短文

不确定线性系统保代价控制的鲁棒性分析[1)]

薛安克
(杭州电子工业学院自动化系 杭州 310037)
(E-mail: akxue@iipc.zju.edu.cn)
孙优贤
(浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027)

摘 要 研究不确定线性系统保代价控制的鲁棒性分析问题. 提出了不确定线性系统保代价控制鲁棒界概念, 给出了不确定线性系统保代价控制的一种鲁棒性分析方法, 并建立了不确定线性系统的参数可变保代价控制鲁棒界. 针对一类结构不确定线性系统, 进一步给出了保代价控制鲁棒界的一种优化算法, 并用实例加以验证.

关键词 不确定线性系统, 保代价控制, 鲁棒界.

ROBUSTNESS OF GUARANTEED COST CONTROL SYSTEMS WITH UNCERTAINTIES

XUE An-Ke
(*Depatment of Automation, Hangzhou Institute of Electronics Engineering, Hangzhou* 310037)
(E-mail: akxue @ iipc.zju.edu.cn)
SUN You-Xian
(*Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Abstract This paper is concerned with the robustness of guaranteed cost control for uncertain linear systems. The concept of robust bounds for uncertain systems with guaranteed cost control design is proposed. Parameter dependent robust bounds for guaranteed cost control systems with unstructured or structured uncertainties are derived. An optimization problem of improving the robustness of guaranteed cost control systems with structured uncertainty is presented. The corresponding opti-

1) 国家自然科学基金(69874036)、中国博士后科学基金、浙江省自然科学重点基金(ZD9905)和国防电子预研基金(57-1-2-3)资助项目.
收稿日期 1998-08-13 收修改稿日期 2000-02-19

mization technique is also given.

Key words　Uncertain linear system, guaranteed cost control, robust bound.

1　引言

不确定系统控制的同时鲁棒稳定和鲁棒性能问题,在理论和应用两方面都具有十分重要的意义和价值.由于鲁棒线性二次调节器(简称 RLQR)能较好地处理鲁棒稳定和性能问题,近几年来已引起了人们的极大兴趣,并取得了不少研究成果[1].但是,因其一味追求确定目标的最小值,从而导致所得结论过于保守,且破坏了性能鲁棒性.另一方面,由于注意点集中在考虑闭环系统最大鲁棒稳定性问题上,忽视了性能和控制作用的相互关系,因而不可避免地导致了高范数增益问题.例如按文[1]设计的反馈增益最大值是相应的规范 LQ 设计的37倍之多.进而,现有方法都不能有效地(实际上许多方法并未涉及)折衷(trade-off)处理稳定和性能鲁棒性问题.

不确定性系统的保代价控制(Guaranteed Cost Control 简称 GCC)是解决以上所述鲁棒 LQR 缺陷的一种较有效的方法.保代价控制的基本思想是,在保证闭环系统二次稳定的同时,还保证其二次性能指标不超过某一确定上界(guaranteed upper bounds).GCC 概念是 Chang 等人1972年在自适应控制中首次提出的[2].随着鲁棒控制研究的不断深入,鲁棒保代价控制(简称 RGCC)越来越受到人们的重视[3~9].然而,有效的系统分析和综合方法并不多见.理论分析和实例验证都表明,在不确定性范数有界假设条件下,以及利用不等式放大技术而得到的结论往往偏于保守,有的甚至还比较严重.因此,建立不确定性与闭环系统鲁棒保代价控制之间的关系,给出保代价意义下系统不确定性的最大允许范围(本文称其为保代价控制鲁棒界),以及较少保守性的系统分析和设计方法,将是十分必要和有用的.

本文讨论不确定线性系统保代价控制的鲁棒性分析问题.提出不确定系统保代价控制鲁棒界概念,并分别建立结构和非结构不确定性系统的保代价控制鲁棒界.进一步,针对一类结构不确定线性系统,给出一种可通过参数选择来改善保代价控制鲁棒界的优化算法,以减小鲁棒保代价控制系统设计的保守性.最后,以设计实例验证本文方法的有效性.

