



超声波六自由度跟踪器设计 原理及误差模型研究¹⁾

华 宏 王涌天 郭向前

(北京理工大学光电工程系 北京 100081)

(E-mail: ytwang@sun.ihep.ac.cn)

摘 要 位置方位跟踪器是虚拟现实系统和其它人机实时交互系统中不可缺少的人机交互设备之一. 在讨论用超声波测距原理实现运动物体六自由度(6DOF)跟踪器设计原理的基础上, 结合以前关于坐标分辨率及误差的研究结果, 深入分析了跟踪器角度分辨率与坐标分辨率以及跟踪器硬件参数之间的关系, 并由此给出了超声波位置方位跟踪器关键物理参数的设计依据.

关键词 位置方位跟踪器, 超声波测距器, 六自由度算法, 角度分辨率, 虚拟现实.

DESIGN PRINCIPLE AND ERROR ANALYSIS OF 6 DOF ULTRASONIC POSITION AND ORIENTATION TRACKER

HUA Hong WANG Yongtian GUO Xiangqian

(Department of Optical Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

Abstract Position and orientation tracker is one of the most critical input devices for human-machine interface utilities such as virtual reality systems. The design principle for a 6 DOF position and orientation tracker based on ultrasonic range-finders is discussed. The relations among the coordinate resolution, the angular resolution and hardware parameters of the tracker are analyzed. Criteria for a critical hardware parameter design are provided.

Key words Position & orientation tracker, ultrasonic range-finder, 6 DOF algorithm, angular resolution, virtual reality.

1 引 言

在虚拟现实、机器人工程、工业自动化和3D图形图像输入设备等应用领域中, 空间运

1) 国家教委跨世纪人才培养计划资助项目.

动物体的6DOF跟踪器是其中不可缺少的人机交互设备,它尤其是虚拟现实应用中增强沉浸感、实现交互性的主要途径.目前用于测量运动物体空间方位的技术包括机电法、电磁法、声学法、光电法和惯性法^[1].在这些测量方法中,超声波测量技术在制造成本、测量精度、测量范围和环境适应性等方面均具有较大的优势和发展潜力^[2].

本文讨论了测距法实现运动物体6DOF跟踪器原理,给出了坐标分辨率、角度分辨率与跟踪器硬件参数之间的关系,并在此基础上提出了位置方位跟踪器关键物理参数的设计依据.

2 基于测距原理的运动物体六自由度方位跟踪原理

根据刚体动力学^[3],刚体的六自由度运动由沿三个坐标轴的移动和绕三个坐标轴的转动构成,上述六自由度运动总能够等效为刚体上一个固定点沿三个坐标轴的平动绕该点的定点转动.因此,把被跟踪的物体视为刚体,其位置和姿态可以通过物体上(或固定在物体上)的三个非共线点的空间位置唯一确定,其中第一参考点确定三个平动自由度,另外两点确定绕第一点定点转动的三个转动自由度.问题的关键归结为测量上述三个参考点的空间坐标,并根据坐标计算物体的姿态.

2.1 空间运动刚体的六自由度方位表示

如图1所示,用 $C\xi\eta\zeta$ 表示空间定参考坐标系, $OXYZ$ 表示与运动物体固联的动参考坐标系, $O\xi'\eta'\zeta'$ 表示平移参考坐标系,它们都是右手坐标系,并假设其零位重合于 C 点, $O\xi'\eta'\zeta'$ 相对 $C\xi\eta\zeta$ 只做空间平移运动,而 $OXYZ$ 相对 $O\xi'\eta'\zeta'$ 只做空间定点转动. 设 (O_ξ, O_η, O_ζ) 是 O 点在 $C\xi\eta\zeta$ 中的位置坐标, ϕ 是动坐标系零位 $OX_0Y_0Z_0$ 绕 $O\xi'$ 轴转动到 $OX_1Y_1Z_1$ 的转角(所有转角的符号都遵循右手定则), θ 是 $OX_1Y_1Z_1$ 绕 OX_1 轴转动到 $OX_2Y_2Z_2$ 的转角, γ 是 $OX_2Y_2Z_2$ 绕 OY_2 轴转动到 $OXYZ$ 的转角,运动物体相对于定坐标系的位置和方位用坐标 $(O_\xi, O_\eta, O_\zeta, \phi, \theta, \gamma)$ 唯一表示.

