

研究简报

# 基于非线性观测器的离散驱动混沌同步<sup>1)</sup>

李 克 杨绿溪 何振亚

(东南大学无线电工程系 南京 210096 E-mail: cnahlike@hotmail.com)

刘 琚

(山东大学电子工程系 济南 250100)

**关键词** 非线性观测器, 混沌, 同步.

## SPORADIC DRIVING CHAOS SYNCHRONIZATION BASED ON NONLINEAR OBSERVER

LI Ke YANG Lu-Xi HE Zhen-Ya

(Department of Radio Engineering, Southeast University, Nanjing 210096)

(E-mail: cnahlike@hotmail.com)

LIU Ju

((Department of Electronics Engineering, Shandong University, Ji'nan 250100)

**Key words** Nonlinear observer, chaos, synchronization.

## 1 引言

混沌同步是通过驱动信号的作用使得受迫系统的状态与驱动系统趋于一致. 在系统与控制领域有一个相关问题就是通过系统的观测信号来估计该系统的状态, 即“观测器”问题. 混沌作为一类特殊的非线性动力系统, 很自然地可引入观测器理论更系统地进行同步设计, 且能用于同步方法所不能实现的某些系统中<sup>[1]</sup>. 混沌同步的一个主要应用方面是保密通信, 而一般的同步方法均采用时间连续驱动信号, 在数字通信占主流的今天, 时间离散驱动的同步系统能够提供更高的频谱效率和保密性能<sup>[2,3]</sup>, 本文对基于观测器的混沌同步的条件进行分析, 并导出了离散驱动时混沌同步观测器的渐近稳定性判据.

## 2 离散驱动混沌同步观测器

考察一个非线性自治系统

1) 国家自然科学基金(69872009)和教育部博士点基金(98028630)资助项目.

收稿日期 2000-01-21 收修改稿日期 2000-06-05

$$\dot{x} = Ax + g(x), y = Cx. \quad (1)$$

其中  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是输出增益矩阵;  $y \in \mathbb{R}^m$  是系统输出, 通常取  $m=1$ . 系统(1)对应的时间连续驱动的全阶观测器为

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + g(\hat{x}) + KC(x - \hat{x}), \quad (2)$$

$K \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  为增益矢量. 时间离散驱动是指耦合项  $KC(x - \hat{x})$  仅在各等间隔时刻  $t_j = j\tau$  ( $\tau$  为驱动周期) 才被注入观测器, 在其它时刻观测器则自由演化, 相应的时间离散驱动观测器为

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + g(\hat{x}) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_j) \cdot KC[x(t_j) - \hat{x}(t_j)]. \quad (3)$$

在两个驱动时刻之间, 观测器不受任何外部约束, 它的各变量将自由演化并逐渐远离期望的混沌轨道, 因此连续驱动同步的渐近稳定性准则包括 Pecora 和 Carroll 的条件 Lyapunov 指数准则<sup>[4]</sup>将不再适用. 以下将导出在离散驱动下同步观测器渐近稳定的准则.

观测器(3)式与原系统的线性化误差方程为

$$\dot{e} = (A + G_x)e - KC \sum_j \delta(t - t_j) \cdot e(t_j), \quad (4)$$

其中  $G_x = \partial g / \partial x|_{x=\hat{x}}$  为 Jacobi 矩阵. 取其一阶差分近似

$$e(t + \Delta t) = \{ \Delta t \cdot [A + G_x - KC \sum_j \delta(t - t_j)] + I \} \cdot e(t), \quad (5)$$

式中  $I$  为单位阵. 作者仅考虑当  $G_x$  为按时间平均的常数阵的情形, 实验表明在多数情况下这种近似是合理的. 于是在没有外部驱动时, (4)式就变为  $\dot{e} = (A + G_x)e = Je$ , 其通解为

$$e(t) = \sum_i^n X_i e^{\lambda_i t} v^{(i)}, \quad (6)$$

式中  $\lambda_i, v^{(i)}$  分别是矩阵  $J$  按时间平均的特征值和特征向量.  $X_i$  是一组常数, 由  $t=0$  时刻的初始条件  $E(0) = \sum_i^n X_i v^{(i)}$  确定. 令  $V$  为一  $n \times n$  矩阵,  $V = [v^{(1)} \quad v^{(2)} \quad \dots \quad v^{(n)}]$ . 定义矩阵  $W$  为

$$W = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \tau} v_1^{(1)} & e^{\lambda_2 \tau} v_1^{(2)} & \dots & e^{\lambda_n \tau} v_1^{(n)} \\ e^{\lambda_1 \tau} v_2^{(1)} & e^{\lambda_2 \tau} v_2^{(2)} & \dots & e^{\lambda_n \tau} v_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_1 \tau} v_n^{(1)} & e^{\lambda_2 \tau} v_n^{(2)} & \dots & e^{\lambda_n \tau} v_n^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