2　问题描述和基本定义

本文考虑如下不确定线性系统

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A)x(t) + (B_0 + \Delta B)u(t), x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中 $x(t)\in R^n$ 为状态,$u(t)\in R^m$ 为控制输入,A_0和 B_0是已知常阵,ΔA 和 ΔB 是具有适当维数的不确定时变实矩阵.假设具有如下形式

$$(\Delta A\ \Delta B) = DF(t)(E_1\ E_2). \tag{2}$$

这里 $D\in R^{n\times r}$;E_1和 $E_2\in R^{q\times n}$是已知定常阵;$F(t)\in R^{r\times q}$为不确定性函数阵,满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I,\forall\ t$;$x_0$为零均值随机变量,且有 $E\{x_0 x_0^{\mathrm{T}}\}=I$.考虑如下形式的性能指标

$$J = E\{\int_0^{\infty}(x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t))\mathrm{d}t, \tag{3}$$

其中 $Q \geqslant 0, R > 0$.

定义1. 不确定系统(1)称为二次稳定的,如果对任意允许的不确定性 ΔA,存在一个正定对称矩阵 $P>0$,使得

$$(A_0 + \Delta A)^{\mathrm{T}}P + P(A_0 + \Delta A) < 0. \tag{4}$$

进而,不确定系统(1)称为二次可稳定的,如果存在线性状态反馈控制

$$u(t) = Kx(t) \tag{5}$$

使闭环系统

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A + \Delta BK)x(t) \tag{6}$$

是二次稳定的,这里 $A=A_0+B_0K$.

定义2. 线性状态反馈(5)称为不确定系统(1)对应性能指标(3)的具有代价矩阵 $P>0$ 的保代价控制器,如果

$$(A + \Delta A + \Delta BK)^{\mathrm{T}}P + P(A + \Delta A + \Delta BK) + Q + K^{\mathrm{T}}RK < 0 \tag{7}$$

对所有允许的不确定性 ΔA 和 ΔB 都成立. 此时不确定性闭环系统(6)称为鲁棒保代价的. 满足式(7)的正定对称阵 P 称为二次保代价矩阵,这里 $A=A_0+B_0K$.

定理1[9]. 对给定的系统(1)和性能指标(3),假如存在正定对称矩阵 $P>0$满足式(7),则不确定系统(1)是二次可稳定的,且由状态反馈控制(5)所构成的闭环系统性能指标满足

$$J \leqslant E(x_0^{\mathrm{T}}Px_0) = \mathrm{tr}(P). \tag{8}$$

定理2[6]. 对于给定的不确定系统(1)和性能指标(3),存在线性状态反馈控制器(5),使得不确定性闭环系统(6)是鲁棒保代价的充分必要条件是,存在适当正数 $\varepsilon>0$,使得 Riccati 不等式

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + \varepsilon PDD^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\varepsilon}E^{\mathrm{T}}E + Q + K^{\mathrm{T}}RK < 0 \tag{9}$$

具有正定解 $P>0$,这里 $A=A_0+B_0K, E=E_1+E_2K$. 进一步,鲁棒保代价闭环控制系统的性能指标满足 $J\leqslant \mathrm{tr}(P)$.