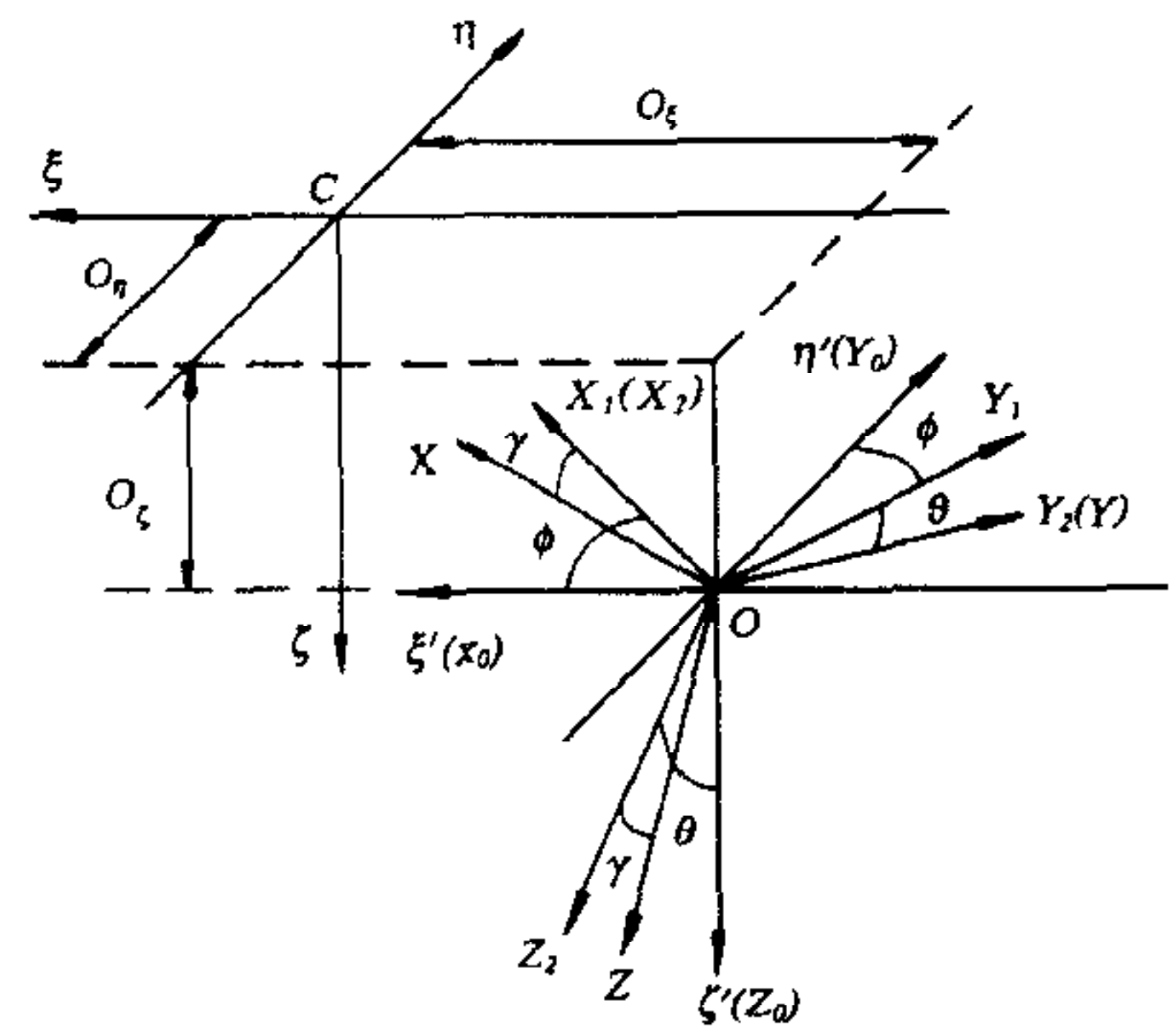


图1 运动物体空间六自由度坐标表示

根据刚体运动学和坐标变换原理,与物体空间固联的任意矢量 i 都满足公式

$$[i]_{C\xi\eta\zeta} = [k]_{C\xi\eta\zeta} + A[i]_{OXYZ}. \quad (1)$$

上式中 $[i]_{OXYZ}$ 是矢量 i 在 $OXYZ$ 中的标定; $[i]_{C\xi\eta\zeta}$ 是矢量在定坐标系中的标定; $[k]_{C\xi\eta\zeta}$ 是平移坐标系到定坐标系的平移矢量; A 是由坐标系 $OXYZ$ 到 $O\xi'\eta'\zeta'$ 的坐标变换矩阵,是三个欧拉角 (ϕ, θ, γ) 的函数,用下式表示

