第26卷 第6期
2000年11月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 26, No. 6
Nov., 2000

短文

具有最优时域指标的有界控制器设计[1)]

刘 翔 孙优贤
（浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027）
（E-mail: xliu@iipc.zju.edu.cn）

摘 要 针对SISO线性离散系统，运用线性规划的方法，在控制器输出幅值受约束的条件下，设计最优控制器，使闭环系统获得最优动态性能。为方便计算，将求取最优解的线性规划问题转化为一个关于有界变量的BVLP（有界变量线性规划）问题。

关键词 鲁棒性，超调和负超调，调节时间，有界输出，线性规划。

CONTROLLERS DESIGN WITH SPECIFIC OUTPUT BOUNDS FOR OPTIMAL TIME DOMAIN INDEXES

LIU Xiang SUN Youxian
(*Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Abstract For a SISO linear discrete-time system, the controller for optimal dynamic performance is developed with a specific magnitude boundary on its output using linear programming. The linear programming problem for optimal solution can also be converted to a BVLP (bounded variables linear programming) problem for the simplicity of computation.

Key words Robustness, overshoot and undershoot, settling time, output bounds, linear programming.

1 引言及基本定义

l_1-优化问题的求解方法是线性规划[1,2]和二次规划[3]。而设计有界控制器输出约束下的最优控制器问题始见于文献[4]，但没有给出直接的解决方法。

运用l_1-优化理论可以将最优时域指标的优化问题等价为一个有限维线性规划问题。当控制器输出受约束时，保持优化性能指标不变，将约束转换到可行域中，构成有限维

1）国家自然科学基金（69635010）资助课题。
收稿日期 1998-10-12 收修改稿日期 1999-06-25

BVLP(bounded variables linear programming)问题,从而得出最优解,这是本文主要解决的问题.

$\hat{Z}$:Z-变换. 给定一个右实序列 $P=(P(k))_{k=0}^{\infty}$,$\hat{P}=\sum_{k=0}^{\infty}P(k)z^k$.

按此定义,一个稳定的实有理系统的所有特征根均在单位圆外. D,$\overline{D}$ 分别表示复平面上的开、闭单位圆.

2 问题描述及约束不等式的实现

考虑标准的反馈结构,$\hat{P}$ 表示给定的线性离散时不变对象,$\hat{C}$ 是待设计的控制器,输入 $\hat{u}$ 选择为一个单位阶跃信号(当然也可选择为任意给定信号). 闭环系统调节时间为 N 的含义是

$$y(k)=u(k),\quad k=N,N+1,N+2,\cdots\cdots, \tag{1}$$

或等价地

$$e(k)=0,\quad k=N,N+1,N+2,\cdots\cdots, \tag{2}$$

N 是一个正整数.

闭环系统阶跃响应负超调的含义是$\{v{:}v=\min.\ y(k)\ ,\ y(k)<0,\ k=0,1,2,...\}$. 衰减率的含义是,当 $k\geqslant N_1$(N_1是一个正整数 $\gamma N<N_1<N$,$\gamma\in(0,1)$)时,

$$|e(k)|\leqslant a^{k-N_1}\max|e(k)|,a\in(0,1). \tag{3}$$

控制器 $\hat{c}$ 的设计目标是(a)使闭环系统稳定;(b)渐近跟踪阶跃输入信号;(c)确保指定的调节时间;(d)确保指定的衰减率;(e)使超调量最小;(f)使负超调量的绝对值最小;(g)控制器输出 $e_c(k)$满足约束 $\|\hat{e}_c\|_\infty\leqslant M$,$e_c=\{e_c(k)\}_{k=0}^{\infty}$,$M$ 是大于零的约束正实数.

设 $\hat{P}=\frac{\hat{n}}{\hat{d}}$是对象 $\hat{P}$ 的一个稳定的分解,这里 $\hat{n},\hat{d}\in RA$ 且互质,记 $\deg(\hat{n})=n_q$,$\deg(\hat{d})=d_p$;$\hat{n},\hat{d}$ 可分解为如下形式

$$\hat{n}=\hat{n}_0\prod_{i=1}^{L_n}(z-z_i)^{\sigma_{n_i}},\hat{d}=\hat{d}_0\prod_{i=1}^{L_d}(z-t_i)^{\sigma_{n_i}}. \tag{4}$$

