第27卷 第1期
2001年1月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 1
Jan., 2001

短文

一类参数不确定性系统的鲁棒控制[1)]

王恩平

（中国科学院系统科学研究所 北京 100080）

黄 琳 耿志勇

（北京大学力学与工程科学系 北京 100871）

（E-mail: z. geng@ 263. net）

摘 要 讨论了带有分母多项式摄动的参数不确定性系统的鲁棒镇定问题，给出了这类参数不确定性系统存在鲁棒控制器的一个充分条件，并且当这个条件被满足时，得到了部分鲁棒控制器的一个参数化公式.

关键词 参数不确定性系统，鲁棒镇定，鲁棒控制器.

ROBUST STABILIZATION FOR A CLASS OF SYSTEMS WITH PARAMETRIC UNCERTAINTIES

WANG En-Ping

(*Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

HUANG Lin GENG Zhi-Yong

(*Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing* 100871)

(E-mail: z. geng@ 263. net)

Abstract This paper studies the problem of robust stabilization of the system with uncertain parameters in the denominators of its transfer function. A sufficient condition for the existence of a robust controller that stabilizes the uncertain systems is presented, and if such a condition is satisfied, then a parameterized formula that can be used to construct the controller is obtained.

Key words Systems with parametric uncertainties, robust stabilization, robust controllers.

1 引言

参数不确定性系统的鲁棒镇定问题一直受到人们的关注[1~5]. 本文讨论带有分母多

1) 国家攀登计划、国家自然科学基金(19972001)及教育部骨干教师项目资助课题.

收稿日期 1999-06-22 收修改稿日期 2000-01-17

项式摄动模式的参数不确定性系统的鲁棒镇定问题，得到了这类参数不确定系统存在鲁棒控制器的一个充分条件，并且当这个条件成立时给出了部分鲁棒控制器的一个参数化公式.

已知标称系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{f(s)}{g(s)},$$

其中

$$f(s)=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0,$$
$$g(s)=s^n+\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1+\beta_0.$$

摄动系统的传递函数为

$$G_\Delta(s)=\frac{f(s)}{g(s)+\delta g(s)}\ .$$

这里

$$\delta g(s)=q_{n-1}s^{n-1}+\cdots+q_1 s+q_0,$$
$$\boldsymbol{q}=[q_0\,q_1\cdots q_{n-1}]\in\Omega\subset\Re^n,$$

Ω 为 n 维欧氏空间 $\Re^n$ 中的一个有界集.

我们的问题是，当摄动多项式 $\delta g(s)$ 的系数向量 $\boldsymbol{q}$ 满足什么条件时，参数不确定性系统 $G_\Delta(s)$ 存在鲁棒控制器 $K(s)$. 我们说 $K(s)$ 是摄动系统 $G_\Delta(s)$ 的一个鲁棒控制器是指，对任意 $\boldsymbol{q}\in\Omega$，由 $G_\Delta(s)$ 和 $K(s)$ 构成的闭环系统都是内部稳定的.

为了本文的需要，假设标称系统 $G(s)$ 在虚轴上既没有极点又没有零点，即 $G(-j\omega)\cdot G(j\omega)>0$ 对一切 $0\leqslant\omega\leqslant\infty$ 成立. 现在我们对 $G(s)$ 做双互质分解

$$G(s)=N(s)M^{-1}(s)=\widetilde{M}^{-1}(s)\widetilde{N}(s),\tag{1}$$

并且

$$\begin{bmatrix}M(s) & Y(s)\\ N(s) & X(s)\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|cc}A+\boldsymbol{b}F & \boldsymbol{b} & -H\\ \hline F & 1 & 0\\ \boldsymbol{c}+F & 1 & 1\end{array}\right],\tag{2}$$

$$\begin{bmatrix}\widetilde{X}(s) & -\widetilde{Y}(s)\\ -\widetilde{N}(s) & \widetilde{M}(s)\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|cc}A+H\boldsymbol{c} & -(\boldsymbol{b}+H) & H\\ \hline F & 1 & 0\\ \boldsymbol{c} & -1 & 1\end{array}\right],\tag{3}$$

$$\begin{bmatrix}\widetilde{X}(s) & -\widetilde{Y}(s)\\ -\widetilde{N}(s) & \widetilde{M}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M(s) & Y(s)\\ N(s) & X(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix},\tag{4}$$