定理3. [9]如果存在常数 $\varepsilon>0$,使 Riccati 方程

$$A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 + \varepsilon PDD^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\varepsilon}E_1^{\mathrm{T}}E_1 + Q -$$
$$\left(B_0^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\varepsilon}E_2^{\mathrm{T}}E_1\right)^{\mathrm{T}}\left(R + \frac{1}{\varepsilon}E_2^{\mathrm{T}}E_2\right)^{-1}\left(B_0^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\varepsilon}E_2^{\mathrm{T}}E_1\right) = 0 \tag{10}$$

有正定解 $P>0$,则

$$u(t) = Kx(t) = -\left(R + \frac{1}{\varepsilon}E_2^{\mathrm{T}}E_2\right)^{-1}\left(B_0^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\varepsilon}E_2^{\mathrm{T}}E_1\right)x(t) \tag{11}$$

为不确定系统(1)具有二次代价矩阵 P 的鲁棒保代价控制器. 同时,性能指标(3)满足 $J\leqslant \mathrm{tr}(P)$.

以上鲁棒保代价控制系统设计问题,可视作等式或不等式约束下的寻找使代价函数最小的优化问题. 文[9]已给出了有关结论,并证明了在一定条件下鲁棒保代价控制器(11)还是最优的. 由于假设不确定性范数有界,以及采用矩阵不等式放大等技术,所以目

前已有的不确定系统保代价控制设计方法，存在一定保守性是显而易见的. 本文分析保守性问题，并给出一种保代价控制系统鲁棒性的度量方法.

3　保代价控制系统的鲁棒界

本节讨论保代价控制系统鲁棒性分析问题，给出结构和非结构不确定系统的保代价控制最大鲁棒界，以及可行的求解算法.

定理4. 对给定的不确定系统(1)和性能指标(3)，如果存在线性状态反馈(5)，对任意非结构不确定性 ΔA 和 ΔB 都有

$$\sigma_{\max}^2(\Delta A) + \sigma_{\max}^2(\Delta BK) < \sigma_{\min}\left(-\frac{\varepsilon}{2}(A^{\mathrm{T}}P + PA + Q + K^{\mathrm{T}}RK + \varepsilon P^2)\right), \quad (12)$$

则不确定性闭环系统(6)是鲁棒保代价的，式(12)为其保代价控制鲁棒界. 式中 $\varepsilon>0$为待定系数，$A=A_0+B_0K$，$\sigma_{\max}(X)$和 $\sigma_{\min}(X)$分别表示矩阵 X 的最大和最小奇异值，$P>0$是二次保代价矩阵.

证明. 由定义2可知

$$(\Delta A + \Delta BK)^{\mathrm{T}}P + P(\Delta A + \Delta BK) < -(A^{\mathrm{T}}P + PA + Q + K^{\mathrm{T}}RK). \quad (13)$$

应用矩阵基本不等式，可得

$$(\Delta A + \Delta BK)^{\mathrm{T}}P + P(\Delta A + \Delta BK) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}(\Delta A + \Delta BK)^{\mathrm{T}}(\Delta A + \Delta BK) + \varepsilon P^2, \quad (14)$$

其中 $\varepsilon>0$为任意标量. 由此不难得出式(13)成立的一个充分条件是

$$\Delta A^{\mathrm{T}}\Delta A + (\Delta BK)^{\mathrm{T}}(\Delta BK) < -\frac{\varepsilon}{2}(A^{\mathrm{T}}P + PA + Q + K^{\mathrm{T}}RK + \varepsilon P^2). \quad (15)$$

根据 Hermite 矩阵性质可知，式(15)成立当且仅当

$$\lambda(M) = \lambda(\Delta A^{\mathrm{T}}\Delta A + (\Delta BK)^{\mathrm{T}}(\Delta BK) + \frac{\varepsilon}{2}(A^{\mathrm{T}}P + PA + Q + K^{\mathrm{T}}RK + \varepsilon P^2)) < 0. \quad (16)$$

由于

$$\lambda(M) \leqslant \sigma_{\max}^2(\Delta A) + \sigma_{\max}^2(\Delta BK) - \lambda_{\min}\left(-\frac{\varepsilon}{2}(A^{\mathrm{T}}P + PA + Q + K^{\mathrm{T}}RK + \varepsilon P^2)\right), \quad (17)$$

因此，由式(15)～(17)即可证明定理.　　证毕.

