第27卷 第1期 自动化学报 Vol. 27, No. 1
2001年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 2001

短文

离散广义系统的鲁棒稳定性[1)]

徐胜元 杨成梧
（南京理工大学动力工程学院810教研室 南京 210094）
（E-mail：syxu@mail.com）

摘 要 针对具有结构不确定性的离散广义系统，提出了一种新的鲁棒稳定性分析方法；得到了使所考虑系统鲁棒稳定的条件，该条件保证对所有容许的结构摄动，离散广义系统正则、因果且稳定；并进一步得到了所考虑系统具有鲁棒极点集的条件.

关键词 离散广义系统，鲁棒稳定.

ON ROBUST STABILITY FOR DISCRETE SINGULAR SYSTEMS

XU Sheng-Yuan YANG Cheng-Wu
(810 *Division, School of Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing* 210094)
(E-mail: syxu@mail.com)

Abstract In this paper, a new approach to analyze the robust stability for discrete singular systems with structured uncertainties is proposed. A condition under which the perturbed singular system is regular, causal and stable for all admissible structure perturbations is derived. Furthermore, a robust pole-clustering in a specified disk condition for a perturbed singular system is obtained.

Key words Discrete singular systems, robust stability.

1 引言

近年来，广义系统的鲁棒稳定性问题引起了学者们的关注，并取得了一定的研究成果[1~3]；与正常系统不同的是，广义系统的鲁棒稳定性不但要考虑其稳定性，而且还要考虑其正则性及因果性，而后两个问题在正常系统的鲁棒稳定性分析中是不出现的，所以，广义系统的鲁棒稳定性分析比正常系统的鲁棒稳定性分析要复杂.

本文考虑具有结构不确定性的离散广义系统的鲁棒稳定性问题. 首先，利用矩阵不等

1）南京理工大学科研发展基金及国家教委博士点基金资助项目.
收稿日期 1998-08-07 收修改稿日期 2000-03-02

式，给出离散广义系统正则、因果且稳定的充要条件；在此基础上，利用类似于正常系统鲁棒稳定性分析中的 Lyapunov 方法[4,5]，得到了离散不确定性广义系统正则、因果且稳定的条件；最后，本文还得到了使所考虑离散不确定性广义系统具有鲁棒极点集的条件，即对容许的结构摄动，离散广义系统的有限极点位于一设定的圆内，并且系统仍然是正则、因果且稳定的.

2 问题描述

考虑如下的具有结构不确定性的离散广义系统

$$Ex(k+1) = (A + \Delta A)\boldsymbol{x}(k), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k)\in R^n$ 是系统的状态向量，$E\in R^{n\times n}$ 且 $\mathrm{rank}E=d\leqslant n$；$A\in R^{n\times n}$ 是已知阵；$\Delta A\in R^{n\times n}$ 表时不变的结构摄动阵，并假设有

$$|\Delta A| \leqslant kN, \tag{2}$$

其中 k 是正实数，$N\in R^{n\times n}$ 为已知的非负阵，$|\Delta A|$ 表 ΔA 的模矩阵.

称离散广义系统

$$E\boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) \tag{3}$$

为系统(1)的标称系统.

本文所考虑的鲁棒稳定性问题是：假设系统(1)的标称系统(3)是正则、因果且稳定的，要寻求 k 在什么条件下(1)仍然是正则、因果且稳定的.

鲁棒极点集问题是：假设系统(1)的标称系统(3)是正则、因果且 $\sigma(E,A)\subset\Omega(q,r)$，要寻求 k 在什么条件下(1)仍然是正则、因果且 $\sigma(E,(A+\Delta A))\subset\Omega(q,r)$；这里 $\Omega(q,r)$ 表单位圆内以 q 为圆心，r 为半径的圆盘.

3 主要结论

首先给出离散广义系统(3)正则，因果，稳定(简称 RCS)的充要条件.

引理1. 离散广义系统(3)是 RCS 的充要条件是：存在矩阵 $P\in R^{n\times n}$ 使得以下两不等式同时成立.

$$E^{\mathrm T}PE = E^{\mathrm T}P^{\mathrm T}E \geqslant 0, \tag{4}$$

$$A^{\mathrm T}PA + A^{\mathrm T}P^{\mathrm T}A - E^{\mathrm T}PE - E^{\mathrm T}P^{\mathrm T}E < 0. \tag{5}$$

证明见文[7]，略.

下面叙述不确定性离散广义系统(1)鲁棒稳定的主要结论.

定理1. 若不确定性离散广义系统(1)的标称系统(3)是 RCS 的，且存在矩阵 $P\in R^{n\times n}$ 使得

$$E^{\mathrm T}PE = E^{\mathrm T}P^{\mathrm T}E \geqslant 0, \tag{6}$$

$$A^{\mathrm T}WA - E^{\mathrm T}WE < 0, \tag{7}$$

$$k < \frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2a} \tag{8}$$

同时成立. 则式(1)仍然是 RCS 的. 其中 $W=P+P^{\mathrm T}$，$a=\rho(N^{\mathrm T}|W|N)$，$b=\rho\Big(|A|^{\mathrm T}$

$|W|N+N^{\mathrm{T}}|W\|A|\big)$, $c=\lambda_{\min}(E^{\mathrm{T}}WE-A^{\mathrm{T}}WA)$.

