

移动机器人的全局轨迹跟踪控制¹⁾

吴卫国 陈辉堂 王月娟

(同济大学电气工程系 上海 200092)

摘 要 考察了移动机器人的轨迹跟踪问题, 针对以前沿袭线性化的思路设计的控制律带来的局部稳定特性, 基于后退(backstepping)方法的思想设计了具有全局渐近稳定的跟踪控制器. 该方法将系统分解为低阶子系统来处理, 利用中间虚拟控制量和部分 Lyapunov 函数简化了控制器的设计并具有直观的稳定性分析. 仿真结果验证了所设计控制器的有效性.

关键词 移动机器人, 轨迹跟踪, 后退方法, 全局稳定.

GLOBAL TRAJECTORY TRACKING CONTROL OF MOBILE ROBOTS

WU Wei-Guo CHEN Hui-Tang WANG Yue-Juan

(Dept. of Electrical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092)

Abstract This paper concerns trajectory tracking control of mobile robots. In order to overcome the local stability resulted from linearization design methods, a global asymptotically stable (GAS) controller is designed using backstepping method. This method breaks down nonlinear systems into low dimensional systems and simplifies the controller design using virtual control inputs and partial Lyapunov functions. The stability of the system is easily proven via the Lyapunov function. Abundant simulation results validate the theoretical analysis.

Key words Mobile robots, trajectory tracking, backstepping method, GAS.

1 引言

由于存在非完整约束, 使得移动机器人的控制具有挑战性. 移动机器人控制主要包括跟踪控制和点镇定控制. 由于移动机器人不满足 Brockett 光滑镇定的必要条件^[1], 因此对于点镇定人们只能寻求不连续控制律、时变控制律或混合控制律^[2]. 之所以将跟踪控制和镇定控制独立考虑, 是因为在跟踪控制时, 要求移动机器人的速度不能为零, 即移动机器人始终处于运动过程中^[3,4]. Kanayama 等^[5]利用 Lyapunov 函数设计出轨迹跟踪控制律,

1) 国家自然科学基金和上海市自然科学基金资助课题.

但只有其线性化系统在该控制律下具有渐近稳定性. Walsh 等^[6]对系统在期望轨迹附近处 Taylor 线性化,对得到的线性时变系统设计控制律,从而实现原系统的局部跟踪.为获得全局跟踪特性,动态线性化方法用以得到具有指数收敛的控制器^[7,8].

本文将考察移动机器人的轨迹跟踪问题,采用后退设计方法^[9]的思想设计具有全局收敛特性的跟踪控制器.该方法将复杂的非线性系统分解成不超过系统阶数个子系统,然后对每个子系统设计部分 Lyapunov 函数和中间虚拟控制量,并一直“后退”至整个系统将它们集成起来完成系统控制器的设计.后退设计方法是一种系统的递推设计方法,无需对非线性系统线性化,因此可期望得到全局特性.

2 问题的提出

对轮式移动机器人,其运动学方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta, \\ \dot{y} = v \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \omega. \end{cases} \quad (1)$$

上式中 (x, y) 为移动机器人的位置, θ 为其方向角,即前进方向与 X 轴夹角; v, ω 分别为移动机器人的线速度和角速度,在运动学模型中它们是控制输入.本文所考虑的轨迹跟踪为移动机器人对具有位姿 $(x_r, y_r, \theta_r)^T$ 和速度 v_r, ω_r 的参考小车的跟踪,如图 1 所示.因此,可得到在移动机器人坐标内描述的位姿误差为^[5]

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其位姿误差微分方程描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_e = \omega y_e - v + v_r \cos \theta_e, \\ \dot{y}_e = -\omega x_e + v_r \sin \theta_e, \\ \dot{\theta}_e = \omega_r - \omega. \end{cases} \quad (3)$$

从以上分析,可将移动机器人运动学模型的轨迹跟踪定义为寻找有界输入 v 和 ω ,使对任意初始误差,系统(3)在该控制输入作用下 $(x_e, y_e, \theta_e)^T$ 有界且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|(x_e, y_e, \theta_e)^T\| = 0$.

