第27卷 第3期
2001年5月

自动化学报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 3
May, 2001

短文

SISO 动态矩阵控制的鲁棒稳定性条件

戴连奎
(浙江大学工业控制技术国家重点实验室 杭州 310027)
(E-mail: lkdai@iipc.zju.edu.cn)

摘 要 定量分析了单输入单输出(SISO)动态矩阵控制系统的鲁棒稳定条件,采用脉冲响应模型簇来描述被控过程的不确定性,并讨论了基于脉冲响应模型(FIR)的动态矩阵控制(DMC)算法;在此基础上,推导了 DMC 闭环系统的鲁棒稳定条件.

关键词 预测控制,动态矩阵控制,鲁棒性,稳定性.

ROBUST STABILITY CONDITIONS FOR SISO DYNAMIC MATRIX CONTROL

DAI Lian-Kui
(*National Laboratory of Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)
(E-mail: lkdai@iipc.zju.edu.cn)

Abstract This paper presents the robust stability conditions for single-input/single-output (SISO) dynamic matrix control (DMC) algorithm. Model uncertainty is described by using a range of possible plant impulse responses, and a new form of DMC algorithm based on a finite impulse response (FIR) model is discussed. Then the robust stability condition for the new DMC algorithm is derived based on Jury's dominant coefficient lemma. These results provide theoretical foundations for analyzing and designing predictive control systems.

Key words Predictive control, dynamic matrix control, robustness, stability.

1 引言

国内外学者对众多模型预测控制(MPC)算法的闭环性能以及与控制参数的关系进行了深入的理论研究. Garcia 与 Morari 首次在内模控制的结构下分析了一种原型 MPC 算法的闭环稳定性[1];文[2]应用 Jury 主系数定理,推导得到了这种原型 MPC 算法的鲁

收稿日期 1999-01-07 收修改稿日期 1999-06-08

棒稳定条件.然而,由于DMC控制算法引入了对控制输入变化的惩罚,文[2]的研究结果并不适用于DMC算法.席裕庚等人定量分析了一阶惯性加纯滞后对象DMC系统的闭环性能[3].

本文将文[2]的研究方法推广应用于DMC算法,采用具有普遍应用意义的脉冲响应模型簇来描述被控过程的不确定性,并推导得到了闭环系统鲁棒稳定的条件.

2 过程模型与不确定性描述

假设某一开环稳定的线性SISO过程可用以下脉冲响应(FIR)模型来描述

$$y(k) = \sum_{i=1}^{N} h(i)u(k-i), \tag{1}$$

其中 $y(k)$ 为过程输出,$u(k)$ 为控制输入,$h(i)$, $i=1,\cdots,N$ 为脉冲响应系数,N 为截断步长.

由上述FIR模型可预测过程的未来输出

$$\hat{y}(k+j) = \sum_{i=1}^{N} \hat{h}(i)u(k+j-i) + \hat{d}(k), j \geqslant 0, \tag{2}$$

其中 $\hat{h}(i)$ 为测试得到的脉冲响应系数,通常不同于对象本身的FIR系数 $h(i)$, $i=1,\cdots,N$,而 $\hat{d}(k)=y(k)-\hat{y}(k)$ 用于对模型误差的在线校正.

基于预测模型(2),$\hat{y}(k+j)$ 可分解成

$$\hat{y}(k+j) = \hat{y}_f(k+j) + \hat{y}_p(k+j) + \hat{d}(k), \tag{3}$$

$$\hat{y}_f(k+j) = \sum_{i=1}^{j} \hat{h}(i)u(k+j-i), \quad \hat{y}_p(k+j) = \sum_{i=j+1}^{N} \hat{h}(i)u(k+j-i),$$

其中 $\hat{y}_f(k+j)$,$\hat{y}_p(k+j)$ 分别表示未来输入与过去输入对未来输出的影响.

定义1. 不确定对象类 Ω 定义为 $\Omega=\{h \mid h_{\min}(i) \leqslant h(i) \leqslant h_{\max}(i), \forall\, i=1,\cdots,N\}$.不确定对象类 Ω 定义了一类常见的SISO不确定对象,其中任一对象所对应的脉冲响应均位于脉冲响应最大值曲线 $\{h_{\max}(i), i=1,\cdots,N\}$ 与最小值曲线 $\{h_{\min}(i), i=1,\cdots,N\}$ 之间.

