第27卷 第3期
2001年5月
自动化学报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 27, No. 3
May, 2001

短文

具有时变不确定性的线性时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制[1)]

郑连伟 刘晓平 张庆灵
(东北大学信息科学与工程学院 沈阳 110006) (东北大学理学院 沈阳 110006)

摘 要 研究具有一般形式的不确定线性时滞系统的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器设计问题.基于二次 H_∞ 性能概念,首先证明了若存在鲁棒 H_∞ 动态状态反馈控制器,则必存在鲁棒 H_∞ 静态状态反馈控制器,然后利用线性矩阵不等式给出了鲁棒 H_∞ 静态状态反馈控制器存在的充分条件和构造方法,最后给出一个算例验证本文方法的有效性.

关键词 鲁棒 H_∞ 控制,时滞,不确定性,线性矩阵不等式.

ROBUST H_∞ CONTROL FOR LINEAR DELAY SYSTEMS WITH TIME-VARYING UNCERTAINTIES

ZHENG Lian-Wei LIU Xiao-Ping
(*School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang* 110006)
ZHANG Qing-Ling
(*School of Sciences, Northeastern University, Shenyang* 110006)

Abstract This paper focuses on the problem of robust H_∞ state feedback controller design for linear delay systems with time-varying uncertainties. Based on the notion of quadratic H_∞ performance, it is proved that if there exists a robust H_∞ dynamic state feedback controller, then there must exist a robust H_∞ static state feedback controller. Sufficient conditions for the existence of robust H_∞ static state feedback controllers are given in terms of linear matrix inequalities, and the design method is also presented. The systems in consideration are more general than those considered in the references. Finally, an example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words Robust H_∞ control, delay, uncertainties, linear matrix inequalities.

1) 国家教育部跨世纪优秀人才培养计划基金(199345)、国家教育部留学回国人员科研基金、国家自然科学基金(69974007)及辽宁省自然科学基金(971046)资助课题.
收稿日期 1999-02-03 收修改稿日期 2000-05-22

1 引言

近年来,不确定线性时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制受到许多学者的关注[1~6]. 文献[1]研究鲁棒 H_∞ 性能分析问题,但对控制器设计问题没有考虑;文献[2～5]与[6]分别利用 Riccati 方程和线性矩阵不等式方法,研究鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器设计问题,但考虑的情况比较特殊,如控制输出方程中都不存在时滞状态项,干扰输入矩阵中都不存在不确定性,并且文献[3～6]的控制输出方程中不存在干扰和不确定性,文献[3,5]的不确定参数为时不变的. 因此,这些文献所得结果的应用受到了限制.

本文利用线性矩阵不等式方法,研究一般情况下的不确定线性时滞系统的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器设计问题,证明若存在鲁棒 H_∞ 动态状态反馈控制器,则必存在鲁棒 H_∞ 静态状态反馈控制器,并给出鲁棒 H_∞ 静态状态反馈控制律.

2 系统描述

考虑如下不确定线性时滞系统

$$\dot{x}(t) = A_\delta x(t) + A_{1\delta} x(t-r) + B_{1\delta} w(t) + B_{2\delta} u(t), \tag{1}$$

$$z(t) = C_\delta x(t) + C_{1\delta} x(t-r) + D_{1\delta} w(t) + D_{2\delta} u(t). \tag{2}$$