3 跟踪控制器的设计

引理. 对任意 $x \in R$ 且 $|x| < \infty$, 有 φ

$(x) = x \sin(\arctan x) \geq 0$, 等号当且仅当 $x=0$ 时成立.

证明. 显然,当 $x=0$ 时, $\varphi(0)=0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 有 $\arctan x \in (0, \pi/2)$, 因此 $\sin(\arctan x) > 0$, 得 $\varphi(x) > 0$; 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 有 $\arctan x \in (-\pi/2, 0)$, 因此 $\sin(\arctan x) < 0$, 得 $\varphi(x) > 0$.

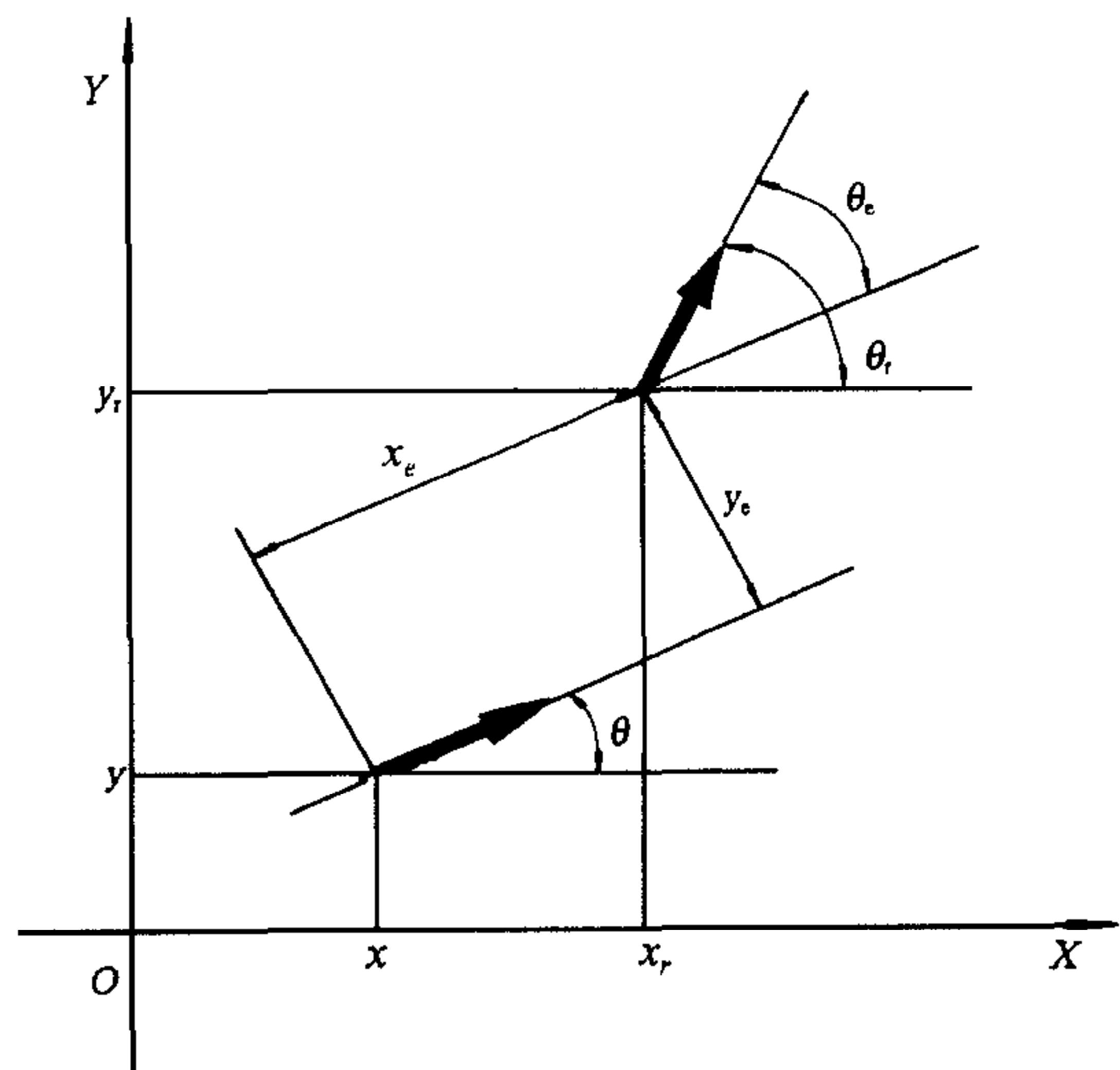


图 1 位姿误差坐标表示

$\tan x) < 0$, 得 $\varphi(x) > 0$.

