)\tau\}d\tau, \quad \tilde{\Gamma} = \frac{1}{T} \int_0^T \exp\{e^{-j\theta}(A + \Delta A - aI)\tau\}d\tau. \quad (8)$$

式(7)中  $k_i$  为实不确定参数,  $E_i$  是已知的实常矩阵,  $\Omega$  和  $\tilde{\Omega}$  由(4)式定义.

**定理1.** 假设标称系统的特征值位于图1中  $H(a, \theta)$  或图2中  $H^d(a, \theta)$  区域, 则不确定系统(5)的特征值仍位于相应的  $H(a, \theta)$  或  $H^d(a, \theta)$  区域内, 即不确定系统(6)稳定的充分条件为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m k_i \phi_i < a \cos \theta - \mu(A \cos \theta) - \mu(-A_j \sin \theta), & T = 0, \\ (T/2) \|\tilde{A}_\delta + \Delta\tilde{A}_\delta\|^2 + \sum_{i=1}^m k_i \tilde{\phi}_i < -\mu(-\tilde{\Gamma} a e^{-j\theta}) - \mu(\tilde{\Gamma} A \cos \theta) - \mu(-\tilde{\Gamma} A_j \sin \theta), & T \neq 0, \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$\phi_i = \begin{cases} \mu(e^{-j\theta}E_i), & \text{if } k_i \geq 0 \\ -\mu(-e^{-j\theta}E_i), & \text{if } k_i < 0 \end{cases} (T = 0), \quad \tilde{\phi}_i = \begin{cases} \mu(\tilde{\Gamma} e^{-j\theta}E_i), & \text{if } k_i \geq 0 \\ -\mu(-\tilde{\Gamma} e^{-j\theta}E_i), & \text{if } k_i < 0 \end{cases} (T \neq 0).$$

证明详见文[5].

下面考虑状态矩阵和输入矩阵均存在不确定性的 Delta 算子系统

$$\rho x(t) = (A_\rho + \Delta A_\rho)x(t) + (B_\rho + \Delta B_\rho)u(t), \quad (10)$$

$$\rho \tilde{x}(t) = (\tilde{A}_\rho + \Delta\tilde{A}_\rho)\tilde{x}(t) + (\tilde{B}_\rho + \Delta\tilde{B}_\rho)u(t), \quad (11)$$

其中摄动矩阵  $\Delta A_\rho, \Delta B_\rho$  设为结构不确定性

$$\Delta A_\rho = \begin{cases} \Delta A = \sum_{i=1}^{m_A} k_{A_i} E_{A_i}, & T = 0, \\ \Delta A_\delta = \Gamma(A + \Delta A) - \Omega A, & T \neq 0, \end{cases}$$

$$\Delta B_\rho = \begin{cases} \Delta B = \sum_{i=1}^{m_B} k_{B_i} E_{B_i}, & T = 0, \\ \Delta B_\delta = \Gamma(B + \Delta B) - \Omega B, & T \neq 0. \end{cases}$$

取状态反馈控制律  $u(t) = F_\rho x(t)$ , 则闭环不确定系统为

$$\rho x(t) = (A_{\rho c} + \Delta A_{\rho c})x(t), \quad (12)$$

$$\rho \tilde{x}(t) = (\tilde{A}_{\rho c} + \Delta\tilde{A}_{\rho c})\tilde{x}(t), \quad (13)$$

其中

$$A_{\rho c} = A_\rho + B_\rho F_\rho = \begin{cases} A_c = A + BF, & T = 0, \\ A_{\delta c} = A_\delta + B_\delta F_\delta, & T \neq 0, \end{cases}$$

$$\tilde{A}_{\rho c} = \tilde{A}_\rho + \tilde{B}_\rho F_\rho = \begin{cases} \tilde{A}_c = \tilde{A} + \tilde{B}F, & T = 0, \\ \tilde{A}_{\delta c} = \tilde{A}_\delta + \tilde{B}_\delta F_\delta, & T \neq 0, \end{cases}$$

$$\Delta\tilde{A}_\rho = \begin{cases} \Delta\tilde{A} = e^{-j\theta}\Delta A, & T = 0, \\ \Delta\tilde{A}_\delta = \tilde{\Gamma}e^{-j\theta}(A + \Delta A - aI) - \tilde{\Omega}e^{-j\theta}(A - aI), & T \neq 0, \end{cases}$$



$$\Delta\tilde{B}_\rho = \begin{cases} \Delta\tilde{B} = e^{-j\theta}\Delta B, & T = 0, \\ \Delta\tilde{B}_\delta = \tilde{\Gamma}e^{-j\theta}(B + \Delta B) - \tilde{\Omega}e^{-j\theta}B, & T \neq 0. \end{cases}$$