如果非结构不确定性 ΔA 和 ΔB 满足有界条件，即

$$\|\Delta A\| \leqslant \gamma_A, \|\Delta B\| \leqslant \gamma_B, \quad (18)$$

其中 γ_A 和 γ_B 为正常数. 则有以下结论.

定理5. 对给定的系统(1)和性能指标(3)，如果 γ_A 和 γ_B 满足

$$\gamma_A^2 + \gamma_B^2 < \frac{\sigma_{\min}^2(-(A^{\mathrm{T}}P + PA + K^{\mathrm{T}}RK + Q))}{4(1 + \|K\|_2^2)\|P\|_2^2}, \quad (19)$$

则不确定性闭环系统(6)是鲁棒保代价的，式(19)中 $P>0$为二次保代价矩阵，$A=A_0+B_0K$.

证明. 假设 $P>0$是对应于不确定系统(1)和性能指标(3)的二次保代价矩阵. 对所有

$x(t)\neq 0$,不等式(7)等价于

$$2x^{\mathrm{T}}(t)P(\Delta A+\Delta BK)x(t)<-x^{\mathrm{T}}(t)(A^{\mathrm{T}}P+PA+Q+K^{\mathrm{T}}RK)x(t). \tag{20}$$

注意到

$$|x^{\mathrm{T}}(t)P(\Delta A+\Delta BK)x(t)|\leqslant\|x^{\mathrm{T}}(t)\|_2^2(\|\Delta A\|_2\|P\|_2+\|\Delta B\|_2\|K\|_2\|P\|_2)\leqslant\|x^{\mathrm{T}}(t)\|_2^2\|(\gamma_A\|P\|_2+\gamma_B\|K\|_2\|P\|_2), \tag{21}$$

所以式(20)成立,只要

$$\gamma_A\|P\|_2+\gamma_B\|K\|_2\|P\|_2<1/2\sigma_{\min}[-(A^{\mathrm{T}}P+PA+Q+K^{\mathrm{T}}RK)] \tag{22}$$

适当变形后,再注意到以下事实

$$\left\|(\gamma_A\quad\gamma_B)\begin{pmatrix}\|P\|_2\\ \|K\|_2\|P\|_2\end{pmatrix}\right\|_2\leqslant\|(\gamma_A\,\gamma_B)\|_2\left\|\begin{pmatrix}\|P\|_2\\ \|K\|_2\|P\|_2\end{pmatrix}\right\|_2, \tag{23}$$

即可证得本定理. 证毕.

下面对一类具有如下形式

$$\Delta A=\sum_{i=1}^{l_A}k_{Ai}A_i,\ \Delta B=\sum_{i=1}^{l_B}k_{Bi}B_i \tag{24}$$

的参数不确定性系统,给出其保代价控制鲁棒界,其中 k_{Ai} 和 k_{Bi} 是不确定实参数,A_i 和 B_i 是给定的实常结构矩阵.

定理6. 对给定的不确定系统(1)和性能指标(3),如果存在常数 $\varepsilon>0$ 和线性状态反馈控制器(5),对式(1)中满足式(24)的任意不确定性 ΔA 和 ΔB 有

$$\sum_{i=1}^{l_A}k_{Ai}^2\cdot\sum_{i=1}^{l_A}\sigma_{\max}^2(A_i)+\sum_{i=1}^{l_B}k_{Bi}^2\cdot\sum_{i=1}^{l_B}\sigma_{\max}^2(B_iK)<\sigma_{\min}\left(-\frac{\varepsilon}{2}(A^{\mathrm{T}}P+PA+Q+K^{\mathrm{T}}RK+\varepsilon P^2)\right), \tag{25}$$

则不确定性闭环系统(6)是鲁棒保代价的,式(25)为其保代价控制鲁棒界,式中 $P>0$ 是二次保代价矩阵,$A=A_0+B_0K$.