由此引理, 可给出下面的移动机器人运动学模型的全局轨迹跟踪控制律.

定理. 设 $\forall t \in [0, +\infty)$, v_r, \dot{v}_r 和 $\omega_r, \dot{\omega}_r$ 有界, 则在控制律(4)的作用下, 由方程(3)描述的运动学跟踪误差全局一致有界, 并且当 $v_r \neq 0$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|(x_e, y_e)^T\| = 0$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e = 2k\pi$ ($k \in Z$).

$$\alpha_u = \begin{bmatrix} u_v \\ u_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \cos \theta_e + \frac{\partial \alpha}{\partial y_e} \sin\left(\frac{\bar{\theta}_e}{2}\right) \omega + c_1 x_e \\ 2x_e v_r \cos\left(\alpha + \frac{\bar{\theta}_e}{2}\right) + \omega_r - \frac{\partial \alpha}{\partial v_r} \dot{v}_r - \frac{\partial \alpha}{\partial y_e} v_r \sin \theta_e + c_2 \sin \frac{\bar{\theta}_e}{2} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中 $\bar{\theta}_e = \theta_e + \arctan(v_r, y_e)$, $\alpha = -\arctan(v_r, y_e)$.

证明. 由位姿误差微分方程(3)的第二个方程可以看出, 当 $x_e = 0$ 时, 对部分 Lyapunov 函数 $V_y = \frac{1}{2} y_e^2$ 考察. 由引理可知, $\theta_e = \alpha = -\arctan(v_r, y_e)$ 可使 y_e 收敛. 因此, 只要 x_e 收敛到零且 θ_e 收敛到 α , 则 y_e 自然收敛到零(由定义可知此时 α 也收敛到零), 这正是后退设计方法的思想体现. 于是, 我们的工作实际上成为设计 v 和 ω 使得 $x_e \rightarrow 0$ 且 $\theta_e \rightarrow \alpha$. 为此, 引入误差变量 $\bar{\theta}_e = \theta_e - \alpha = \theta_e + \arctan(v_r, y_e)$, 取 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} x_e^2 + \frac{1}{2} y_e^2 + 2 \left(1 - \cos \frac{\bar{\theta}_e}{2} \right). \quad (5)$$