上式中 $x(t)\in R^n$ 是状态;$z(t)\in R^p$ 是控制输出;$u(t)\in R^m$ 是控制;$w(t)\in R^q$ 是干扰;$r>0$ 是未知时滞常数;$A_\delta, A_{1\delta}, B_{1\delta}, B_{2\delta} C_\delta, C_{1\delta}, D_{1\delta}, D_{2\delta}$是时变不确定参数向量 $\delta=(\delta_1(t),\cdots,\delta_K(t))$的仿射矩阵函数,例如 $A_\delta=A_0+\delta_1(t)A_1+\cdots+\delta_K(t)A_K$,其中 $A_0,\cdots,A_K$ 是常数矩阵. 本文假设 $\underline{\delta}_i\leqslant\delta_i(t)\leqslant\overline{\delta}_i(i=1,2,\cdots,K)$,其中 $\underline{\delta}_1,\overline{\delta}_1,\cdots,\underline{\delta}_K,\overline{\delta}_K$ 是常数. 记含有2^K 个元素的集合 $V=\{(v_1,\cdots,v_K):v_i=\underline{\delta}_i$ 或 $\overline{\delta}_i,\forall\, i=1,2,\cdots,K\}$.

本文的目的是设计线性状态反馈控制器,使它和系统(1)和(2)构成的闭环系统

$$\dot{\eta}(t) = \overline{A}_\delta \eta(t) + \overline{A}_{1\delta}\eta(t-r) + \overline{B}_{1\delta} w(t), \tag{3}$$

$$z(t) = \overline{C}_\delta \eta(t) + \overline{C}_{1\delta}\eta(t-r) + \overline{D}_{1\delta} w(t) \tag{4}$$

具有二次 H_∞性能. 为此,首先引入如下定义.

定义1. 给定常数 $\gamma>0$. 如果存在正定矩阵 P 和 S,使得对于任意 $\delta\in V$,有

$$\begin{bmatrix} -I & -\overline{C}_\delta & -\overline{D}_{1\delta} & -\overline{C}_{1\delta} \\ -\overline{C}_\delta^{\mathrm{T}} & P\overline{A}_\delta+\overline{A}_\delta^{\mathrm{T}}P+S & P\overline{B}_{1\delta} & P\overline{A}_{1\delta} \\ -\overline{D}_{1\delta}^{\mathrm{T}} & \overline{B}_{1\delta}^{\mathrm{T}}P & -\gamma^2 I & 0 \\ -\overline{C}_{1\delta}^{\mathrm{T}} & \overline{A}_{1\delta}^{\mathrm{T}}P & 0 & -S \end{bmatrix} < 0, \tag{5}$$

则称系统(3)和(4)具有二次 H_∞性能.

由文献[1]不难得知,如果系统(3)和(4)具有二次 H_∞性能,则此系统二次稳定,且从干扰输入到控制输出的 H_∞范数不超过 γ,即在零初始条件($\eta(t)=0,t\in[-r,0]$)下,$\|z\|_{L_2}\leqslant\gamma\|w\|_{L_2},\forall\; w(t)\in L_2[0,\infty)$.

3 主要结果

定理1. 如果存在线性动态状态反馈控制器

$$\dot{x}_c(t) = \hat{A}x_c(t) + \hat{B}x(t), \quad u(t) = \hat{C}x_c(t) + \hat{D}x(t), \tag{6}$$

使得闭环系统具有二次 H_∞ 性能,则存在静态控制器 $u(t)=Kx(t)$,使得闭环系统具有二次 H_∞ 性能.

证明. 设控制器(6)和系统(1)与(2)构成的闭环系统为(3)和(4),其中 $\eta(t)=[x^{\mathrm T}(t)\ \ x_c^{\mathrm T}(t)]^{\mathrm T}$,则存在正定矩阵 P 和 S,使得(5)式成立.

把(5)式的矩阵两边乘 $Q=Q^{\mathrm T}=\mathrm{diag}(I,P^{-1},I,P^{-1})$,得

$$\begin{bmatrix} -I & -\overline{C}_\delta P^{-1} & -D_{1\delta} & -\overline{C}_{1\delta}P^{-1} \\ -P^{-1}\overline{C}_\delta^{\mathrm T} & \overline{A}_\delta P^{-1}+P^{-1}\overline{A}_\delta^{\mathrm T}+P^{-1}SP^{-1} & \overline{B}_{1\delta} & \overline{A}_{1\delta}P^{-1} \\ -D_{1\delta}^{\mathrm T} & \overline{B}_{1\delta}^{\mathrm T} & -\gamma^2 I & 0 \\ -P^{-1}\overline{C}_{1\delta}^{\mathrm T} & P^{-1}\overline{A}_{1\delta}^{\mathrm T} & 0 & -P^{-1}SP^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{7}$$

