第27卷　第3期　2001年5月

自　动　化　学　报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 3　May, 2001

短文

再访GI/M/1排队

史定华
（上海大学数学系　上海　200436）

摘　要　通过构造两个向量马氏过程重新探讨了GI/M/1排队，某些新结果如忙期和闲期的联合分布被得到了. 这一方法容易推广到服务时间为无限位相型分布的GI/SPH/1排队.

关键词　排队论，向量马氏过程(VMP)方法，转移频度公式.

REVISITING THE GI/M/1 QUEUE

SHI Ding-Hua
(*Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai*　200436)

Abstract　In this note, by constructing two vector Markov processes, we review the GI/M/1 queue. Some new results, e.g., the joint distribution of busy and idle periods, are obtained. The method can easily be extended to the GI/SPH/1 queue where SPH means the infinite phase type distribution.

Key words　Queueing theory, vector Markov process (VMP) method, transition frequency formula.

1　引言

Cox[1]利用补充变量技巧研究了M/G/1排队，重新得到了著名的Pollaczek-Khinchin公式[2]. 但人们利用补充变量技巧研究GI/M/1排队却不如处理M/G/1排队那样理想. 直到Sengupta[3]在推广Neuts的矩阵几何到矩阵指数一文中才出现了新的突破. 本文是Sengupta思想的发展，其中关于GI/M/1排队的忙期、忙期中服务顾客数和闲期三者的联合分布是新结果.

2　VMP方法

GI/M/1排队的顾客到达间隔独立同一般分布 $F(x)$，假定有风险率函数 $\lambda(x)$，服务为参数 μ 的指数分布. 令 $S(t)$ 表示服务台忙(1)闲(0)过程，服务台忙时，用 $X(t)$ 记正在服务顾客在系统中已逗留的时间；服务台闲时，用 $Yx(t)$ 记到达年龄为 x 时已花去的空闲时间. 则 $\{S(t), X(t), Yx(t)\}$ 形成一个向量马氏过程，典型的样本轨道如图1所示.

收稿日期　1998-12-28　　收修改稿日期　1999-09-27

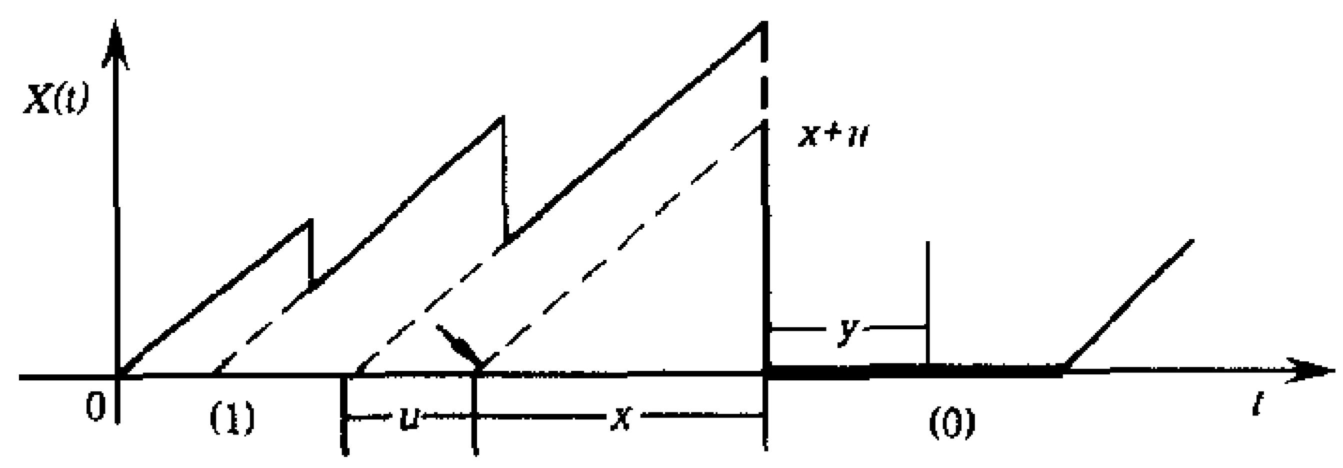

图1 $\{S(t),X(t),Yx(t)\}$的一条可能的样本轨道

定义

$$p_0(t,x,y)\mathrm{d}y = P\{S(t)=0,\ y \leqslant Y_x(t) < y+\mathrm{d}y\},$$

$$p_1(t,x)\mathrm{d}x = P\{S(t)=1,\ x \leqslant X(t) < x+\mathrm{d}x\}.$$

状态概率密度满足的微积分方程、边界条件和初始条件如下：

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}+\lambda(x+y)\right]p_0(t,x,y)=0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}+\mu\right]p_1(t,x)=\int_0^\infty p_1(t,x+u)\mu\mathrm{d}F(u),$$

$$p_0(t,x,0)=p_1(t,x)\overline{F}(x)\mu,\ p_0(t,0,y)=0,$$

$$p_1(t,0)=\delta(t)+\int_0^\infty\int_0^\infty p_0(t,x,y)\lambda(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

$$p_1(0,x)=\delta(x),\quad p_0(0,x,y)=0,$$

其中 $\delta(t)$是著名的 Dirac δ 函数.