之所以在 Lyapunov 函数中选取 $\cos \frac{\bar{\theta}_e}{2}$ 而不是 $\cos \bar{\theta}_e$, 是因为我们的目标要将 $\bar{\theta}_e$ 控制到零角度, 即在集合 $\{\bar{\theta}_e | \bar{\theta}_e = 2k\pi, k \in Z\}$ 中; 否则将进入平衡点 $\{\bar{\theta}_e | \bar{\theta}_e = k\pi, k \in Z\}$. 由(5)式结合方程(3)对时间求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x_e \dot{x}_e + y_e \dot{y}_e + \sin \frac{\bar{\theta}_e}{2} \dot{\bar{\theta}}_e = x_e (\omega y_e - v + v_r \cos \theta_e) + \\ & y_e (-\omega x_e + v_r \sin \theta_e) + \sin \frac{\bar{\theta}_e}{2} \left[\omega_r - \omega - \frac{\partial \alpha}{\partial v_r} \dot{v}_r - \right. \\ & \left. \frac{\partial \alpha}{\partial y_e} (-\omega x_e + v_r \sin \theta_e) \right] = x_e \left(-v + v_r \cos \theta_e + \frac{\partial \alpha}{\partial y_e} \omega \sin \frac{\bar{\theta}_e}{2} \right) + \\ & y_e v_r \sin \alpha + y_e v_r [\sin(\bar{\theta}_e + \alpha) - \sin \alpha] + \sin \frac{\bar{\theta}_e}{2} \left(\omega_r - \right. \\ & \left. \omega - \frac{\partial \alpha}{\partial v_r} \dot{v}_r - \frac{\partial \alpha}{\partial y_e} v_r \sin \theta_e \right) = x_e \left(-v + v_r \cos \theta_e + \frac{\partial \alpha}{\partial y_e} \omega \sin \frac{\bar{\theta}_e}{2} \right) + \\ & y_e v_r \sin \alpha + 2y_e v_r \sin \frac{\bar{\theta}_e}{2} \cos \left(\frac{\bar{\theta}_e}{2} + \alpha \right) + \sin \frac{\bar{\theta}_e}{2} \left(\omega_r - \omega - \frac{\partial \alpha}{\partial v_r} \dot{v}_r - \frac{\partial \alpha}{\partial y_e} v_r \sin \theta_e \right) = \\ & x_e \left(-v + v_r \cos \theta_e + \frac{\partial \alpha}{\partial y_e} \omega \sin \frac{\bar{\theta}_e}{2} \right) + y_e v_r \sin \alpha + \\ & \sin \frac{\bar{\theta}_e}{2} \left[\omega_r - \omega - \frac{\partial \alpha}{\partial v_r} \dot{v}_r - \frac{\partial \alpha}{\partial y_e} v_r \sin \theta_e + 2y_e v_r \cos \left(\frac{\bar{\theta}_e}{2} + \alpha \right) \right]. \end{aligned}$$

将控制律(4)代入上式, 可得

$$\dot{V} = -c_1 x_e^2 - y_e v_r \sin[\arctan(y_e, v_r)] - c_2 \sin^2 \frac{\bar{\theta}_e}{2} \leq 0. \quad (6)$$

只要 v_r, \dot{v}_r 和 $\omega_r, \dot{\omega}_r$ 在 $[0, \infty)$ 有界, 则由(4)式可知控制量 v 和 ω 有界. 并且由(6)式可知

跟踪误差 $x_e, y_e, \bar{\theta}_e$ 一致有界; 进一步若 $v_r \neq 0$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_e = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} y_e = 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\theta}_e = 2k\pi, (k \in Z)$. 由定义可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e = \lim_{t \rightarrow \infty} [\bar{\theta}_e - \arctan(v_r y_e)]$, 又由 $\lim_{t \rightarrow \infty} y_e = 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\theta}_e = 2k\pi (k \in Z)$, 该式与 $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e = 0$ 等价. 因此, 实际上有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|(x_e, y_e, \theta_e)^T\| = 0$.

说明. 在跟踪控制中, 为保证全局渐近稳定, 从(6)式中看出要求 $v_r \neq 0$, 这一点与 Brockett^[1]理论相符. 正因为如此, 必须将移动机器人跟踪与点镇定控制独立研究.