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\gamma - \sin\phi\sin\theta\sin\gamma & -\sin\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\gamma + \sin\phi\sin\theta\cos\gamma \\ \sin\phi\cos\gamma + \cos\phi\sin\theta\sin\gamma & \cos\phi\cos\gamma & \sin\phi\sin\gamma - \cos\phi\sin\theta\cos\gamma \\ -\cos\theta\sin\gamma & \sin\theta & \cos\theta\cos\gamma \end{bmatrix}. \quad (2)$$

2.2 刚体位置坐标算法

在 $C\xi\eta\zeta$ 空间中,3个参考点 R_{11}, R_{12} 和 R_{13} 按图2所示的规律分布在边长为 $2a$ 的等边

三角形顶点上,三角形所在的平面与 $C\xi$ 轴垂直, CR_{11} 与 $C\eta$ 轴重合, $R_{12}R_{13}$ 与 $C\xi$ 轴平行, 重心与原点 C 重合. 已知物体上任意一点 T_1 到 R_{11}, R_{12} 和 R_{13} 三点的距离分别为 L_{11}, L_{12} 和 L_{13} , 并且已知三个参考点的空间坐标分别为 $R_{11}(0 \quad 2\sqrt{3}a/3 \quad 0), R_{12}(-a \quad -\sqrt{3}a/3 \quad 0)$ 和 $R_{13}(a \quad -\sqrt{3}a/3 \quad 0)$. 设 T_1 的空间坐标为 $T_1(T_{1\xi}, T_{1\eta}, T_{1\xi})$, 可得到^[4]

$$\begin{cases} T_{1\xi} = (L_{12}^2 - L_{13}^2)/4a, \\ T_{1\eta} = (L_{12}^2 + L_{13}^2 - 2L_{11}^2)/4\sqrt{3}a, \\ T_{1\xi} = \sqrt{(L_{12}^2 + L_{13}^2 + L_{11}^2 - 4a^2)/3 - (L_{11}^4 + L_{12}^4 + L_{13}^4 - L_{11}^2L_{12}^2 - L_{11}^2L_{13}^2 - L_{12}^2L_{13}^2)/12a^2}. \end{cases} \quad (3)$$