用“星号”表示函数的 L 变换，小写“波浪号”表示分布函数的 LS 变换. 关于 t 取 L 变换解微积分方程组得

$$p_0^*(s,x,y)=p_0^*(s,x,0)e^{-sy}\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)}, \tag{1}$$

$$p_1^*(s,x)=p_1^*(s,0)\exp\{-[s+\mu-z(s)\mu]x\}, \tag{2}$$

其中 $z(s)$是方程 $z=\tilde{f}[S+\mu-z\mu]$在单位圆$|z|<1$中的唯一解(Takacs 引理[2]).

定理1. 对 GI/M/1排队，忙循环时间分布的 LS 变换为

$$\tilde{c}(s)=\frac{\tilde{f}(s)-z(s)}{1-z(s)}. \tag{3}$$

当 $\rho=\lambda/\mu<1$时，平均忙循环时间有限且 $\rho<1$是系统稳定的充要条件.

证明. 根据(1),(2)两式和边界条件与初始条件，有

$$p_1^*(s,0)=1+\int_0^\infty\int_0^\infty p_1^*(s,0)e^{-[s+\mu-z(s)\mu]x}\overline{F}(x)\mu e^{-sy}\frac{\overline{F}(x+y)}{\overline{F}(x)}\lambda(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=1+p_1^*(s,0)\mu\int_0^\infty e^{-su}f(u)\int_0^u e^{-[\mu-z(s)\mu]x}\mathrm{d}x\mathrm{d}u=1+p_1^*(s,0)\frac{\tilde{f}(s)-z(s)}{1-z(s)}.$$

因此

$$p_1^*(s,0)=\frac{1-z(s)}{1-\tilde{f}(s)}. \tag{4}$$

显然，忙循环时间序列形成向量马氏过程$\{S(t),X(t),Yx(t)\}$的一个嵌入更新过程. 根据 VMP 方法中的转移频度公式和更新分布公式[4]，立即可得忙循环时间分布的 LS 变换

$$\tilde{c}(s)=\frac{m^*(s)}{1+m^*(s)}=\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty p_0^*(s,x,y)\lambda(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{1+\int_0^\infty\int_0^\infty p_0^*(s,x,y)\lambda(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x}=\frac{\tilde{f}(s)-z(s)}{1-z(s)}.$$

当 $\rho<1$时,$z(0)=\beta<1$,于是平均忙循环时间 $E[C]=-\tilde{c}'(0)=1/[\lambda(1-\beta)]$有限. 由文[5](p. 299),该更新过程正常返(即系统稳定)的充要条件是 $\rho<1$.

定理2. 对 GI/M/1排队,当 $\rho<1$时,顾客在系统中的逗留时间、实等待时间、虚等待时间分布分别为

$$W_s(x)=1-e^{-\mu(1-\beta)x},\quad W_q(x)=1-\beta e^{-\mu(1-\beta)x},\tag{5),(6}$$

$$W(x)=1-\rho e^{-\mu(1-\beta)x}.\tag{7}$$

证明. 约定稳态时删去时间 t,由(2),(4)两式并利用 L'Hospitale 法则,有

$$P\{X\leqslant x,S=1\}=\int_0^x\lim_{s\to 0}sp_1^*(s,u)\mathrm{d}u=\rho[1-e^{-\mu(1-\beta)x}].$$

于是系统忙的概率为 ρ. 从样本轨道图1,一个顾客在系统中逗留时间分布为

$$W_s(x)=P\{W_q+\chi\leqslant x\}=P\{X\leqslant x|S=1\}=1-e^{-\mu(1-\beta)x}.$$

现在令 τ_n 表示第 n 个顾客到达间隔,χ_n 表示第 n 个顾客服务时间,w_n 表示第 n 个顾客等待时间,则 $w_{n+1}=[w_n+\chi_n-\tau_{n+1}]^+$. 假定 $x\geqslant 0$,因 τ_{n+1}和 $w_n+\chi_n$ 相互独立,

$$W_{n+1}(x)=P\{w_{n+1}\leqslant x\}=P\{w_n+\chi_n-\tau_{n+1}\leqslant x\}=$$

$$\int_0^\infty P\{w_n+\chi_n\leqslant x+u|\tau_{n+1}=u\}\mathrm{d}F(u)=\int_0^\infty P\{w_n+\chi_n\leqslant x+u\}\mathrm{d}F(u).$$

再由(5)式和 β 的定义,有

$$W_q(x)=\lim_{n\to\infty}W_{n+1}(x)=\int_0^\infty W_s(x+u)\mathrm{d}F(u)=1-\beta e^{-\mu(1-\beta)x}.$$

因系统空的概率为$1-\rho$,又由于服务时间分布的无记忆性,于是顾客虚等待时间分布为 $W(x)=1-\rho+\rho[1-e^{-\mu(1-\beta)x}]=1-\rho e^{-\mu(1-\beta)x}$.