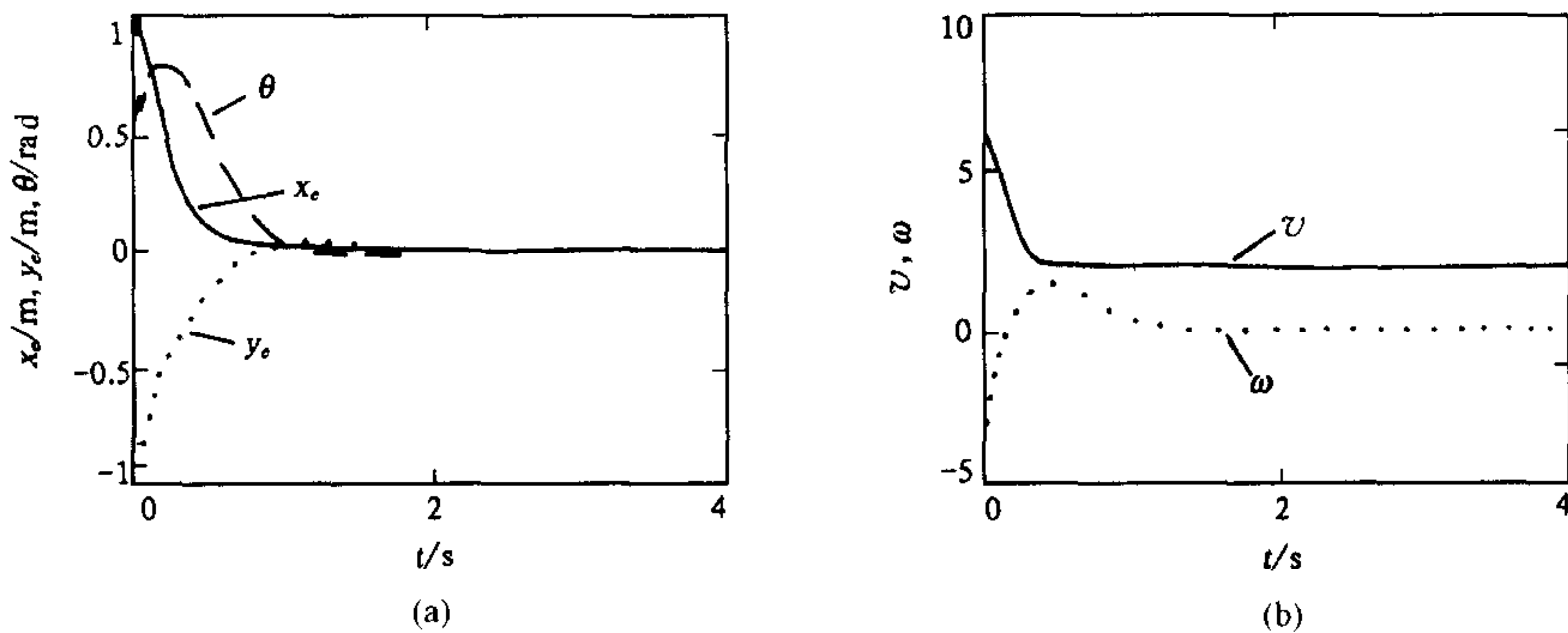
4 仿真结果

就以上所提控制律, 我们用 MATLAB 对移动机器人系统进行了仿真研究. 为了验证误差收敛的全局特性, 针对不同的初始条件和不同的参考输入分别作了仿真, 结果表明本文设计的全局控制器有效. 控制器的