其中

$$F=-(\boldsymbol{b}^{\mathrm T}P+c),H=-(\boldsymbol{b}+Q\boldsymbol{c}^{\mathrm T}),\tag{5}$$

$$(A-\boldsymbol{bc})^{\mathrm T}P+P(A-\boldsymbol{bc})-P\boldsymbol{bb}^{\mathrm T}P=0,\tag{6}$$

$$(A-\boldsymbol{bc})Q+Q(A-\boldsymbol{bc})^{\mathrm T}-Q\boldsymbol{c}^{\mathrm T}\boldsymbol{c}Q=0.\tag{7}$$

由于 $G(-j\omega)G(j\omega)>0$，$\forall\ 0\leqslant\omega\leqslant\infty$，因此方程(6)和(7)总有对称非负定解 P,Q，使得 $A+\boldsymbol{b}F$，$A+H\boldsymbol{c}$ 稳定. 并且可以验证 $N(s)=\widetilde{N}(s)$ 均系内函数，即 $N(-s)N(s)=1$.

现在令 $h(s)=\det[sI-(A+\boldsymbol{b}F)]$，于是摄动系统的传递函数 $G_\Delta(s)$ 可改写做

$$G_{\Delta}(s)=\frac{\frac{f(s)}{h(s)}}{\frac{g(s)}{h(s)}+\frac{\delta g(s)}{h(s)}}. \tag{8}$$

事实上，可以验证，$N(s)=\widetilde{N}(s)=f(s)/h(s)$，$M(s)=\widetilde{M}(s)=g(s)/h(s)$，并且有

$$\frac{f(-s)f(s)}{h(-s)h(s)}=1.$$

下面我们将按(8)式给出的摄动系统的表达式来研究它的鲁棒镇定问题.

2 鲁棒镇定问题

在这一节，我们讨论一般带有分母因式摄动下的单输入-单输出的系统鲁棒镇定问题. 这样的摄动系统的传递函数为

$$G(s,\Delta)=N(s)(M(s)+\Delta(s))^{-1}, \tag{9}$$

其中 $N(s)M^{-1}(s)=G(s)$同前，$\Delta(s)\in RH_{\infty}$，且$\|\Delta(s)\|_{\infty}<\varepsilon$，$\varepsilon$ 是事先给定的一个正数.

依文献[6]的结果我们有下面的定理.

定理1. 已知标称系统 $G(s)=N(s)M^{-1}(s)$，摄动系统 $G(s,\Delta)=N(s)(M(s)+\Delta(s))^{-1}$，$\Delta(s)\in RH_{\infty}$，$\|\Delta(s)\|_{\infty}<\varepsilon$，$\varepsilon$ 是事先给定的一个正数. 我们说控制器 $K(s)$鲁棒镇定摄动系统 $G(s,\Delta)$的充分必要条件是

i) $$K(s)=(Y(s)-M(s)q(s))(X(s)-N(s)q(s))^{-1},$$
$$q(s)\in RN_{\infty},\det(X(s)-N(s)q(s))\neq 0, \tag{10}$$

ii) $$\|X(s)-N(s)q(s)\|_{\infty}<\varepsilon^{-1}. \tag{11}$$

注意，由于在 $G(s)$的双互质分解(1)中，$N(s)$是内函数，因此式(11)可改写作

$$\|N(-s)X(s)-q(s)\|_{\infty}<\varepsilon^{-1}. \tag{12}$$

不难计算

$$N(-s)X(s)=1-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(sI+A_F^{\mathrm{T}})^{-1}PQ\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}},$$