显然,定理6不难从定理4推得. 下面给出增加保代价控制系统鲁棒性的一个优化命题. 令 $S_A=\sum_{i=1}^{l_A}\sigma_{\max}^2(A_i)$,$S_B=\sum_{i=1}^{l_B}\sigma_{\max}^2(B_iK)$,

记
$$\alpha=(k_{A1}^2\cdots,k_{Al_A}^2k_{B1}^2\cdots k_{Bl_B}^2),\ \beta=(\overbrace{S_A\cdots S_A}^{l_A}\overbrace{S_B\cdots S_B}^{l_B})^{\mathrm{T}}.$$

类似定理5证明中的处理方法,可以推得改进保代价控制系统鲁棒性的优化命题为

$$\sum_{i=1}^{l_A}k_{Ai}^4+\sum_{i=1}^{l_B}k_{Bi}^4=\underset{\varepsilon,K,Q,R}{\mathrm{SUP}}\frac{\sigma_{\min}^2\left(-\frac{\varepsilon}{2}(A^{\mathrm{T}}P+PA+Q+K^{\mathrm{T}}RK+\varepsilon P^2)\right)}{l_A\cdot\left(\sum_{i=1}^{l_A}\sigma_{\max}^2(A_i)\right)^2+l_B\cdot\left(\sum_{i=1}^{l_B}\sigma_{\max}^2(B_iK)\right)^2}. \tag{26}$$

若记 $\bar{J}=A^{\mathrm{T}}P+PA+Q+K^{\mathrm{T}}RK+\varepsilon P^2$,由定理2可知 $\bar{J}<-\varepsilon P(DD^{\mathrm{T}}-I)P-\frac{1}{\varepsilon}E^{\mathrm{T}}E$. 只要 $DD^{\mathrm{T}}-I\geqslant 0$(在对不确定性进行分解时,此条件非常容易保证),则有 $\bar{J}<0$. 再应用有界实引理[6],$\bar{J}<0$ 有正定解 $P>0$ 的一个等价条件是 $A=A_0+B_0K$ 稳定,且满足 H_∞ 范数条件

$$\left\|\begin{pmatrix}R^{1/2}K\\ Q^{1/2}\end{pmatrix}(sI-A)^{-1}\sqrt{\varepsilon}I\right\|_\infty<1. \tag{27}$$

式(27)表明，使 $\bar{J}<0$ 有正定解 $P>0$ 的 $\varepsilon>0$ 属于区间 $(0,\varepsilon_{max})$，其中 ε_{max} 可由式(27)求得. 由此可得确定优化命题(26)中常数 ε 的一种有效方法. 该方法同样适合于鲁棒保代价控制器的设计.

下面是一种可行的求解保代价控制系统最大鲁棒界的步骤：

第一步. 根据鲁棒保代价控制器设计方法，求取保代价控制矩阵 K；

第二步. 利用式(27)求得常数 $\varepsilon>0$ 存在的范围；

第三步. 求解优化问题(26)，确定有关参数和加权矩阵；

第四步. 由定理6和式(26)得到保代价控制系统最大鲁棒界.

4　应用实例

例1[10]. L-1011飞行器的横向轴动态不确定系统

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-2.98 & 0.93+k & 0 & -0.034\\ -0.99 & -0.21 & 0.035 & -0.0011\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0.39 & -5.555 & 0 & -1.89\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}-0.032\\ 0\\ 0\\ -1.6\end{bmatrix}u(t),$$

其中参数 k 表示侧滑角动态不确定性，满足 $|k|\leqslant 1.5$. 性能指标取为

$$J=E\left\{\int_0^{\infty}\left[x_1^2(t)+x_2^2(t)+x_3^2(t)+x_4^2(t)+u^2(t)\right]\mathrm{d}t\right\}.$$

