第 27 卷 第 5 期
2001 年 9 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 5
Sept., 2001

短文

具有多个非线性项的一般 Lurie 间接系统的绝对稳定性[1)]

甘作新[1]　葛渭高[2]　韩京清[1]

[1](中国科学院数学与系统科学研究院系统所　北京　100080)

[2](北京理工大学应用数学系　北京　100081)

(E-mail: zxgan@263.net)

摘　要　为了研究具有多个非线性项的一般 Lurie 间接系统的绝对稳定性问题，介绍了关于变元 σ 绝对稳定的概念. 通过对关于变元 σ 绝对稳定性的研究，得到了此类系统绝对稳定的充要条件，并给出了一些简洁实用的充分条件.

关键词　一般 Lurie 间接系统，绝对稳定性，Lyapunov 函数.

ABSOLUTE STABILITY OF GENERAL LURIE INDIRECT CONTROL SYSTEMS WITH MULTIPLE NONLINEARITIES

GAN Zuo-Xin[1]　GE Wei-Gao[2]　HAN Jing-Qing[1]

[1](*Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

[2](*Department of Applied Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081)

(E-mail: zxgan@263.net)

Abstract　In order to investigate the problem of absolute stability for general Lurie indirect systems with multiple nonlinearities, this paper introduces the concept of absolute stability about the variable σ. By study of absolute stability about the variable σ, necessary and sufficient conditions of absolute stability for Lurie systems are obtained, and some sufficient conditions are acquired.

Key words　General Lurie indirect systems, absolute stability, Lyapunov function.

1　引言

绝对稳定性问题是控制理论和工程应用上的中心课题之一. 迄今为止，许多学者都研

1) 国家自然科学基金资助(19871005).

收稿日期　1999-10-29　　收修改稿日期　2000-11-03

究了这个问题[1~5]，并得到了绝对稳定的许多充分条件和在特殊情况下的充要条件. 在文献[3,4]中廖晓昕教授用部分变元法得到了绝对稳定的充要条件. 但是对具有多个非线性项的一般 Lurie 间接系统的绝对稳定性进行研究的文章却较少. 本文通过关于变元 $\boldsymbol{\sigma}$ 绝对稳定的概念,获得了此类 Lurie 系统绝对稳定的充要条件以及一些充分条件.

2　主要结果

考虑具有多个非线性反馈的一般 Lurie 控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{\xi},\quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}),\quad \boldsymbol{\sigma} = C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma}) + H\boldsymbol{\xi}, \tag{1}$$

这里 $A\in R^{n\times n}$, $\mathrm{Re}\lambda(A)\leqslant 0$, $\boldsymbol{x}\in R^n$, $B,C\in R^{n\times m}$, $D,H\in R^{m\times m}$, $\xi\in R_m$, $D\geqslant 0$(即半正定的), H 是负定矩阵, $\boldsymbol{\sigma}=\mathrm{col}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})=\mathrm{col}(f_1(\sigma_1),\ f_2(\sigma_2),\cdots,f_m(\sigma_m))$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})\in K[0,+\infty)$, $K[0,+\infty)=\{\boldsymbol{f}:\ \boldsymbol{f}(0)=0,\ \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})>0,\ \boldsymbol{\sigma}\neq 0;\ \boldsymbol{f}(\cdot)\in C(R^m)\}$,若 $D=0$, 系统(1)即是 Lurie 类型间接控制系统.

注 1. 记式(1)的任意解 $\boldsymbol{y}=\mathrm{col}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}})$的范数为 $\|\boldsymbol{y}\|=(\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+\|\boldsymbol{\xi}(t)\|^2)^{1/2}$.

定义 1. 系统(1)的平凡解关于变元 $\boldsymbol{\sigma}$ 绝对稳定:若对$\forall\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})\in K[0,+\infty)$,且$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$ 使得当初始值 $\|\boldsymbol{y}(t_0)\|<\delta(\varepsilon)$时,系统(1)的解 $\boldsymbol{y}(t,t_0,x_0)$对任意 $t\geqslant t_0$, 满足 $\|\boldsymbol{\sigma}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)\|<\varepsilon$, 且$\forall\tilde{\boldsymbol{y}}_0\in R^{n+m}$, 有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{\sigma}(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)=0$. 其中 $\boldsymbol{y}_0=\mathrm{col}(x_1(t_0),x_2(t_0),\cdots,x_n(t_0),\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t_0))$.