证明. 首先,由式(3)是 RCS 的及引理1知,满足(6),(7)的矩阵 P 是存在的. 而由式(2),(8)及文[6]得到

$$\rho(A^{\mathrm{T}}W\Delta A+\Delta A^{\mathrm{T}}WA+\Delta A^{\mathrm{T}}W\Delta A)\leqslant\rho[k(|A|^{\mathrm{T}}|W|N+N^{\mathrm{T}}|W\|A|)+ k^2N^{\mathrm{T}}|W|N)]\leqslant k\rho(|A|^{\mathrm{T}}|W|N+N^{\mathrm{T}}|W\|A|)+k^2\rho(N^{\mathrm{T}}|W|N)= ak^2+bk<c=\lambda_{\min}(E^{\mathrm{T}}WE-A^{\mathrm{T}}WA),$$

于是

$$A^{\mathrm{T}}W\Delta A+\Delta A^{\mathrm{T}}WA+\Delta A^{\mathrm{T}}W\Delta A-(E^{\mathrm{T}}WE-A^{\mathrm{T}}WA)<0,$$

即

$$(A+\Delta A)^{\mathrm{T}}W(A+\Delta A)-E^{\mathrm{T}}WE<0,$$

从而由引理1即得所证.

下面叙述不确定性离散广义系统(1)鲁棒极点集的主要结论.

定理2. 若不确定性离散广义系统(1)的标称系统(3)是正则、因果且 $\sigma(E,A)\subset\Omega(q,r)$,而且存在矩阵 $P\in R^{n\times n}$ 使得

$$E^{\mathrm{T}}PE=E^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}E\geqslant 0, \tag{9}$$

$$\widetilde{A}^{\mathrm{T}}W\widetilde{A}-E^{\mathrm{T}}WE<0, \tag{10}$$

$$k<\frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2a} \tag{11}$$

同时成立. 则系统(1)仍然是正则、因果且 $\sigma(E,(A+\Delta A))\subset\Omega(q,r)$的. 其中 $W=P+P^{\mathrm{T}}$, $\widetilde{A}=\frac{1}{r}(A-qE)$, $a=\frac{1}{r^2}\rho(N^{\mathrm{T}}|W|N)$, $b=\frac{1}{r}\rho(|A|^{\mathrm{T}}|W|N+N^{\mathrm{T}}|W\|A|)$, $c=\lambda_{\min}(E^{\mathrm{T}}WE-\widetilde{A}^{\mathrm{T}}W\widetilde{A})$.

证明. 首先,由 $\sigma(E,A)\subset\Omega(q,r)$及文[2]知,$\sigma(E,\widetilde{A})\subset\Omega(0,1)$,于是由引理1知,满足式(9),(10)的矩阵 P 是存在的. 令 $\Delta\widetilde{A}=\frac{1}{r}\Delta A$,则 $|\Delta\widetilde{A}|\leqslant\frac{k}{r}N$,于是由式(9),(10),(11)并利用定理1得到

$$\sigma(E,\widetilde{A}+\Delta\widetilde{A})\subset\Omega(0,1),$$

注意到

$$\widetilde{A}+\Delta\widetilde{A}=\frac{1}{r}(A+\Delta A-qE),$$

于是易得 $\sigma(E,(A+\Delta A))\subset\Omega(q,r)$. 证毕.

4 结束语

本文得到了使结构不确定性离散广义系统保持其正则,因果且稳定的条件;并进一步得到了所考虑系统具有鲁棒极点集的条件,从而为解决不确定性离散广义系统的鲁棒稳定性问题提供了一条有效的新途径;同时,本文所采用的方法,对离散广义系统的鲁棒控制也是重要的.

参 考 文 献

1 Fang C, Chang F. Analysis of stability robustness for generalized state-space systems with structured

perturbations. *Systems and Control Letters*, 1993, **21**(2):109～114

2 Fang C, Lee L, Chang F R. Robust control analysis and design for discrete-time singular systems. *Automatica*, 1994, **30**(11):1741～1750

3 Lee L, Fang C, Hsieh J. Exact unidirectional perturbation bounds for robustness of uncertain generalized state-space systems: continuous-time cases. *Automatica*, 1997, **33**(10):1923～1927

4 Han Q, Wu Q. Stability robustness analysis of discrete linear systems. *Int. J. Syst. Sci.*, 1991, **22**(1):165～172

5 Foo Y K, Soh Y C. Stability analysis of a family of matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, **35**(11):1257～1259

6 Lancaster P, Tismenetsky M. The theory of matrices. 2nd edition. New York: Academic Press, 1985

7 Xu S, Yang C. Stabilization of discrete-time singular systems: A matrix inequalities approach. *Automatica*, 1999, **35**(9):1613～1617

徐胜元 1968年生. 于1999年在南京理工大学获博士学位. 主要研究方向为广义系统、鲁棒控制和自适应控制.

杨成梧 1936年生. 1961年毕业于哈尔滨军事工程学院，现为南京理工大学教授，博士生导师. 主要研究方向为2D 系统、广义系统、高速采样控制、H_∞控制和离散事件动态系统.