定义2. 对于某一特定的过程 $\{h(i), i=1,\cdots,N\}$,其模型的总失配 M 定义为

$$M = \sum_{i=1}^{N} |h(i) - \hat{h}(i)|. \tag{4}$$

对于对象类 Ω 的任一过程,由于 $|h(i)-\hat{h}(i)| \leqslant h_{\max}(i)-h_{\min}(i)=\Delta h_{\max}(i)$,因而

$$M \leqslant \sum_{i=1}^{N} \Delta h_{\max}(i) = M_\Omega, \forall\, h \in \Omega, \tag{5}$$

其中 M_Ω 定义为对象类 Ω 的最大总失配.

3 DMC算法的鲁棒稳定条件

DMC算法最初由壳牌石油公司Cutler等人提出[4],其控制目标为寻找未来控制变化序列 $\{\Delta u(k),\cdots,\Delta u(k+m-1)\}$,以使下列目标函数极小化

$$\Phi(k) = \sum_{j=1}^{p} q_j(r(k) - \hat{y}(k+j))^2 + \sum_{i=1}^{m} r_i \Delta u^2(k+i-1). \tag{6}$$

这里 m 为控制步长;p 为预测步长,通常要求 $p>m$;$r(k)$为过程输出的参考设定值;q_j 与 r_i 分别为输出误差与输入变化的加权系数.

DMC 算法假设 $u(k+m+j)=u(k+m-1), j\geqslant 0$,或者 $\Delta u(k+m+j)=0, j\geqslant 0$. 由于本文采用脉冲响应描述过程的不确定性,因而首先基于脉冲响应模型来重述 DMC 算法.

首先定义预测误差序列

$$e(k+j)=r(k)-\hat{y}(k+j)=\hat{e}(k+j)-\hat{y}_f(k+j). \tag{7}$$

这里

$$\hat{e}(k+j)=r(k)-\hat{y}_p(k+j)-\hat{d}(k); \tag{8}$$

而未来输出部分 $\hat{y}_f(k+j)$与控制误差 $e(k+j)$可表示为

$$y_f=Hu,\quad e=\hat{e}-Hu, \tag{9}$$

其中

$$u=\begin{bmatrix}u(k)\\ \vdots\\ u(k+m-1)\end{bmatrix},\quad y_f=\begin{bmatrix}\hat{y}_f(k+1)\\ \vdots\\ y_f(k+p)\end{bmatrix},\quad e=\begin{bmatrix}e(k+1)\\ \vdots\\ e(k+p)\end{bmatrix},\quad e=\begin{bmatrix}e(k+1)\\ \vdots\\ \hat{e}(k+p)\end{bmatrix},$$

H 为模型参数矩阵(其结构参见文[1]).

由于 $\Delta u(k+i-1)=u(k+i-1)-u(k+i-2), \forall\, i\geqslant 1$,令

$$\Delta u=\begin{bmatrix}\Delta u(k)\\ \vdots\\ \Delta u(k+m-1)\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}1 & 0 & & 0\\ -1 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & & -1 & 1\end{bmatrix},$$

则

$$\Delta u=Gu-bu(k-1); \tag{10}$$

令

$$Q=\mathrm{diag}(q_1\ \cdots\ q_p), R=\mathrm{diag}(r_1\ \cdots\ r_m),$$

则　$\Phi(k)=(\hat{e}-Hu)^{\tau}Q(\hat{e}-Hu)+(Gu-bu(k-1))^{\tau}R(Gu-bu(k-1))$,其最小二乘解为 $u=(H^{\tau}QH+G^{\tau}RG)^{-1}(H^{\tau}Q\hat{e}+G^{\tau}Rbu(k-1))$.