2.3 刚体的姿态角算法

设 T_1, T_2 和 T_3 是固定在运动物体上的三个非共线参考点, 分布在边长为 $2b$ 的等边

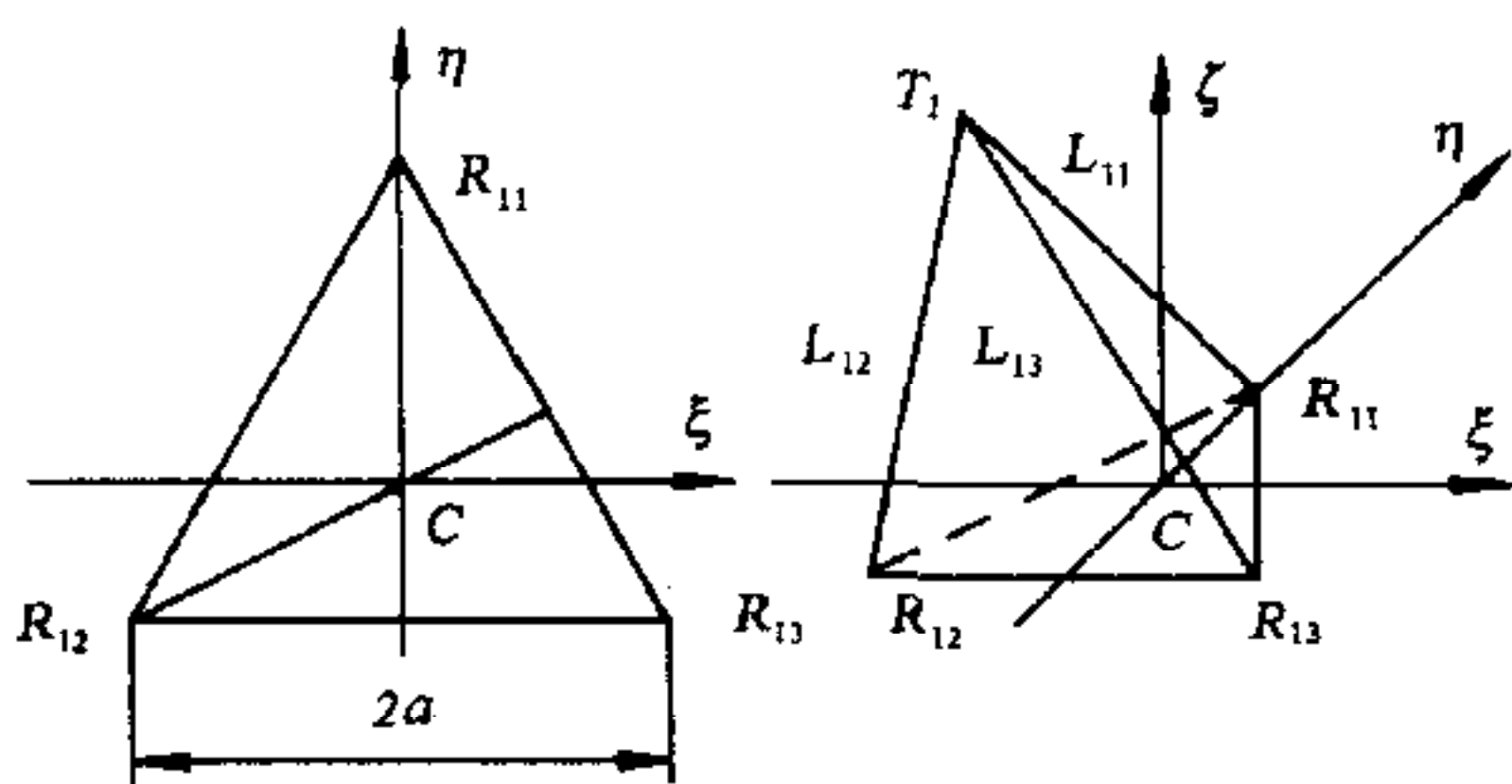


图2 静止参考点的分布

三角形的顶点位置, 该三角形的重心与原点 O 重合. 设 T_1, T_2 和 T_3 在平移坐标系中的坐标为 $T_1(T_{1\xi}, T_{1\eta}, T_{1\xi}), T_2(T_{2\xi}, T_{2\eta}, T_{2\xi})$ 和 $T_3(T_{3\xi}, T_{3\eta}, T_{3\xi})$, 考虑到头部运动的特征, 可以合理地限制 $-90^\circ \leq (\theta, \gamma) \leq 90^\circ$, 则姿态角 ϕ, θ 和 γ 为

$$\begin{cases} \theta \neq \pm 90^\circ \begin{cases} \theta = \sin^{-1}(\sqrt{3}T_{1\eta}/2b), \\ \gamma = \sin^{-1}((T_{3\xi} - T_{2\xi})/2b\cos\theta), & -90^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ, \\ \sin\phi = (-\sqrt{3}T_{1\xi})/\sqrt{4b^2 - 3T_{1\eta}^2}, \\ \begin{cases} \cos\phi = \sqrt{4b^2 - 3T_{1\eta}^2 - 3T_{1\xi}^2}/\sqrt{4b^2 - 3T_{1\eta}^2}, T_{1\eta} \geq 0, -180^\circ \leq \phi \leq 180^\circ, \\ \cos\phi = -\sqrt{4b^2 - 3T_{1\eta}^2 - 3T_{1\xi}^2}/\sqrt{4b^2 - 3T_{1\eta}^2}, T_{1\eta} < 0, \end{cases} \end{cases} \\ \theta = \pm 90^\circ \begin{cases} \theta = \pm 90^\circ \\ \cos(\phi \pm \gamma) = (T_{3\xi} - T_{2\xi})/2b \\ \sin(\phi \pm \gamma) = (T_{3\eta} - T_{2\eta})/2b \\ \cos\phi \cos\gamma = \sqrt{3}T_{1\eta}/2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \pm 90^\circ, \\ \gamma = 0 \text{ (当 } \theta = \pm 90^\circ \text{ 时 } \phi \text{ 与 } \gamma \text{ 作用等效)}, \\ \sin\phi = (T_{3\eta} - T_{2\eta})/2b, \\ \cos\phi = (T_{3\xi} - T_{2\xi})/2b = \sqrt{3}T_{1\eta}/2b. \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