定理 1. 系统(1)的平凡解关于变元 $\boldsymbol{y}$ 绝对稳定的充要条件是

1) 系统(1)的平凡解关于变元 $\boldsymbol{\sigma}$ 绝对稳定;

2) 矩阵 $P=\begin{bmatrix} A & B \\ (I+D)^{-1}C^{\mathrm{T}} & (I+D)^{-1}H \end{bmatrix}$稳定.

注 2. 若 $D\neq 0$, 对一般 Lurie 类型的间接控制系统, 变元 $\boldsymbol{\sigma}$ 不能化为部分变元. 这里, 讨论了关于变元 $\boldsymbol{\sigma}$ 绝对稳定和关于变元 $\boldsymbol{y}$ 绝对稳定的关系.

证明. 必要性. 由 $\boldsymbol{\sigma}=C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})+H\boldsymbol{\xi}$, 得 $\boldsymbol{\sigma}+D\boldsymbol{f}(\sigma)=C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+H\boldsymbol{\xi}$, 因 $D\geqslant 0$ 且 $\boldsymbol{f}(\sigma)\in K[0,+\infty)$, 即 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})$同号($\boldsymbol{\sigma}\neq 0$), 故 $\|\boldsymbol{\sigma}\|\leqslant\|\boldsymbol{\sigma}+D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})\|=\|C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+H\boldsymbol{\xi}\|$.

令 $R_1=\|C\|$, $R_2=\|H\|$, $M=\max[R_1,R_2]$. 由已知条件, 系统(1)的平凡解绝对稳定, 即对$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta(\varepsilon)>0$, 使得, 当 $\|\boldsymbol{y}_0\|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i0}^2+\|\xi_0\|^2<\delta^2$ 时, $\|\boldsymbol{y}\|=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\|\boldsymbol{\xi}\|^2<\dfrac{\varepsilon^2}{2M^2}$,于是, $\|\boldsymbol{\sigma}\|\leqslant M(\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{\xi}\|)\leqslant M\sqrt{2(\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{\xi}\|^2)}<\sqrt{2}M\|\boldsymbol{y}\|=\varepsilon$, 故系统(1)的平凡解关于变元 $\boldsymbol{\sigma}$ 稳定.

又因为对$\forall\boldsymbol{x}_0\in R^n$, $\xi_0\in R^m$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{x}(t,t_0,x_0)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\boldsymbol{\xi}(t,t_0,\boldsymbol{\xi}_0)=0$; 故 $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{\sigma}\|\leqslant\lim\limits_{t\to+\infty}\|C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\|+\lim\limits_{t\to+\infty}\|H\|\cdot\|\boldsymbol{\xi}\|=0$. 故系统(1)的平凡解关于变元 $\boldsymbol{\sigma}$ 绝对稳定.

在系统(1)中令 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})=\boldsymbol{\sigma}$, 则(1)可变换为线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{\xi},\quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = (I+D)^{-1}C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + (I+D)^{-1}H\boldsymbol{\xi}. \tag{2}$$

因为系统(1)是绝对稳定的, 系统(2)的系数矩阵 P 是稳定的. 必要性得证.

充分性. 系统(1)能化为其等价系统

$$\dot{x} = Ax + B\xi, \quad \dot{\xi} = (I + D)^{-1}[C^{\mathrm{T}}x + H\xi + f(\sigma) - \sigma]. \tag{3}$$

记 $B^* = \begin{pmatrix} 0_{n\times m} \\ (I+D)^{-1} \end{pmatrix}$，$\| B^* \| = N$. 由常数变易公式，系统(3)的任意解为

$$y(t) = e^{P(t-t_0)}y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{P(t-\tau)}B^*[f(\sigma) - \sigma]\mathrm{d}\tau. \tag{4}$$