**定理2.** 设标称系统(1)的特征值位于图1中  $H(a, \theta)$  或图2中  $H^d(a, \theta)$  区域, 则不确定系统(12)的特征值仍位于相应  $H(a, \theta)$  或  $H^d(a, \theta)$  区域, 即不确定系统(13)稳定的充分条件为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m_A} k_{A_i} \phi_{A_i} + \sum_{i=1}^{m_B} k_{B_i} \phi_{B_i} < a \cos \theta - \mu(A_c \cos \theta) - \mu(-A_c j \sin \theta), & T = 0, \\ (T/2) \|\tilde{A}_{\delta c} + \Delta\tilde{A}_{\delta c}\|^2 + \sum_{i=1}^{m_A} k_{A_i} \tilde{\phi}_{A_i} + \sum_{i=1}^{m_B} k_{B_i} \tilde{\phi}_{B_i} < -\mu(-\tilde{\Gamma} a e^{-j\theta}) - \mu(\Xi \cos \theta) - \mu(-\Xi j \sin \theta), & T \neq 0, \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi &= \tilde{\Gamma}(A + BF_\delta), \\ \phi_{A_i} &= \begin{cases} \mu(e^{-j\theta} E_{A_i}), & \text{if } k_{A_i} \geq 0 \\ -\mu(-e^{-j\theta} E_{A_i}), & \text{if } k_{A_i} < 0 \end{cases} (T = 0), \\ \phi_{B_i} &= \begin{cases} \mu(e^{-j\theta} E_{B_i} F), & \text{if } k_{B_i} \geq 0 \\ -\mu(-e^{-j\theta} E_{B_i} F), & \text{if } k_{B_i} < 0 \end{cases} (T = 0), \\ \tilde{\phi}_{A_i} &= \begin{cases} \mu(\tilde{\Gamma} e^{-j\theta} E_{A_i}), & \text{if } k_{A_i} \geq 0 \\ -\mu(-\tilde{\Gamma} e^{-j\theta} E_{A_i}), & \text{if } k_{A_i} < 0 \end{cases} (T \neq 0), \\ \tilde{\phi}_{B_i} &= \begin{cases} \mu(\tilde{\Gamma} e^{-j\theta} E_{B_i} F_\delta), & \text{if } k_{B_i} \geq 0 \\ -\mu(-\tilde{\Gamma} e^{-j\theta} E_{B_i} F_\delta), & \text{if } k_{B_i} < 0 \end{cases} (T \neq 0). \end{aligned}$$

**推论1.** 设标称系统的特征值位于图3中  $R$  区域或图4中  $R^d$  区域, 则闭环不确定系统(12)的特征值仍位于相应的  $R$  或  $R^d$  区域, 即不确定系统(13)鲁棒 D 稳定的充分条件为

$$\max(\mu_{\rho_1}, \mu_{\rho_2}, \mu_{\rho_3}) < 1, \quad (15)$$

其中

$$\mu_{\rho k} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m_A} k_{A_i} \phi_{A_{ik}} + \sum_{i=1}^{m_B} k_{B_i} \phi_{B_{ik}} < a_k \cos \theta_k - \mu(A_c \cos \theta_k) - \mu(-A_c j \sin \theta_k), & (T = 0), \\ (T/2) \|\tilde{A}_{\delta ck} + \Delta\tilde{A}_{\delta ck}\|^2 + \sum_{i=1}^{m_A} k_{A_i} \tilde{\phi}_{A_{ik}} + \sum_{i=1}^{m_B} k_{B_i} \tilde{\phi}_{B_{ik}}, \\ < -\mu(-\tilde{\Gamma}_k a_k e^{-j\theta_k}) - \mu(\Xi_k \cos \theta_k) - \mu(-\Xi_k j \sin \theta_k) & (T \neq 0), \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} k = 1: \theta_k = \theta_1 = 0, a_k = a_1; \quad k = 2: \theta_k = \theta_2, a_k = a_2 = 0; \\ k = 3: \theta_k = \theta_3, a_k = a_3 = 0. \end{aligned}$$

式(16)中各变量的含义参见文[5].