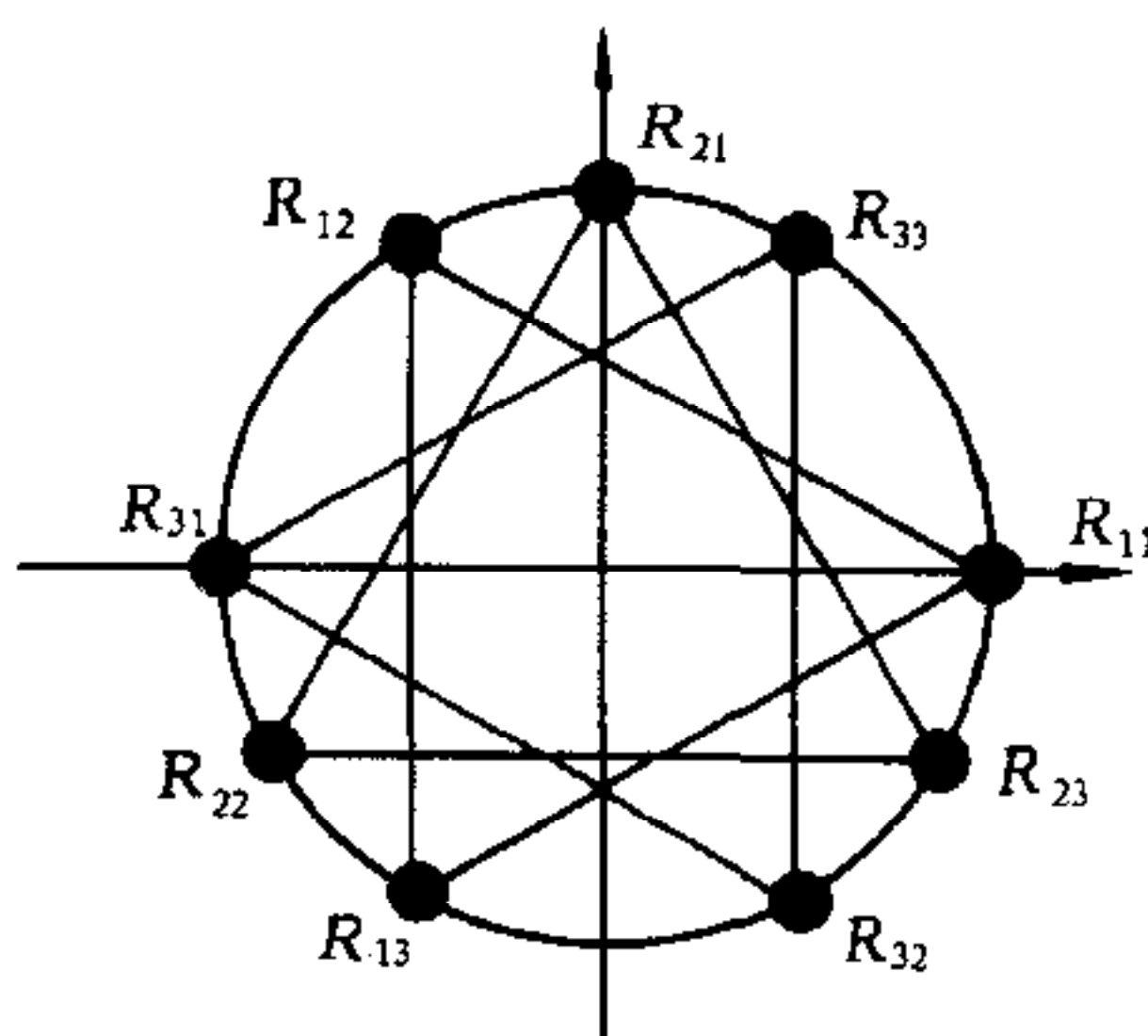


图3 超声波接收器的空间分布

如果在 T_1, T_2 和 T_3 点固定三个不同频率的超声波发射器, 在图3所示的 $(R_{11}, R_{12}, R_{13}), (R_{21}, R_{22}, R_{23})$ 和 (R_{31}, R_{32}, R_{33}) 处分别固定相应的超声波接收器, 根据发射信号与接收信号之间的相位关系^[5] 分别测量9个接收器到3个发射器之间的距离 $L_{11}, L_{12}, L_{13}, L_{21}, L_{22}, L_{23}, L_{31}, L_{32}$ 和 L_{33} , 将测量所得到的三组距离和接收器的分布参数代入公式(3)即可求出发射器组的位置坐标, 然后根据公式(3)和(4)即可求出运动物体的位置和姿态. 由于超声波测距系统的快速响应特征,

通过一定采样频率的连续测量即可实现运动物体方位的快速动态测量。

3 误差模型分析与求解

超声波空间方位跟踪器的测量精度和分辨率不仅与测距单元的测量精度及分辨率有关,而且与3组接收器和3个发射器的分布边长密切相关,其中3组接收器的分布边长 $2a$ 主要影响三个发射器空间坐标的测量精度和分辨率,而3个发射器的分布边长 $2b$ 将直接影响物体空间姿态角的测量精度和分辨率。

3.1 位置坐标分辨率与误差

假定测距单元的距离分辨率为 d ,接收器的分布边长为 $2a$,要求坐标分辨率满足 $(\Delta T_\xi, \Delta T_\eta, \Delta T_\zeta) \leq \epsilon$. 假设发射器的初始位置为 $T(\xi, \eta, \zeta)$,它与三个接收器之间的距离分别为 L_1, L_2 和 $L_3, d' \leq d$. 可以证明,位置坐标的分辨率和误差分别满足^[4]:

$$\begin{cases} (\Delta T_\xi)_{\max} \approx \frac{dL_{\max}}{a}, & (e_\xi)_{\max} \approx \frac{d'L_{\max}}{2a}, \\ (\Delta T_\eta)_{\max} \approx \sqrt{3} \frac{dL_{\max}}{a}, & (e_\eta)_{\max} \approx \frac{\sqrt{3} d' L_{\max}}{2a}, \\ (\Delta T_\zeta)_{\max} \approx \frac{d}{\cos \alpha}. \end{cases} \quad (5)$$

3.2 角度分辨率

假定对三个发射器 (T_1, T_2, T_3) 的三轴坐标的测量分辨率均不低于 ϵ ,要求确定物体姿态角的分辨率 $\Delta\phi, \Delta\theta$ 和 $\Delta\gamma$.

考虑 ϕ 角分辨率时假设 θ 和 γ 不变. 如图4所示,假设 O 点不动,由于 ϕ 角是绕 $O\xi'$ 轴在 $O\xi'\eta'$ 平面上的转动,故 T_1, T_2 和 T_3 的轨迹总在以 O 点为圆心、以 $2\sqrt{3}b/3$ 为半径的圆上. 以圆周上的任意一点 T 为例,由于位于方格 $ABCD$ 内的任意点是不可分辨的,只有当 T_ξ 和 T_η 的变化值之一超过其分辨率 ϵ 时, $\Delta\phi$ 才是可以分辨的. 即当 T 位于 A 并从 A 转动 $\Delta\phi$ 角到达 C 点所经过的弦长在 $O\xi'$