因 P 稳定，故存在常数 $\alpha>0$，$L>0$，使得 $\mathrm{Re}\lambda(P)<-\alpha<0$，且对任意 $t\geqslant t_0$，$\| e^{P(t-t_0)} \| \leqslant Le^{-\alpha(t-t_0)}$，由于 $f(\sigma)\in K[0,+\infty)$，可知 $f(\sigma)-\sigma$ 连续. 由连续性定义，对 $\forall\, \varepsilon>0$，$\exists\, \delta_1(\varepsilon)>0$，使得当 $\| \sigma \| <\delta_1$ 时，$\| f(\sigma) \| <\frac{\alpha\varepsilon}{2LN}$. 又因为系统(1)关于变元 σ 绝对稳定，故对 $\delta_1>0$，$\exists\, \delta>0$，使得式(1)的解 y 满足，当 $\| y_0 \| <\delta$ 时，$\| \sigma \| <\delta_1$. 因此

$$\left\| \int_{t_0}^{t} Le^{\alpha(t-\tau)}B^*[f(\sigma) - \sigma]\mathrm{d}\tau \right\| \leqslant N \cdot \frac{\alpha\varepsilon}{2LN} \cdot L \cdot \frac{e^{\alpha t} - e^{\alpha t_0}}{e^{\alpha t}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

对上述 ε，当 $\| y(t_0) \| <\frac{\varepsilon}{2L}$时，$Le^{-\alpha(t-t_0)} \| y(t_0) \| <\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $\delta_2=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2L},\delta\right\}$，当 $\| y(t_0) \| < \delta_2$ 时，$\| y \| \leqslant \| e^{P(t-t_0)}x(t_0) \| + \left\| \int_{t_0}^{t} Le^{P(t-\tau)}B^*[f(\sigma)-\sigma]\mathrm{d}\tau \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 故，系统(1)的平凡解是稳定的.

因为 $\mathrm{Re}\lambda(P)<0$，故式(4)右方第一项当 $t\to+\infty$时，已经趋于 0. 因此只需讨论第二项 $\int_{t_0}^{t} e^{P(t-\tau)}B^*[f(\sigma)-\sigma]\mathrm{d}\tau$. 又由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}\sigma=0$，$f(0)=0$，且 $f(\sigma)-\sigma$ 连续，故 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(\sigma)-\sigma=0$，进而 $\lim\limits_{t\to+\infty} \| f(\sigma)-\sigma \| =0$，$\left\| \int_{t_0}^{t} e^{P(t-\tau)}B^*[f(\sigma)-\sigma]\mathrm{d}\tau \right\| \leqslant LN\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} \| f(\sigma)-\sigma \| \mathrm{d}\tau$. 又

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} \| f(\sigma) - \sigma \| \mathrm{d}\tau = \frac{\int_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau} \| f(\sigma) - \sigma \| \mathrm{d}\tau}{e^{\alpha t}}. \tag{5}$$

若式(5)分子有界，则当 $t\to+\infty$时，式(5)为 0；否则，若式(5)分子无界，则由 L'Hospital 法则，对分子分母同时求导，得到

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{\alpha t} \| f(\sigma) - \sigma \|}{\alpha e^{\alpha t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\| f(\sigma) - \sigma \|}{\alpha} = 0.$$

由此可得 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=0$. 故系统(1)的平凡解是绝对稳定的. 证毕.

假设 $\eta=C^{\mathrm{T}}x+H\xi$，则有下面定理：

定理 2. 系统(1)的平凡解关于变元 y 绝对稳定的充要条件是

1) 系统(1)的平凡解关于变元 η 绝对稳定；

2) 矩阵 $P=\begin{bmatrix} A & B \\ (I+D)^{-1}C^{\mathrm{T}} & (I+D)^{-1}H \end{bmatrix}$稳定.

注 3. 讨论了关于变元 η 绝对稳定和关于变元 y 绝对稳定的关系. 其优点是 η 可化为部分变元.