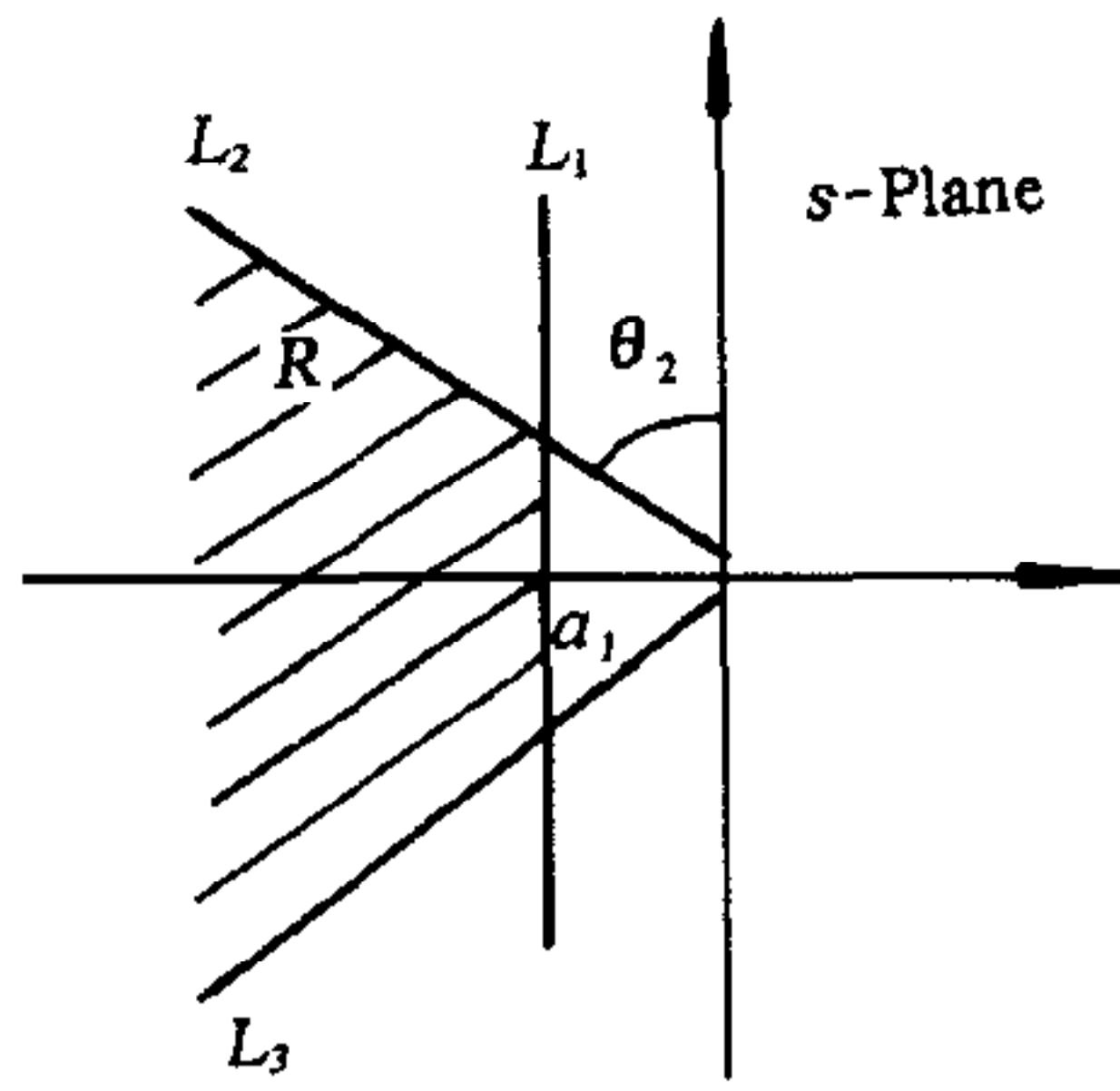
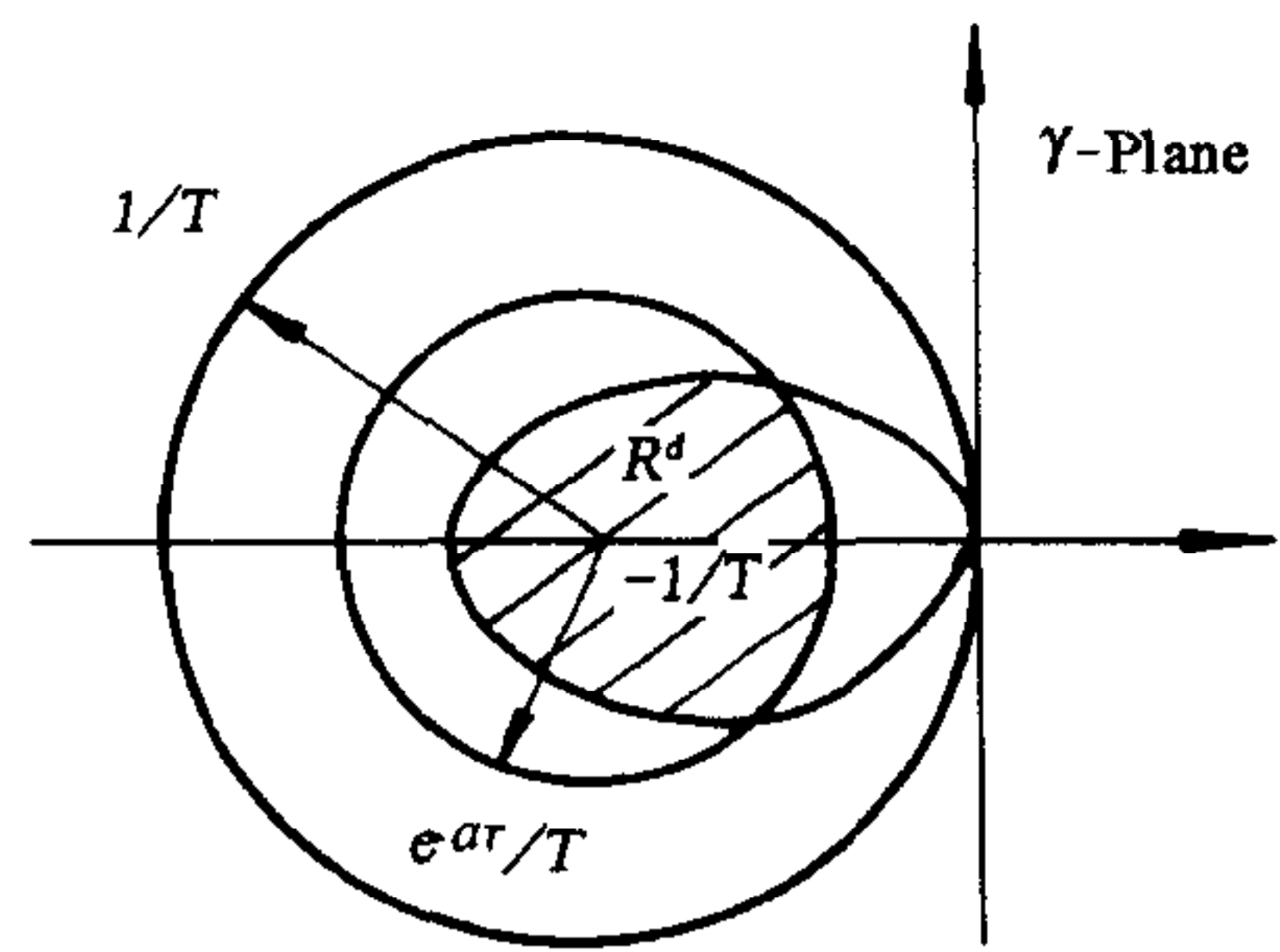