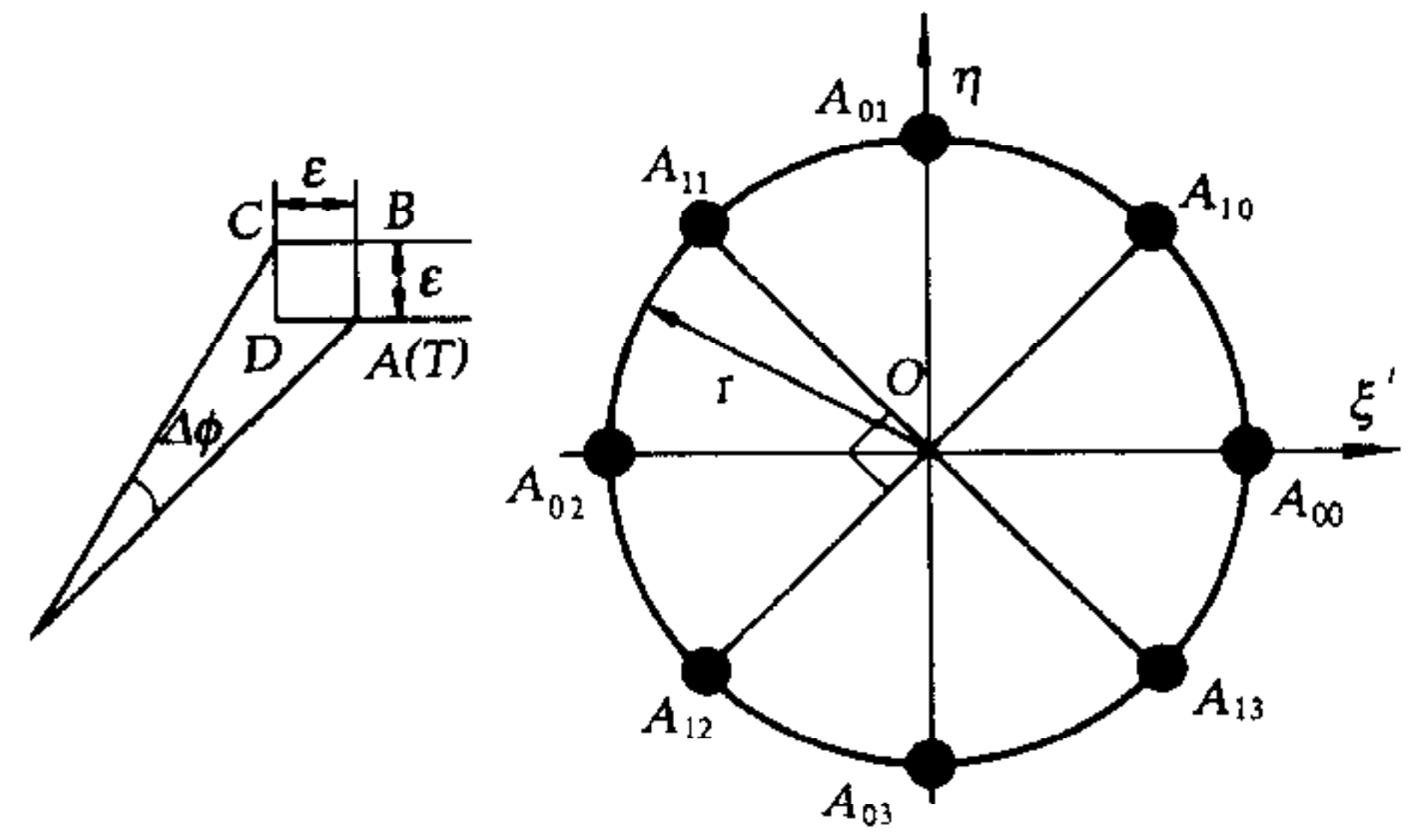


图4 ϕ 角分辨率

或者 $O\eta'$ 轴上的分量等于 ϵ 时, $\Delta\phi$ 才是恰好可分辨的. 图4表示了最好和最坏两种情况:当 T 位于 A_{00}, A_{02}, A_{01} 和 A_{03} 四个位置并由此转动小角度 $\Delta\phi$ 使得 T_η 或者 T_ξ 的变化值达到 ϵ 时, T 点转动的弦长最小,约等于 ϵ ,此时恰好可分辨的 $\Delta\phi$ 最小,即 $\cos\Delta\phi = 1 - 3\epsilon^2/8b^2$;当 T 位于 A_{10}, A_{12}, A_{11} 和 A_{13} 四个位置并由此转动小角度 $\Delta\phi$ 使得 T_η 或者 T_ξ 的变化值达到 ϵ 时, T 点转过的弦长最大,为 $\sqrt{2}\epsilon$,此时恰好可分辨的 $\Delta\phi$ 最大,即 $\cos\Delta\phi = 1 - 3\epsilon^2/4b^2$. 在整个圆周上转角 ϕ 的分辨率为

$$\arccos(1 - 3\epsilon^2/8b^2) \leq \Delta\phi \leq \arccos(1 - 3\epsilon^2/4b^2). \quad (6)$$