表 1 跟踪控制仿真参数

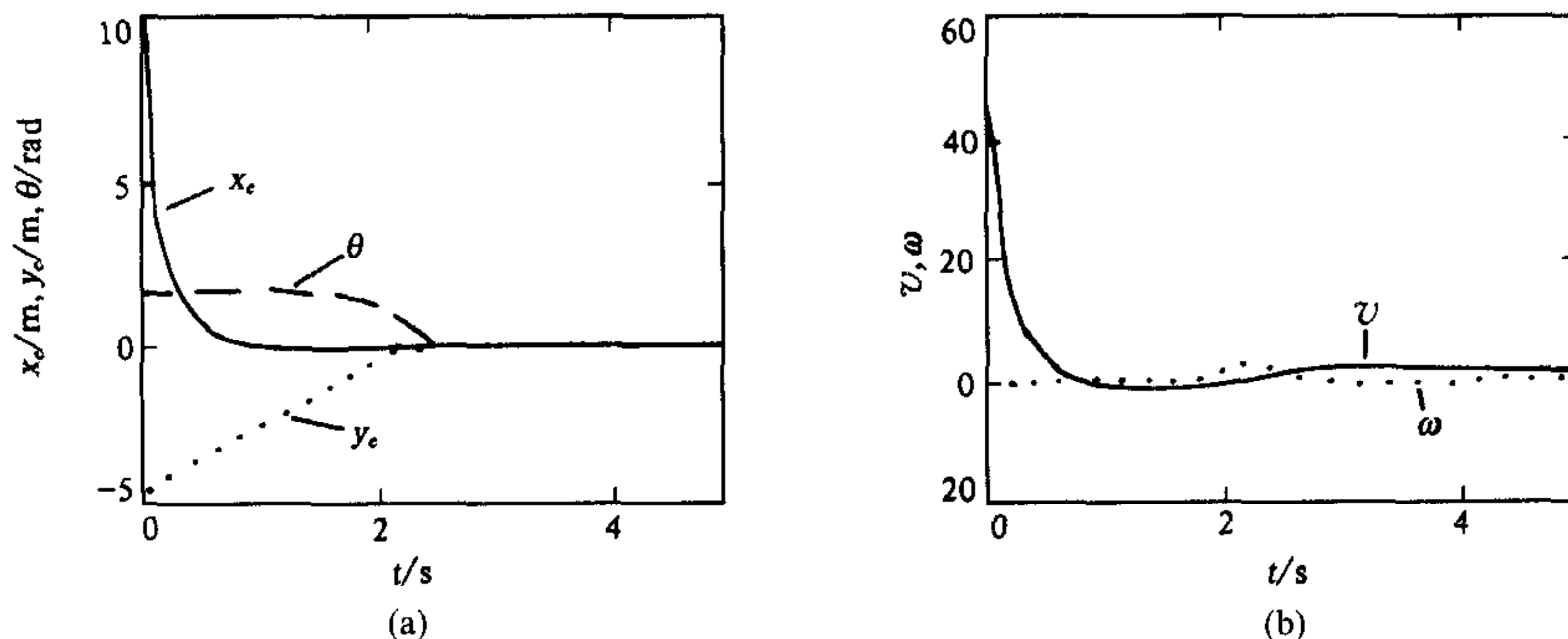
仿真结果	初始条件 (x, y, θ)	期望速度 (v_r, ω_r)	控制器参数 (c_1, c_2)
图 2	(1, -1, $\pi/6$)	(2, 0)	(5, 5)
图 3	(10, -5, $\pi/2$)	(2, 0)	(5, 5)
图 4	(-0.5, 0.5, $\pi/8$)	(2, 1)	(5, 5)
图 5	(8, -6, $-\pi/3$)	(2, 1)	(5, 5)

采样周期均为 $T=10\text{ms}$, 各种初始条件下的控制器参数和期望速度如表 1 所示. 图 2 和图 3 为期望小车直线运动分别在小误差和大误差初始条件下的跟踪结果, 图 4 和图 5 为期望小车圆周运动分别在小误差和大误差初始条件下的跟踪结果. 从图中误差曲线可以



初始位姿(1, -1, $\pi/6$), 期望速度(2, 0)