上式中 $\hat{n}_0$,$\hat{d}_0$的所有零点在单位圆 $\overline{D}$ 外,$\hat{n}_0\in RA$,$\hat{d}_0\in RA$;$z_i\in\Lambda_{nd}$,$t_j\in\Lambda_{nd}$($i=1,\cdots,L_n$;$j=1,\cdots,L_d$),$\Lambda_{nd}\subset\overline{D}$,且$\{z_i\}_{i=1}^{L_n}$,$\{t_j\}_{j=1}^{L_d}$是相异实根. 为了使误差 $\hat{e}$ 的稳态值为零,总在 $\hat{d}$ 中添加一个零点 $t_{L_d+1}=1$,并假定 $\hat{n}$ 中不含这个零点,即可设 $\tilde{d}=\hat{d}(1-z)$,且选择 $\hat{s},\hat{h}\in RA$ 满足互质分解

$$\hat{s}\hat{n}+\hat{h}\tilde{d}=1. \tag{5}$$

采用 Youla 参数化方法,所有镇定控制器的集合是

$$\hat{c}=\frac{\hat{s}+\hat{q}\tilde{d}}{\hat{h}-\hat{q}\hat{n}},\hat{q}\in RA. \tag{6}$$

应用(5)式的控制器以及等式 $\hat{u}=\frac{u_0}{1-z}$(u_0是一个非零实常数),得到

$$\hat{e}=(\hat{h}-\hat{q}\hat{n})\hat{d}u_0,\hat{q}\in RA, \tag{7}$$

而

$$\hat{e}=\sum_{i=0}^{\infty}e_iz_i. \tag{8}$$

误差序列$\{e_i\}_{i=0}^{\infty}\in RA$,因为 $\hat{e}$ 是稳定且有理的.

定理1. 若 $\hat{e}\in RA$，则总存在一个 $\hat{q}\in RA$ 使得 $\hat{e}=(\hat{h}-\hat{q}\hat{n})\hat{d}u_0$，当且仅当对于所有的 $z_i\in\Lambda_{nd},t_j\in\Lambda_{nd},\Lambda_{nd}\subset\overline{D}$，满足以下条件：

1) $(\hat{e})^{(k)}(z_i)=(\hat{u})^{(k)}(z_i),i=1,\cdots,L_n;k=0,1,\cdots,\sigma_{n_i}-1$；

2) $(\hat{e})^{(k)}(t_j)=0,\qquad j=1,\cdots,L_d,k=0,1,\cdots,\sigma_{d_j}-1.$

证明见参考文献[5].

由(5～7)式得

$$\hat{c}=\frac{\hat{d}}{\hat{n}}\frac{u_0-(1-z)\hat{e}}{\hat{e}}.\tag{9}$$

定理2. 若控制器(9)中的误差序列 $\hat{e}$ 满足定理1中的插值条件，则其输出序列 e_c 是有界的.

证明. ∵ $(\hat{e})^{(k)}(z_i)=(\hat{u})^{(k)}(z_i),i=1,\cdots,L_n,k=0,1,\cdots,\sigma_{n_i}-1$，

∴ $(\hat{u}-\hat{e})=\hat{w}\prod_{i=1}^{L_n}(z-z_i)^{\sigma_{n_i}},\hat{w}\in RA$，又由 $\hat{u}=\frac{u_0}{1-z}$ 得到

$$u_0-(1-z)\hat{e}=(1-z)\hat{w}\prod_{i=1}^{L_n}(z-z_i)^{\sigma_{n_i}}.\tag{10}$$

∵ $\hat{n}=\hat{n}_0\prod_{i=1}^{L_n}(z-z_i)^{\sigma_{n_i}}$ 且 $\hat{n}_0$ 的所有根在单位圆 $\overline{D}$ 外，

$$\therefore\hat{c}=\frac{\hat{d}}{\hat{n}}\frac{u_0-(1-z)\hat{e}}{\hat{e}}=\frac{\hat{d}}{\hat{n}_0}\frac{(1-z)\hat{w}}{\hat{e}},\frac{1}{\hat{n}_0}\in RA.\tag{11}$$

又 $\hat{d}\in RA,\hat{w}\in RA$ ∴ $\hat{d}(1-z)\hat{w}\in RA$，

∴ ∃ 非零有界正实数 M_1,M_2 满足

$\|\hat{d}(1-z)\hat{w}\|_\infty\leqslant M_1<+\infty,\left\|\frac{1}{\hat{n}_0}\right\|_\infty\leqslant M_2<+\infty$，即∃ 非零有界正实数 $M_0=M_1M_2$，使得

$$\|\hat{e}_c\|_\infty=\|\hat{c}\hat{e}\|_\infty\leqslant\|\hat{d}(1-z)\hat{w}\|_\infty\left\|\frac{1}{\hat{n}_0}\right\|_\infty=M_0<+\infty.\tag{12}$$