同样道理,转角 θ 和 γ 的分辨率分别满足 $\arccos(1 - 3\epsilon^2/8b^2) \leq \Delta\theta \leq \arccos(1 - 9\epsilon^2/8b^2)$ 和 $\arccos(1 - \epsilon^2/2b^2) \leq \Delta\gamma \leq \arccos(1 - 3\epsilon^2/2b^2)$.

3.3 设计接收器与发射器的分布边长

设换能器的发散角为 α , 测距单元的测距范围为 $L_{\min} \leq L \leq L_{\max}$, 测距分辨率为 d , 要求发射器最大测量高度满足 $h_{\max} \geq H$, 位置坐标分辨率满足 $(\Delta T_\xi, \Delta T_\eta, \Delta T_\zeta) \leq \epsilon$, 位置误差满足 $(e_\xi, e_\eta, e_\zeta) \leq \delta$, 则 $2a$ 应该满足

$$\max\left(\frac{2\sqrt{3}dL_{\max}}{\epsilon}, \frac{\sqrt{3}dL_{\max}}{\delta}\right) \leq 2a \leq \min\left(\sqrt{3}L_{\min}\cos\alpha, \sqrt{3(L_{\max}^2 - H^2)}\right). \quad (7)$$

如果 $L_{\max} = 180\text{cm}$, $L_{\min} = 80\text{cm}$, $d = 0.8\text{mm}$, $\epsilon = 8\text{mm}$, $\delta = 10\text{mm}$, $\alpha = 50^\circ$, $H = 160\text{cm}$, $2a$ 满足 $\max(62.35\text{cm}, 24.94\text{cm}) \leq 2a \leq \min(89.06\text{cm}, 142.8\text{cm})$, 取 $2a = 80\text{cm}$.

如果三个发射器分布在边长为 $2b$ 的等边三角形的顶点位置, 位置坐标的分辨率满足 $(\Delta T_\xi, \Delta T_\eta, \Delta T_\zeta) \leq \epsilon$, 要求 $(\Delta\phi, \Delta\theta, \Delta\gamma) \leq \tau$, 则 $2b$ 应该满足

$$2b \geq \sqrt{\frac{6}{1 - \cos\tau}} \epsilon. \quad (8)$$

如果 $\epsilon = 8\text{mm}$, $\tau = 5^\circ$, $2b$ 满足 $2b \geq 31.8\text{cm}$, 取 $2b = 40\text{cm}$.

4 结论

本文对用超声波测距原理实现运动物体六自由度跟踪器的原理和误差模型进行了分析与求解, 并根据角度分辨率的要求提出了对跟踪器硬件参数的设计要求, 为超声波空间位置方位跟踪器的设计研制和性能分析提供了理论依据.

参 考 文 献

- 1 Frank J. Ferrin. Survey of helmet tracking technologies. In: Proc. SPIE, 1991, **1456**: 86~94
- 2 Hidetoshi Nonaka, Tsutomu Da-te. Ultrasonic position measurement and its applications to human interface. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 1995, **44**(3): 771~774
- 3 贾书惠. 刚体动力学. 北京: 国防工业出版社, 1988
- 4 华宏. 虚拟现实系统沉浸感增强和交互技术的研究[博士学位论文]. 北京理工大学, 1999
- 5 Hua Hong, Wang Yongtian, Xu Tong. Dynamic rangefinding device using amplitude-modulated continuous ultrasonic wave. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 1998, **7**(1): 55~61

华 宏 1973年生, 北京理工大学光电工程系95级博士生, 主要从事虚拟现实和光学设计等领域的研究工作.

王涌天 1982年毕业于天津大学精密仪器系, 1986年获英国 Reading 大学工学博士学位, 现任北京理工大学光电工程系教授, 博士生导师, 主要研究方向包括光学设计和 CAD、衍射光学元件、虚拟现实系统及其应用等.