其中 $A_F=A+\boldsymbol{b}F$. 于是(12)式又可改写作

$$\|1-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(sI+A_F^{\mathrm{T}})^{-1}PQ\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}-q(s)\|_{\infty}<\varepsilon^{-1}. \tag{13}$$

从(13)式我们可以看出，对于给定的 $\varepsilon>0$，只要解出 $q(s)$再代入(10)式就可得到鲁棒控制器 $K(s)$. 然而现在的问题是 ε 满足什么条件才能存在鲁棒控制器呢?显然，当

$$\Big(\min_{q(s)\in RH_{\infty}}\|1-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(sI+A_F)^{\mathrm{T}}PQ\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}-q(s)\|_{\infty}\Big)^{-1}>\varepsilon$$

时，(13)式一定有解，从而鲁棒控制器 $K(s)$存在. 令

$$\varepsilon_{\max}=\Big(\min_{q(s)\in RH_{\infty}}\|1-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(sI+A_F)^{\mathrm{T}}PQ\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}-q(s)\|_{\infty}\Big)^{-1},$$

可以证明，若令 L_c 和 L_o 分别为下列李雅普诺夫方程的解，

$$A_F^{\mathrm{T}}L_c+L_cA_F+PQ\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}QP=0,$$
$$A_FL_o+L_oA_F^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=0,$$

那么

$$\varepsilon_{\max}=\lambda_{\max}^{1/2}(L_cL_o),$$

其中 $\lambda_{\max}(\cdot)$表示矩阵的最大特征值. 由此可有下面的定理.

定理2. 已知标称系统 $G(s)=N(s)M^{-1}(s)$，摄动系统 $G(s,\Delta)=N(s)(M(s)+\Delta(s))^{-1}$，$\Delta(s)\in RH_\infty$，$\|\Delta(s)\|_\infty<\varepsilon$，当 $\varepsilon<\varepsilon_{\max}$ 时，摄动系统必存在鲁棒控制器 $K(s)$. 并且

$$K(s)=(Y(s)-M(s)q(s))(X(s)-N(s)q(s))^{-1},$$
$$q(s)=(W_{12}(s)+W_{11}(s)\phi(s))(W_{22}(s)+W_{21}(s)\phi(s))^{-1},$$
$$\phi(s)\in RH_\infty,\quad \|\phi(s)\|_\infty\leqslant\varepsilon^{-1},$$
$$\begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s)\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:cc} A_F & E\boldsymbol{b} & -EL_0PQ\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \\ \hdashline -\varepsilon^2[\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}L_c+\boldsymbol{c}QP] & 1 & 1 \\ -\varepsilon^2\boldsymbol{c}QP & 0 & 1\end{array}\right],$$
$$E=(I-\varepsilon^2L_0L_c)^{-1}.$$

证明. 定理的前半部分是定理1的直接推论，后半部分可由参考文献[7]中的定理2.1和2.3经计算解 Nehari 问题(12)得到.

3　鲁棒控制器存在的条件

现在我们来研究由(8)式描述的参数不确定性系统的鲁棒控制器的存在条件. 事实上，由定理2可知，显然有下面的定理.

定理3. 已知标称系统 $G(s)$ 及带有分母摄动的不确定系统 $G_\Delta(s)$. 假设 $G(s)$ 在虚轴上既没有零点又没有极点，那么当

$$\left\|\frac{\delta g(s)}{h(s)}\right\|_\infty<\varepsilon_{\max},\tag{14}$$

时，摄动系统 $G_\Delta(s)$ 定存在鲁棒控制器 $K(s)$，并且它的部分参数化公式可按定理2的结果给出，只是将其中的 ε 换成 $\varepsilon_{\max}$ 即可.

下面我们来研究不等式(14). 取 $\delta g(s)/h(s)$ 的实现为

$$\frac{\delta g(s)}{h(s)}=\left[\begin{array}{c:c} A+\boldsymbol{b}F & \boldsymbol{b} \\ \hdashline \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} & 0\end{array}\right],\tag{15}$$

显然这是一个能控实现，并且在虚轴没有不能观测振型，于是由有界实引理有如下定理.