取  $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ , 于是  $t=0$  时刻的初始条件可表示为  $E(0) = VX$ . 因此  $X = V^{-1}E(0)$ . 经过第一个驱动时刻后误差方程的解为

$$e(\tau) = WX = WV^{-1}E(0) = [\Delta t(A + G_x) + I] \cdot e(\tau_-). \quad (8)$$

在  $t=\tau$  时刻, 耦合项发生作用, 所以此时新的初始条件  $E(\tau)$  为

$$E(\tau) = [\Delta t(A + G_x - KC) + I] \cdot e(\tau_-) = [\Delta t(A_c + G_x) + I] / [\Delta t(A + G_x) + I] \cdot e(\tau) = Z \cdot e(\tau) = ZWV^{-1}E(0). \quad (9)$$

由式(8), (9)可立即得到经过下一驱动时刻  $t=2\tau$  后的初始条件为

$$E(2\tau) = Z \cdot e(2\tau) = Z \cdot WV^{-1}E(\tau) = (ZWV^{-1})^2 E(0). \quad (10)$$

这样, 在  $n$  个驱动时刻之后有

$$e(n\tau) = WV^{-1}(Z WV^{-1})^{n-1}E(0). \tag{11}$$

令  $Z WV^{-1}$  为特征矩阵, 由此可立即得到误差动力学方程收敛, 也即  $x, \hat{x}$  同步的准则为

$$\Lambda = |\lambda(\lim_{\Delta \rightarrow 0} [Z WV^{-1}])| < 1. \tag{12}$$

### 3 仿真实验

以 Lorenz 系统  $\dot{x} = [\sigma(y-x), rx-xz-y, xy-bz], x = [x, y, z]$  为例, 取  $\sigma = 10, r = 28, b = 2.67$ , 取观测器参数  $K = [-1/3, 253/9, 0], C = [1, 1, 1]$ , 对定点和混沌轨迹的离散同步分别进行实验. 首先是定点情形, 已知  $x^* = y^* = -\sqrt{b(r-1)}, z^* = (r-1)$  是该系统的定点, 此时  $G_x$  为常数阵, 因此对给定的  $\tau$  可直接计算出  $\Lambda$  从而判断观测器的稳定性. 设  $\epsilon(0)$  为系统与观测器的轨迹的初始距离,  $n$  次迭代后两个轨迹的分离程度  $\epsilon(T_e) = \Lambda^n \epsilon(0)$ , 其中  $T_e = n\tau$  为暂态时间. 取  $\epsilon(T_e)/\epsilon(0)$  为一固定值, 如  $10^{-5}$ , 即可推出达到同步所需迭代次数  $n$  和暂态过程的时间  $T_e$ , 仿真实验得到的暂态时间  $T'_e$  与该计算结果比较接近. 图1(a)为  $\Lambda, T_e, T'_e$  相对于  $\tau$  的关系曲线, 可以看出当  $\Lambda > 1$  时暂态时间为无穷大,  $\Lambda$  的最小值对应于暂态时间的最小值,  $\Lambda$  的大小决定了同步的速度, 在观测器设计时就可以此为依据选择合适的驱动周期来获得最优的同步效果.

系统处于混沌区域时的情形与定点时类似, 只是由于此时系数矩阵  $J$  为时变的, 本文取的是它的平均时间, 因而仿真实验与理论计算的结果没有定点情况下吻合得好. 图1(b)为此时  $\Lambda, T_e, T'_e$  相对于驱动周期  $\tau$  的关系曲线, 尽管  $\Lambda$  的最小值和实验得到的暂态时间的最小值所对应的驱动周期略有不同, 但仍然比较接近.