由于 DMC 采用滚动优化,只有控制输入 u 的第一项加入被控过程,即

$$u(k)=k_e\hat{e}+k_u u(k-1), \tag{11}$$

其中 $k_e=b^{\tau}(H^{\tau}QH+G^{\tau}RG)^{-1}H^{\tau}Q$,　$k_u=b^{\tau}(H^{\tau}QH+G^{\tau}RG)^{-1}G^{\tau}Rb$,或者

$$u(k)=\sum_{j=1}^{p}k_{ej}\hat{e}(k+j)+k_u u(k-1). \tag{12}$$

将(1～3)式与(8)式代入(12)式,整理后得到

$$u(k)=k_r r(k)+k_u u(k-1)+\sum_{i=1}^{N}k_i u(k-i), \tag{13}$$

其中 $k_r=\sum_{j=1}^{p}k_{ej}$,　$k_i=\sum_{j=1}^{p}k_{ej}[\hat{h}(i)-h(i)-\hat{h}(i+j)]$,　$i=1,\cdots,N$. 因此,闭环系统的特征多项式为

$$f(z)=z^N-k_u z^{N-1}+\sum_{i=1}^{N}k_i z^{N-i}. \tag{14}$$

闭环控制系统稳定的充分必要条件为 $f(z)$的所有零点均在单位圆内. 以下定理提供了一种检验 DMC 控制系统鲁棒稳定性的简便方法.

定理1(DMC 鲁棒稳定性条件). 对于不确定对象类 Ω,某一 DMC 控制器使 Ω 中所有

对象均为闭环鲁棒稳定的充分条件为

$$\sum_{i=1}^{N}\left|\sum_{j=1}^{p}k_{ej}\hat{h}(i+j)\right|+\left|\sum_{j=1}^{p}k_{ej}\right|M_{\Omega}+|k_u|<1. \tag{15}$$

证明. 由(5)式,(15)式意味着

$$\sum_{i=1}^{N}\left|\sum_{j=1}^{p}k_{ej}\hat{h}(i+j)\right|+\left|\sum_{j=1}^{p}k_{ej}\right|M+|k_u|<1.$$

根据(4)式中 M 的定义,并运用三角不等式关系,由上式可得

$$\sum_{i=1}^{N}\left|\sum_{j=1}^{p}k_{ej}(\hat{h}(i+j)+h(i)-\hat{h}(i))\right|+|k_u|<1.$$

由于

$$\left|\sum_{j=1}^{p}k_{ej}(\hat{h}(1+j)+h(1)-\hat{h}(1))-k_u\right|\leqslant$$

$$\left|\sum_{j=1}^{p}k_{ej}(\hat{h}(1+j)+h(1)-\hat{h}(1))\right|+|k_u|,$$

因而

$$\left|\sum_{j=1}^{p}k_{ej}(\hat{h}(1+j)+h(1)-\hat{h}(1))-k_u\right|+$$

$$\sum_{i=2}^{N}\left|\sum_{j=1}^{p}k_{ej}(\hat{h}(i+j)+h(i)-\hat{h}(i))\right|<1.$$

上式意味着 $f(z)$ 的系数满足 Jury 主系数定理[2],因此闭环控制系统是稳定的. 证毕.

定理1可看成是 DMC 算法的小增益定理. 当模型元素 $\hat{h}(i+j)$ 的值增大或者总失配 M_{Ω} 增大时,元素 $k_{ej}(j=1,\cdots,p)$ 与 k_u 必须减少以满足鲁棒稳定条件(15)式. 通过增大输入变化加权 r_i,或减少控制时域 m,或增大预测时域 p,可达到这一目的.

参 考 文 献

1 Garcia C E, Morari M. Internal model control——a unifying review and some new results. *Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev.*, 1982, **21**: 308~323

2 Badgwell T A. Robust stability conditions for SISO model predictive control algorithms. *Automatica*, 1997, **33**(7): 1357~1361

3 席裕庚,厉隽怿. 一类工业过程预测控制的闭环分析. 自动化学报, 1995, **21**(1): 1~7

4 Cutler C R, Ramaker B L. Dynamic matrix control——a computer control algorithm. In: Proc. Joint American Control Conf., San Francisco, 1980, WP5-B

戴连奎 1993年获浙江大学工业自动化专业博士学位,现为浙江大学副教授. 目前主要研究方向为复杂工业过程的建模、预测控制与过程优化.