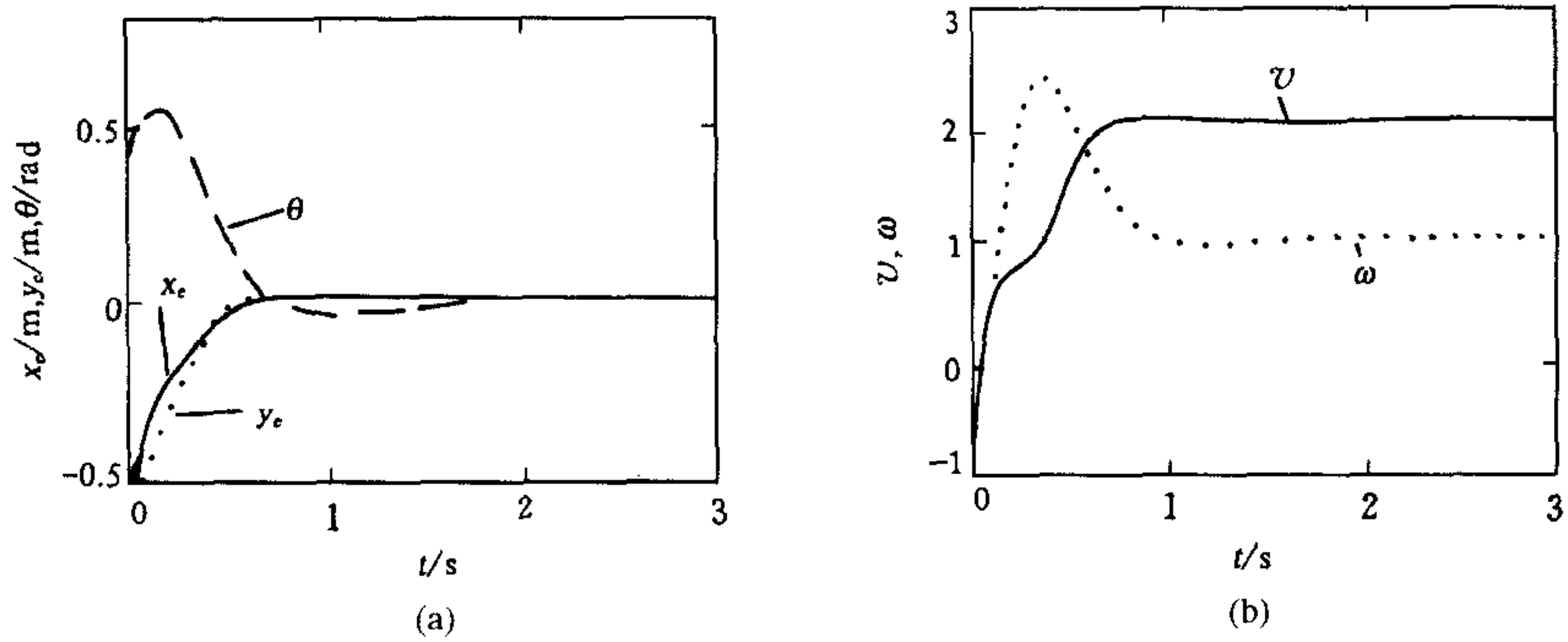
图 2 运动学跟踪结果



初始位姿(10, -5, $\pi/2$), 期望速度(2, 0)