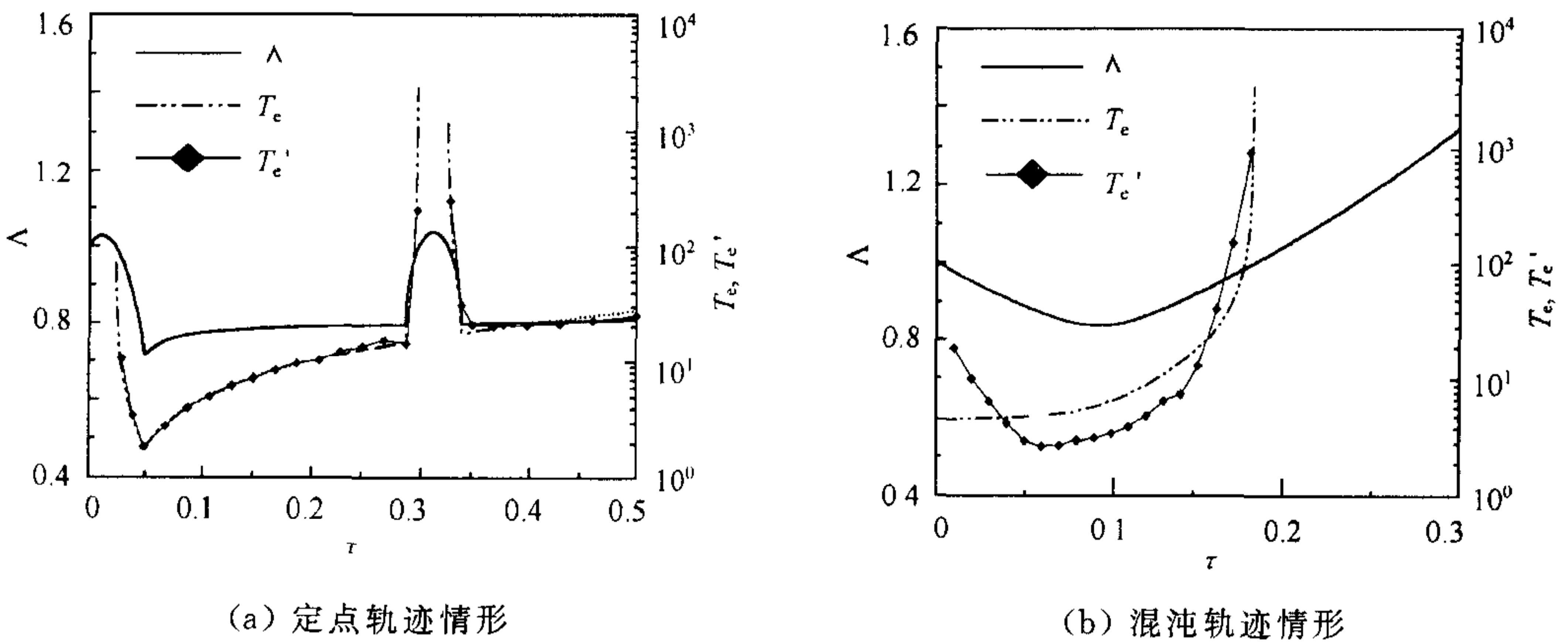


图1 离散驱动下 Lorenz 系统同步观测器的收敛特性曲线

本文通过理论分析和仿真实验发现, 在离散驱动下观测器和原系统是否同步, 与连续驱动时同步观测器的稳定性无关, 并导出了离散驱动时混沌同步观测器的渐近稳定性判据.

### 参 考 文 献

1 Morgul O, Solak E. Observer based synchronization of chaotic systems. *Physics Review E*, 1996, **54**(5): 4803~4811

- 2 He Z Y, Li K, Yang L X, Shi Y H. A robust digital secure communication scheme based on sporadic coupling chaos synchronization. *IEEE Trans. Circuits & Systems ( I )*, 2000, **47**(3): 397~402
- 3 Yang T, Chua L O. Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic system; theory and application to secure communication. *IEEE Trans. Circuits & Systems. ( I )*, 1997, **44** (10):976~988
- 4 Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. *Physics Review Letter*, 1990, **64**:821~823

**李 克** 1972年生. 2000年获东南大学无线电系博士学位. 研究方向为: 第三代移动通信与保密通信.

**杨绿溪** 1965年生. 博士、东南大学无线电系教授. 研究领域包括: 盲信号处理、神经网络与图像处理.

---

(上接第279页)

八、本编辑部在收稿后一周内通知作者,并在稿件修订过程中与作者保持联系. 如果作者在来稿中不作特殊说明,编辑部将只与第一作者联系.

九、已被本刊接受发表的稿件,按审查意见和“作者加工稿件须知”修改后一式两份同软盘一起寄编辑部. 并需附所有作者的简介.

十、来稿刊登与否由编委会最后审定. 编委会有权对来稿作适当文字删改或退请作者修改. 来稿一经发表,按篇酌付稿费,并赠送当期杂志1本及30份抽印本. 经审查后不拟刊登的文稿,一般在半年内退还.

十一、来稿(一式叁份)请寄北京市中关村中国科学院自动化研究所转《自动化学报》编辑部,邮政编码100080. E-mail:aas@iamail.ia.ac.cn