记 $[Y\ \ Y_2]=[I_n\ \ 0]P^{-1}$,其中 Y 是 $n\times n$ 正定矩阵. 把矩阵(7)右乘矩阵 $T=\mathrm{diag}(I,[Y^{-1}\ \ 0]^{\mathrm T},I,[Y^{-1}\ \ 0]^{\mathrm T})$,左乘 $T^{\mathrm T}$,定理即可得证.

定理2. 给定常数 $\gamma>0$. 存在静态状态反馈控制器,使得闭环系统具有二次 H_∞ 性能的充要条件是,存在矩阵 $W,Y>0,L>0$,使得对任意 $\delta\in V$,有

$$\begin{bmatrix} -I & -C_\delta Y - D_{2\delta}W & -D_{1\delta} & -C_{1\delta}Y \\ -YC_\delta^{\mathrm T} - W^{\mathrm T}D_{2\delta}^{\mathrm T} & A_\delta Y + YA_\delta^{\mathrm T} + B_{2\delta}W + W^{\mathrm T}B_{2\delta}^{\mathrm T} + L & B_{1\delta} & A_{1\delta}Y \\ -D_{1\delta}^{\mathrm T} & B_{1\delta}^{\mathrm T} & -\gamma^2 I & 0 \\ -YC_{1\delta}^{\mathrm T} & YA_{1\delta}^{\mathrm T} & 0 & -L \end{bmatrix} < 0, \tag{8}$$

而且反馈增益矩阵可取为 $K=WY^{-1}$.

证明. 必要性. 假设存在矩阵 $K,P>0,S>0$,使得对任意 $\delta\in V$,有

$$\begin{bmatrix} -I & -(C_\delta + D_{2\delta}K) & -D_{1\delta} & -C_{1\delta} \\ -(C_\delta + D_{2\delta}K)^{\mathrm T} & P(A_\delta + B_{2\delta}K) + (A_\delta + B_{2\delta}K)^{\mathrm T}P + S & PB_{1\delta} & PA_{1\delta} \\ -D_{1\delta}^{\mathrm T} & B_{1\delta}^{\mathrm T}P & -\gamma^2 I & 0 \\ -C_{1\delta}^{\mathrm T} & A_{1\delta}^{\mathrm T}P & 0 & -S \end{bmatrix} < 0.$$

把此矩阵两边乘 $\mathrm{diag}(I,P^{-1},I,P^{-1})$,并记 $Y=P^{-1},W=KP^{-1},L=P^{-1}SP^{-1}$,则得(8)式.

充分性. 把必要性的证明过程反过来,立即得证.

在某些特殊情况下,定理1有更简单的形式.

推论1. 给定常数 $\gamma>0$. 假设在系统(1)和(2)中 $C_{1\delta}=0,D_{1\delta}=0$,并且 $B_{2\delta}=B_2,C_\delta=C,D_{2\delta}=D_2$ 是常数矩阵,$R_2=D_2^{\mathrm T}D_2>0$. 任取一矩阵 $D_\perp$,使得

$$D_\perp D_\perp^{\mathrm T} = I - D_2R_2^{-1}D_2^{\mathrm T}\ (\text{易知 } I - D_2R_2^{-1}D_2^{\mathrm T} \geqslant 0).$$