图3 R 区域描述

图4  $R^d$  区域描述

## 4 结论

本文利用矩阵测度方法研究 Delta 算子不确定系统的性能鲁棒性分析问题,得到 Delta 算子系统具有鲁棒 D 稳定的判别条件. 这种方法不需求解 Lyapunov 方程, 计算量较小. 且在 Delta 离散域分析结果中, 若令采样周期  $T=0$ , 即可导出连续情形的相应结果.

## 参 考 文 献

- 1 张端金, 杨成梧. 反馈控制系统 Delta 算子理论的研究与发展. 控制理论与应用, 1998, **15**(2): 153~160
- 2 Piou J E, Sobel K M. A time domain approach to performance robustness of sampled data systems using the delta operator. In: Proc. 31st IEEE Conf. Deci. Contr., 1992, 1968~1969
- 3 Huang S N, Ren W. New results on the robust bounds of linear uncertain systems. *Int. J. Syst. Sci.*, 1997, **28**(2): 141~144
- 4 Goodwin G C, Lozano-Leal R, Mayne D Q, Middleton R H. Rapprochement between continuous and discrete model reference adaptive control. *Automatica*, 1986, **22**(2): 199~207
- 5 张端金. Delta 算子系统的建模与控制[博士学位论文]. 南京: 南京理工大学, 1998

**张端金** 博士, 副教授, 现在华南理工大学做博士后. 研究方向为鲁棒控制、信号处理、电力系统控制.

**杨成梧** 南京理工大学教授, 博士生导师. 研究方向为 2D 系统、广义系统、鲁棒控制.

**吴捷** 华南理工大学教授, 博士生导师. 研究方向为自适应控制、电力系统控制.