定理3. 对 GI/M/1排队,当 $\rho<1$时,顾客离去时刻和任意时刻的稳态队长分布是

$$p_n^+=(1-\beta)\beta^n,\quad p_0=1-\rho,p_n=\rho p_{n-1}^+,\quad n=1,2,\cdots.\tag{8),(9}$$

证明. 正在服务顾客离去时留下 n 个顾客,则他在系统逗留期间必须有 n 个顾客到达. 根据更新理论在$[0,x]$中有 n 个顾客到达的概率是 $F^{(n)}(x)-F^{(n+1)}(x)$,于是

$$p_n^+=\int_0^\infty[F^{(n)}(x)-F^{(n+1)}(x)]\mathrm{d}W_s(x)=\beta^n-\beta^{n+1}=(1-\beta)\beta^n.$$

其次,根据定理2,$p=1-\rho$,$\mathrm{d}W_s(x)=\rho^{-1}p_1(x)\mathrm{d}x$. 而当系统忙时,为了保证系统中有 n 个顾客,正在服务顾客在系统逗留期间必须有 $n-1$个顾客到达,于是

$$p_n=\int_0^\infty p_1(x)[F^{(n-1)}(x)-F^{(n)}(x)]\mathrm{d}x=\rho p_{n-1}^+.$$

3　联合分布

本节讨论 GI/M/1排队的忙期、忙期中服务顾客数和闲期三者的联合分布,为此只需

考虑一个忙循环时间. 约定相应的量均冠以“ ^ ”,则$\{\hat{N}(t),\hat{X}(t)\}$形成一个吸收向量马氏过程,其中$\hat{N}(t)$表示$t$时刻服务(包括正在服务)的顾客数. 该过程的状态概率密度满足的微积分方程、边界条件和初始条件如下:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}+\mu\right]\hat{p}_1(t,x)=0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}+\mu\right]\hat{p}_n(t,x)=\int_0^\infty \hat{p}_{n-1}(t,x+u)\mu\mathrm{d}F(u),n=2,3,\cdots,$$

$$\hat{p}_1(t,0)=\delta(t),\hat{p}_n(t,0)=0,\ \hat{p}_1(0,x)=\delta(x),\hat{p}_n(0,x)=0,n=2,3,\cdots.$$

利用 L 和 Z 变换解上述方程组,记$\hat{P}^*(s,x,z)=\sum_{n=1}^\infty \hat{p}_n^*(s,x)z^n$,得

$$\hat{P}^*(s,x,z)=z\exp\{-[s+\mu-\delta(s,z)\mu]x\},\tag{10}$$

其中$\delta(s,z)$为方程$x=z\tilde{f}(s+\mu-x\mu)$在单位圆$|z|<1$中的唯一解(Takacs 引理[2]).

定理4. 对 GI/M/1排队,忙期、忙期中服务顾客数和闲期三者联合分布的 LS 变换和 Z 变换为

$$\tilde{l}(S,\theta,z)=\frac{\mu[z\tilde{f}(\theta)-\delta(s,z)]}{s-\theta+\mu-\delta(s,z)\mu}.\tag{11}$$

证明. 若正在服务顾客在系统中已逗留的时间为x,他服务完成结束忙期并服务了n个顾客(这一事件简记为D_n^x),则闲期等于年龄为x的剩余到达时间,其密度函数为$f_x(y)=f(x+y)\overline{F}(x)$. 根据 VMP 方法中的吸收分布公式[4]有

$$\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}P\{D_n^x\leqslant t\}z^n=\hat{P}^*(s,x,z)\overline{F}(x)\mu,$$

于是

$$\tilde{l}(s,\theta,z)=\int_0^\infty\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}P\{D_n^x\leqslant t\}z^n\int_0^\infty e^{-\theta y}\mathrm{d}P\{I\leqslant y|D_n^x\}\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^\infty\hat{P}^*(s,x,z)\overline{F}(x)\mu\int_0^\infty e^{-\theta y}\frac{f(x+y)}{\overline{F}(x)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\frac{\mu[z\tilde{f}(\theta)-\delta(s,z)]}{s-\theta+\mu-\delta(s,z)\mu}.$$

参 考 文 献

1 Cox D R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. In: Proc. Camb. Phil. Soc., 1955, **51**: 433~441.

2 Cohen J W. The Single Server Queue, Amsterdam: North-Holland, 1982

3 Sengupta B. Markov processes whose steady state distribution is matrix-exponential with an application to the GI/PH/1 queue. Adv. Appl. Prob., 1989, **1**: 159~180

4 史定华. 随机系统的密度演化方法, 北京: 科学出版社, 1999

5 Cinlar E. Introduction to Stochastic Processes, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1975

史定华 教授,博士生导师. 中国运筹学会可靠性学会副理事长、排队论专业委员会副主任. 主要从事系统理论、随机模型、智能算法、生物信息等方面的教学与研究工作. 已发表论文70余篇,著、译作四部. 曾荣获国家教委、部、市多项科技进步奖.