定理2说明了控制器输出有界约束下的时域优化问题的合理性. 当控制器输出的设计约束值为正实数 M 时，要求 $\|e_c\|_\infty\leqslant M$，令 $\left\|\frac{1}{\hat{n}_0}\right\|=m>0$，由(12)式，将控制器输出约束转换为

$$\|\hat{d}(1-z)\hat{w}\|_\infty\leqslant M/m.\tag{13}$$

令 $\deg(\hat{w})=n_w,\hat{d},\hat{w}$ 可分别展开，得到 $\hat{d}=\sum_{i=0}^{d_p}d_iz^i,\hat{w}=\sum_{i=0}^{n_w}w_iz^i$. 因此，(13)式等价以下不等式方程组

$$\begin{cases}A\overline{w}\leqslant(M/m)^-,\\-A\overline{w}\leqslant(M/m)^-,\end{cases}\tag{14}$$

其中 $\overline{w}=[w_0\quad w_1\quad\cdots\quad w_{n_w}]^{\mathrm{T}}$，向量 $(M/m)^-$ 的所有元素值为 $M/m,A=A_dA_1$，

$$A_1=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\-1&1&\cdots&\vdots\\0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&1\\0&\cdots&0&-1\end{bmatrix}_{(n_w+2)\times(n_w+1)},\quad A_d=\begin{bmatrix}d_0&0&\cdots&0\\\vdots&d_0&\cdots&\vdots\\d_{d_p}&\vdots&\cdots&d_0\\0&d_{d_p}&\cdots&\cdots\\\vdots&\vdots&&d_p\end{bmatrix}_{(d_p+n_w+2)\times(n_w+2)}.$$

令
$$(1-z)\prod_{i=1}^{L_n}(z-z_i)^{\sigma_{n_i}}=\sum_{i=0}^{n_s}\beta_i z^i,\tag{15}$$
其中
$$n_s=\sum_{i=1}^{L_n}\sigma_{n_i}+1.\tag{16}$$
由(10)式 $N=n_s+n_w$;由(15)式,(10)式可等价为矩阵方程
$$A_\beta\overline{w}=\overline{u}-A_e\overline{e},\tag{17}$$
其中
$$A_e=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\-1&1&\cdots&\cdots\\0&-1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&1\\0&\cdots&0&-1\end{bmatrix}_{(N+1)\times N},A_\beta=\begin{bmatrix}\beta_0&0&\cdots&0\\\cdots&\beta_0&\cdots&\cdots\\\beta_{n_s}&\cdots&\cdots&\beta_0\\0&\beta_{n_s}&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdot&\cdots&\beta_{n_s}\end{bmatrix}_{(N+1)\times(n_w+1)},\overline{u}=\begin{bmatrix}u_0\\0\\\cdot\\\cdot\\0\end{bmatrix}_{(N+1)}$$

假定 A_β 中 $\beta_0=\beta_1=\cdots\cdots=\beta_{r-1}=0,\beta_r\neq0(0\leqslant r<n_s)$,取方程组(17)中从第 r 个方程开始往下的 n_w+1个方程,得到
$$A_{\beta1}\overline{w}=\overline{u}_1-A_{e1}\overline{e}.\tag{18}$$
由于 $A_{\beta1}$是$(n_w+1)\times(n_w+1)$维下 Δ 矩阵,且对角线元素 $\beta_r\neq0$,所以,$A_{\beta1}$可逆.由(18)式得 $\overline{w}=A_{\beta1}^{-1}(\overline{u}_1-A_{e1}\overline{e})$,代入(14)式即得关于误差序列的约束不等式方程组
$$\begin{cases}-AA_{\beta1}^{-1}A_{e1}\overline{e}\leqslant(M/m)^- - AA_{\beta1}^{-1}\overline{u}_1,\\AA_{\beta1}^{-1}A_{e1}\overline{e}\leqslant(M/m)^- + AA_{\beta1}^{-1}\overline{u}_1.\end{cases}\tag{19}$$