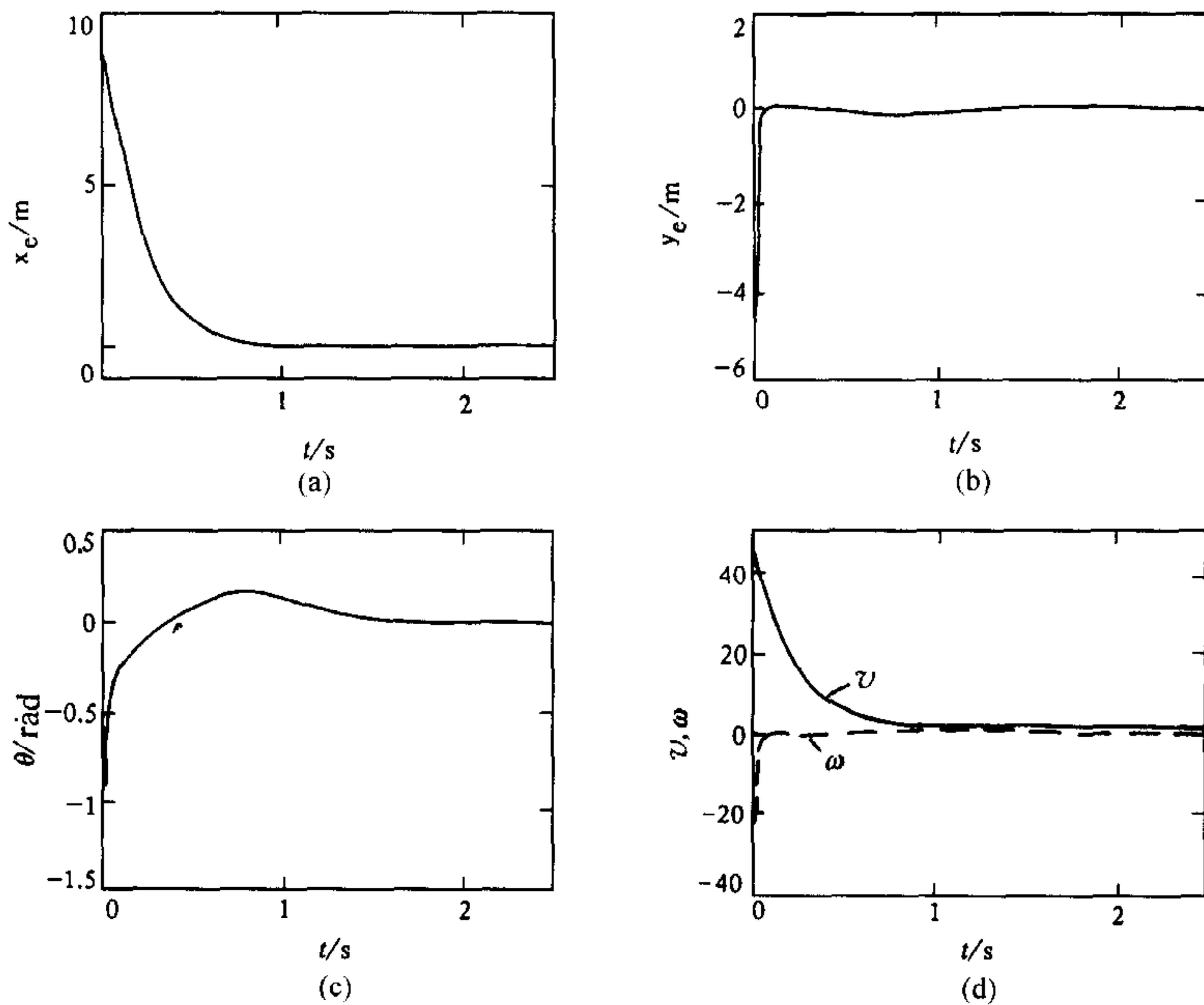
图 3 运动学跟踪结果

看出,无论初始条件如何变化,在本文设计的控制器作用下,跟踪误差都具有令人满意的收敛特性,这说明反馈跟踪控制系统具有良好的轨迹跟踪效果和全局渐近稳定特性.



初始位姿(-0.5, 0.5, $\pi/8$),期望速度(2, 1)

图 4 运动学跟踪结果



初始位姿(8, -6, $-\pi/3$),期望速度(2, 1)

图 5 运动学跟踪结果

5 结论

本文研究了移动机器人的轨迹跟踪,设计出具有全局稳定的跟踪控制律.利用后退方法设计控制律,避免了以前采用线性化方法处理非线性问题带来的局部稳定特性,使得设计过程简单、系统且灵活,具有直观的稳定性分析.

参 考 文 献

1 Brockett R W. Asymptotic stability and feedback stabilization. In: Differential Geometric Control Theory, Birkhauser, Boston; 1983, 181~191

- 2 Komanovsky H, MacClamroch N H. Developments in nonholonomic control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 1995, **15**(6):20~36
- 3 Samson C. Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart. *Advanced Robot Control*, 1990:125~151
- 4 Samson C, Ait-Abderrahim K. Feedback control of a nonholonomic wheeled cart in cartesian space. In: Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1991,1136~1141
- 5 Kanayama Y, Kimura Y *et al.* A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. In: Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, 1990,384~389
- 6 Walsh G, Tilbury D, Sastry S *et al.* Stabilization of trajectories for systems with nonholonomic constraints. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, **39**(1):216~222
- 7 D'Andrea-Novel, Campion G, Bastin G. Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization. *Int. J. of Robotics Research*, 1995,543~559
- 8 Sarkar N, Yun X P, Kumar V. Control of mechanical systems with rolling constraints: application to dynamic control of mobile robots. *Int. J. of Robotics Research*, 1994, **3**(1):55~69
- 9 Kristic M , Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: John Wiley, Inc. , 1995

吴卫国 1971年生.1994年毕业于同济大学电气工程系,同年进入该系硕博连读,现为同济大学博士研究生.研究方向为智能机器人和智能控制.

陈辉堂 1933年生.1953年毕业于上海交通大学电力系,1956年研究生毕业于上海交通大学工企电气化专业.现为同济大学电气工程系教授、博士生导师.主要研究领域为智能机器人和机器人控制.

王月娟 1935年生.1958年毕业于上海交通大学电机工程系,现为同济大学电气系教授、博士生导师.主要研究方向为机器人控制与智能控制.