定理4. 为使不等式(14)成立的充分必要条件是 Riccati 不等式

$$(A+\boldsymbol{b}F)^{\mathrm{T}}L+L(A+\boldsymbol{b}F)+\varepsilon_{\max}^{-2}L\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}L+\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}<0\tag{16}$$

有对称正定解 L.

定义

$$\mu_0=\sup\{\mu:\exists\ L=L^{\mathrm{T}}>0,\text{使得}(A+\boldsymbol{b}F)^{\mathrm{T}}L+L(A+\boldsymbol{b}F)+\varepsilon_{\max}^{-2}L\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}L+\mu I<0\}.\tag{17}$$

定理5. 已知标称系统 $G(s)$ 和摄动系统 $G_\Delta(s)$. 假设 $G(s)$ 在虚轴上没有零极点. 如果

$$\|\boldsymbol{q}\|^2<\mu_0,\quad \forall\ \boldsymbol{q}\in\Omega,\tag{18}$$

那么摄动系统 $G_\Delta(s)$ 必存在鲁棒控制器.

证明. 事实上，当(18)成立时，必有 $\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}<\mu_0I$，由 μ_0 的定义(17)可知，不等式(16)必存在对称正定解. 从而由定理3知，摄动系统 $G_\Delta(s)$ 存在鲁棒控制器.

推论1. 已知标称系统 $G(s)$和摄动系统 $G_\Delta(s)$. 假设 $G(s)$在虚轴上没有零极点，如果

$$\Omega \subset S(0,\sqrt{\mu_0}),$$

那么摄动系统 $G_\Delta(s)$必存在鲁棒控制器，其中

$$S(0,\sqrt{\mu_0}) = \{\boldsymbol{q}:\|\boldsymbol{q}\|^2 < \mu_0\}.$$

由此可见，为了说明摄动系统 $G_\Delta(s)$存在鲁棒控制器，首先要求出 μ_0，而 μ_0是通过求解一系列线性矩阵不等式(LMI)得到的，即

$$\mu_0 = \sup\left\{\mu:\exists\ L = L^{\mathrm{T}} > 0,\text{使得}\begin{bmatrix} -(A+\boldsymbol{b}F)^{\mathrm{T}}L - L(A+\boldsymbol{b}F) - \mu I & L\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}L & \varepsilon_{\max}^2 \end{bmatrix} > 0\right\}.$$

需要指出的是，如果标称系统的传递函数 $G(s)$是一个严格真的有理函数，那么就不能用本文所给出的办法来判断摄动系统 $G_\Delta(s)$是否存在鲁棒控制器，原因是这时 $G(s)$在无穷远点有一个零点，因而它的双互质分解不能保证 $N(s)$为内函数，所以本文所介绍的方法不适用于这种情况.

参 考 文 献

1 Wang Long, Huang Lin. Vertex results for uncertain systems. *Int. J. Systems Sci.*, 1994, **26**(3):541～549

2 Chapellat H, Dahleh M, Bhattacharyya S P. Robust stability under structured and unstructured perturbations. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1990, **35**(10): 1100～1108

3 Barmish B R, Hollot C V, Kraus F F, Tempo R. Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first order compensators. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1992, **37**(6):707～714

4 耿志勇，王恩平，黄琳. 区间对象族四顶点镇定结果. 94' 中国控制会议论文集，北京：中国科学技术出版社，1994. 231～240

5 王恩平. 鲁棒镇定区间对象族的一个充分条件. 自动化学报，1998，**24**(3)：298～293

6 王恩平. 带有分母因式摄动不确定系统的鲁棒镇定. 自动化学报，1999，**25**(3)：289～294

7 Green M, Glover K, Limebeer D, Doyle J. A J-Spectral factorization approach to H_∞ control. *SIAM J. Control and Optimization*, 1990, **28**(6): 1350～1371

王恩平 简介见本刊第21卷第6期.