假设 $\Delta A=D\gamma(t)E$，其中 $\gamma(t)$ 满足 $|\gamma(t)|\leqslant 1$. 文[6]给出了保代价控制矩阵 $K=(0\ \ 0\ \ 1.5004\ \ 1.6343)$，最优性能为 $J_{min}=\mathrm{tr}(P)=75.68$. 利用本文所给方法，可得到以上保代价控制系统的不确定性鲁棒界为 $|\gamma(t)|\leqslant 0.9129$. 由此可见本文方法的有效性. 进一步，通过求解优化命题(28)，可得到优化参数为，$Q=\mathrm{diag}(9\ 4\ 4\ 7)$ 和 $R=1.5$，对应的不确定性 $\gamma(t)$ 的保代价控制最大鲁棒界为 $|\gamma(t)|\leqslant 1.2824$，从而可得原系统不确定性参数 k 的保代价控制鲁棒界为 $|k|\leqslant 1.9236$.

5　结束语

不确定性系统的同时稳定和性能鲁棒，是实际工程应用中迫切需要解决的关键问题. 不确定系统的鲁棒保代价控制，为此提供了一条可能的途径. 但由于受不确定性范数有界等假设条件的约束，以及采用矩阵不等式放大技术，所设计的鲁棒保代价控制系统存在一定的保守性. 本文给出的保代价控制鲁棒界，为鲁棒保代价控制系统的分析和综合提供了一种有效方法. 尤其是不确定性系统保代价控制鲁棒界概念，对保代价控制系统鲁棒性分析具有普遍的指导意义. 由于可以通过选择适当性能指标加权阵和求解最优反馈阵等手段来优化鲁棒界，从而可改善保代价控制系统的鲁棒性能.

参考文献

1　Douglas J, Athans M. Robust linear quadratic designs with real parameter uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **AC-39**(1): 107～111

2　Chang S S L, Peng T K C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters. *IEEE Trans.*

Autom. Control, 1972, **AC-17**(4): 474～483
3 Petersen I R. Optimal guaranteed cost control of uncertain linear system. In: Proc. ACC, USA, 1992. 2929～2930
4 Petersen I R. Guaranteed cost LQG control of uncertain linear systems. *IEEE proc*, *Part D*, 1995, **142**: 95～102
5 Kienitz K H. Guaranteed cost stabilization for a class of uncertain discrete time systems. *Int. J. Control*, 1995, **26**(3): 555～561
6 Moheimani S O R, Petersen I R. Optimal guaranteed cost control of uncertain systems via static and dynamic output feedback. *Automatica*, 1996, **32**(4): 575～579
7 Kosmidou O I. Robust stability and performance of systems with structured and bounded uncertainties: an extension of the guaranteed cost control approach. *Int. J. Control*, 1990, **52**(3): 627～640
8 Petersen I R, McFarlane D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **39**(9): 1971～1977
9 薛安克. 不确定线性系统鲁棒二次最优控制理论及应用研究[学位论文]. 杭州: 浙江大学工业控制技术研究所, 1997
10 Andry A N, Chung J C, Shapiro E Y. Modalized observers. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1984, **29**: 669～672

薛安克 1957年生，教授. 1982年获山东大学数学系控制理论专业理学士学位，1986年获东北重型机械学院工业自动化专业工学硕士学位，1997年获浙江大学工业自动化专业工学博士学位，1998年至2000年在浙江大学工业控制技术研究所从事博士后研究工作. 目前主要研究领域为鲁棒和最优控制、智能控制等理论及其在工业生产过程中的应用.

孙优贤 1940年生，教授，博士生导师，中国工程院院士，现任浙江大学控制工程科学研究院院长. 1984年至1987年获德国洪堡奖学金. 长期从事过程控制、造纸过程模型化和计算机控制. 发表论文300多篇，著作10余部，获各类科技进步奖20多项. 目前主要研究领域为鲁棒控制和 H_∞ 控制以及容错控制等理论及应用.