记 $\widetilde{A}_\delta=A_\delta-B_2R_2^{-1}D_2^{\mathrm T}C$,则存在静态状态反馈控制器,使得闭环系统具有二次 H_∞ 性能的充要条件是,存在 $L>0,Y>0$,使得对任意 $\delta\in V$,有

$$\begin{bmatrix} -I & D_\perp^{\mathrm T}CY & 0 \\ YC^{\mathrm T}D_\perp & Y\widetilde{A}_\delta^{\mathrm T} + \widetilde{A}_\delta Y + \gamma^{-2}B_{1\delta}B_{1\delta}^{\mathrm T} - B_2R_2^{-1}B_2^{\mathrm T} + L & A_{1\delta}Y \\ 0 & YA_{1\delta}^{\mathrm T} & -L \end{bmatrix} < 0, \tag{9}$$

而且反馈增益矩阵可取为 $K=-R_2^{-1}(D_2^{\mathrm T}C+B_2^{\mathrm T}Y^{-1})$.

注1. 定理2和推论1分别给出了有限多个线性矩阵不等式. 定理1,2和推论1把文献[7]

的主要结论推广到了时滞系统，推论1还把文献[8]的定理1推广到了不确定系统.

4 数值例子

取 $\gamma=1$. 考虑不确定时滞系统(1)和(2)，其中

$$A_\delta=\begin{bmatrix}-2 & 1-\delta_1+\delta_2\\ 0 & 1+\delta_1\end{bmatrix},\ A_{1\delta}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.2+\delta_1\\ 0.1 & 0.2+\delta_1\end{bmatrix},\ B_{1\delta}=\begin{bmatrix}1+\delta_2\\ 0\end{bmatrix},\ B_{2\delta}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix},$$

$C_\delta=[-0.5\quad -0.4]$, $C_{1\delta}=[0\quad 0]$, $D_{1\delta}=0$, $D_{2\delta}=1$, $|\delta_1|\leqslant 1$, $|\delta_2|\leqslant 1$.
求解不等式(9)，得 H_∞ 状态反馈控制器 $u(t)=[-1.9042\quad -22.0294]x(t)$.

5 结论

本文研究了不确定线性时滞系统的鲁棒 H_∞ 状态反馈控制器设计问题，证明了若存在鲁棒 H_∞ 动态状态反馈控制器，则必存在鲁棒 H_∞ 静态状态反馈控制器；得到了一些线性矩阵不等式，从其解可以构造出所需要的鲁棒 H_∞ 静态状态反馈控制律. 所考虑的系统比以往文献考虑的更具一般性.

参 考 文 献

1 Kokame H *et al*. Robust H_∞ performance for linear delay-differential systems with time-varying uncertainties. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1998, **43**(2): 223～226

2 王景成，苏宏业等. 线性时变不确定时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制. 控制理论与应用，1998，**15**(2):257～262

3 王景成，苏宏业，褚健. 一类不确定时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制器设计. 自动化学报，1998，**24**(4):566～569

4 Yu Li, Chu Jian, Su Hongye. Robust memoryless H_∞ controller design for linear time-delay systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Automatica*, 1996, **32**(12):1759～1762

5 Ge Jianhua *et al*. Robust H_∞ state feedback control for linear systems with state delay and parameter uncertainty. *Automatica*, 1996, **32**(8):1183～1185

6 Cao Y Y, Sun Y X, Lam J. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with time-varying delays. *IEE Pro.-Control Theory Appl.*, 1998, **145**(3):338～344

7 Zhou K *et al*. Robust performance of systems with structured uncertainties in state space. *Automatica*, 1995, **31**(2):249～255

8 He J B *et al*. H_∞ disturbance attenuation for state delayed systems. *Systems & Control Letters*, 1998, **33**:105～114

郑连伟 1963年生. 1992年在东北大学获理学硕士学位，现为东北大学数学系教师，东北大学信息科学与工程学院博士生. 主要从事时滞系统的鲁棒控制研究.

刘晓平 1962年生. 1989年于东北大学获博士学位，现为东北大学信息科学与工程学院教授，博士生导师. 主要研究方向为非线性系统的鲁棒控制.

张庆灵 1956年生. 东北大学理学院院长，控制理论与控制工程学科教授，博士生导师. 主要研究方向为分散控制、鲁棒控制和广义系统理论.