证明. 等式 $\eta=C^{\mathrm{T}}x+H\xi$ 暗含 $\| \eta \| \leqslant \| C^{\mathrm{T}}x \| + \| H\xi \|$，余下的必要性的证明与定理 1 的必要性的证明相似. 证明充分性：

由 $\sigma=C^{\mathrm{T}}x-Df(\sigma)+H\xi$，$\eta=C^{\mathrm{T}}x+H\xi$，可得 $\eta=\sigma+Df(\sigma)$，又因为 D 正定，故 $\| \sigma \| \leqslant \| \sigma+Df(\sigma) \| = \| \eta \|$. 由定理 2 的条件 1)可推出定理 1 的条件 1). 再由定理 1 充分性的证明，可知系统(1)的平凡解绝对稳定. 证毕.

注 4. 定理 1,2 给出了系统(1)关于变元 $\boldsymbol{y}$ 绝对稳定的两个充要条件，由于变元 $\boldsymbol{x}$ 是变元 $\boldsymbol{y}$ 的部分变元，因此利用关于变元 $\boldsymbol{\sigma}$ 和关于变元 η 绝对稳定的概念，给出了系统(1)关于变元 $\boldsymbol{x}$ 绝对稳定的充分条件.

再给出系统(1)关于变元 $\boldsymbol{\sigma}$ 绝对稳定的两个充分条件：

命题 1. 假定下面条件满足：

1) 矩阵 H 负定；

2) 矩阵 $\begin{bmatrix} CC^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}CC^{\mathrm{T}} & A^{\mathrm{T}}CH+CC^{\mathrm{T}}B \\ HC^{\mathrm{T}}A+B^{\mathrm{T}}CC^{\mathrm{T}} & HC^{\mathrm{T}}B+B^{\mathrm{T}}CH \end{bmatrix}$ 半负定.

则系统(1)的平凡解关于变元 $\boldsymbol{\sigma}$ 绝对稳定.

取 Lyapunov 函数为 $V(\boldsymbol{\sigma})=[\boldsymbol{\sigma}+D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\sigma}+D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})]$，可证明此命题.

命题 2. 假定存在一个半正定矩阵 $Q_{(n+m)\times(n+m)}=\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix}$ 和一个正数 ε，使得矩阵

$$R=\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P+PA & PB & \frac{1}{2}A^{\mathrm{T}}C \\ B^{\mathrm{T}}P & 0 & P_1+\frac{1}{2}B^{\mathrm{T}}C \\ \frac{1}{2}C^{\mathrm{T}}A & P_1+\frac{1}{2}C^{\mathrm{T}}B & H+\varepsilon I \end{bmatrix}$$

是半负定的；则系统(1)的平凡解关于变元 $\boldsymbol{\sigma}$ 是绝对稳定的.

这里 Lyapunov 函数取为 $V(\boldsymbol{\sigma})=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} Q \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{m}\int_0^{\sigma_i} f_i(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma})D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\sigma})$.

3 结论

本文针对具有多个非线性项的一般 Lurie 间接系统的绝对稳定性问题，用关于变元 $\boldsymbol{\sigma}$ 绝对稳定的概念，给出了此类系统绝对稳定的充要条件. 同时又用 Lyapunov 函数方法，得到了绝对稳定的几个简洁实用的充分性判定准则.

参 考 文 献

1 Popov V M. Hyperstability of Control Systems. New York: Springer Verlag, 1973. 240～263

2 谢惠民. 绝对稳定性理论及应用. 北京：科学出版社，1986. 241～255

3 Liao X X. Absolute stability of general Lurie control systems. *Acta Mathematia Scientia*, 1991, **11**(1):1～12

4 Liao X X. New criterion for absolute stability of general Lurie control systems. *Acta. Mathematia*, 1990, **30**(6):841～852

5 甘作新，仵永先. 一般 Lurie 型直接控制系统的绝对稳定性. 见：第五届常微分方程理论及其应用学术会议论文集：秦元勋等，大连：大连海事大学出版社，1996. 338～340

甘作新 男，1970 年生，博士生，2000 年于北京理工大学获得博士学位，现在中国科学院系统所做博士后研究工作. 主要研究领域为非线性控制系统稳定性及自抗扰控制器理论分析.

葛渭高 男，1943 年生，博士生导师，现为北京理工大学应用数学系教授. 研究领域为微分方程理论及应用.

韩京清 男，1937 年生，博士生导师，中国科学院数学与系统科学院研究员. 研究方向为控制系统的非线性设计方法及应用.