3 控制器输出有界约束下的最优动态性能实现

由定理1,若令误差序列绝对值的最大值为
$$v=\max_i|e_i|,\quad e_i=x_i(i=0,1,2,\cdots,N-1),\tag{20}$$
即 $\overline{x}=\overline{e}$,则受指定调节时间和衰减率约束,控制器输出约束为$\|e_c\|_\infty\leqslant M$ 的超调量和负超调量绝对值极小化问题能由如下插值问题描述
$$\begin{gathered}\min v,\\ \text{s.t.}\qquad A_v\overline{x}=\overline{u}_v,\\ -AA_{\beta1}^{-1}A_{e1}\overline{x}\leqslant(M/m)^- - AA_{\beta1}^{-1}\overline{u}_1,\\ AA_{\beta1}^{-1}A_{e1}\overline{x}\leqslant(M/m)^- + AA_{\beta1}^{-1}\overline{u}_1,\\ E\overline{x}\leqslant\overline{v},\ -E\overline{x}\leqslant\overline{v},\ -v\leqslant0,\end{gathered}\tag{21}$$
其中
$$A_v=\begin{bmatrix}\left\{\begin{matrix}\cdot\\A_i(z_i)\\\cdot\end{matrix}\right\}_{i=1}^{L_n}\\\left\{\begin{matrix}\cdot\\B_j(t_j)\\\cdot\end{matrix}\right\}_{j=1}^{L_d}\end{bmatrix},\quad A_i(z_i)=\begin{bmatrix}1&z_i&\cdots&z_i^{N-1}\\0&1&\cdots&(N-1)z_i^{N-2}\\&&\cdots&\\0&\cdots&(\sigma_{n_i}-1)!\cdots&(N-1)\cdots(N-\sigma_{n_i}+1)z_i^{N-\sigma_{n_i}}\end{bmatrix},$$

$$B_j(t_j)=\begin{bmatrix}1 & t_j & \cdots & t_j^{N-1}\\ 0 & 1 & \cdots & (N-1)t_j^{N-2}\\ & & \cdots & \\ 0 & \cdots & (\sigma_{d_j}-1)!\cdots & (N-1)\cdots(N-\sigma_{d_j}+1)t_j^{N-\sigma_{d_j}}\end{bmatrix},\quad \bar{u}_v=\begin{bmatrix}\left\{\begin{matrix}\cdots\\ \hat{u}(z_i)\\ \cdots\\ \hat{u}^{(\sigma_{n_i}-1)}(z_i)\\ \cdots\\ 0\end{matrix}\right\}_{i=1}^{L_n}\end{bmatrix},$$

式中 E 是 N 阶单位阵,$\bar{v}=v[1\ \ \cdots\ \ 1\ \ a\ \ \cdots\ \ a^{N-N_1-1}]^{\mathrm{T}}$,$a\in(0,1)$,$i=1,\cdots,L_n$,$j=1,\cdots,L_d$. 显然,$\{A_i(z_i)\}_{i=1}^{L_n}$,$\{B_j(t_j)\}_{j=1}^{L_d}$均行满秩,而且由于$\{z_i\}_{i=1}^{L_n}$,$\{t_j\}_{j=1}^{L_d}$是相异实数,所以不同分块矩阵之间也是行满秩的. 因此,要使(21)式中的矩阵方程有解,当且仅当 $N\geqslant\sum_{i=1}^{L_n}\sigma_{n_i}+\sum_{i=1}^{L_d}\sigma_{d_i}$,即 A_v 阵是"胖"的.

至此,有界控制器输出约束下的最优时域指标设计问题,可以通过解有限维线性规划问题(21)而得到. 实用过程中,为简化计算,可将(21)式转化为 BVLP 问题, 即取一个容许最大误差上界,正实数 $R>0$, 取代(21)式中约束不等式中的 v,并用 x_{N_1}替代目标函数中的 v,即构成一个 BVLP 问题.

4　结论

本文利用 l_1 优化理论,研究了控制器输出幅值受约束时,获取最优动态性能的控制器设计方法. 将对控制器输出的约束转换到求取最优动态性能的线性规划问题的可行域中,组成一个单目标优化问题,从而求取最优解. 在计算机控制中,控制器输出幅值受约束问题,显然是不可避免的,因此,对这一问题的研究具有重要的应用价值.

参　考　文　献

1 Dahleh M A, Pearson J B. l_1-optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1987, **AC-32**: 314～322

2 Deodhare G, Vidyasagar M. l_1-optimality of feedback control systems: the SISO discrete-time case. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1990, **35**: 1082～1085

3 Elia N, Dahleh M A. A quadratic programming approach for solving the l_1 multiblock problem. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1998, **43**: 1242～1252

4 Bobillo I J, Dahleh M A. Minimization of the maximum peak to peak gain: the general multiblock problem. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1993, **38**: 1459～1482

5 刘翔. 不确定线性离散系统鲁棒控制与应用[学位论文]. 杭州:浙江大学控制系, 1999

刘　翔　1964年生,1987年毕业于清华大学自动化系,1999年在浙江大学获博士学位,现在浙江大学从事博士后工作。研究领域为鲁棒及智能计算机控制、智能生产调度等。

孙优贤　见本刊第26卷第1期.