



具有重置时间切换服务系统的动态稳定性¹⁾

杨根科^{1,2} 吴智铭¹ 孙国基³ 曾建潮²

(上海交通大学自动化系 上海 200030 E-mail: gkyang@mail1.sjtu.edu.cn)¹

(太原重型机械学院计算机仿真研究所 太原 030024)²

(西安交通大学系统工程研究所 西安 710049)³

摘要 由一个 Server 和多个 Buffers 组成的考虑重置时间的切换服务系统可建模为连续流切换系统. 当采用优先权调度策略时, 证明了切换服务系统的连续状态轨迹能一致收敛于惟一的周期轨道, 指出周期轨道与初始状态无关, 并给出收敛速度估计.

关键词 切换服务系统, 周期, 稳定.

DYNAMICS STABILITY FOR SWITCHED SERVER SYSTEMS WITH RESET TIME

YANG Gen-Ke^{1,2} WU Zhi-Ming¹ SUN Guo-Ji³ ZENG Jian-Chao²

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030)

(E-mail: gkyang@mail1.sjtu.edu.cn)¹

(Department of Computer Science, Taiyuan Heavy Machinery Institute, Taiyuan 030024)²

(System Engineering Institute, Xi'an Jiao Tong University, Xi'an 710049)³

Abstract A switched server system with N buffers, in which the machine requires switched setup time, is a continuous switched system. We show that the dynamics of the system can be certainly stabilized to a unique limited orbit when priority-based scheduling policy is employed. the convergence speed of any orbit to the limited orbit is also quantitatively evaluated.

Key words Switched server system, periodic, stability.

1 引言

切换流系统广泛存在于制造系统及计算机系统的调度和控制问题中. 当单位时间内被处理的任務数较大时, 文献[1]提出离散任务流被逼近为连续流的研究方法, 从而离散调度问题转化为连续切换流系统的相关问题. 文献[1]针对单机多品种和多机网络问题及

1) 中国博士后基金和西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室开放基金资助课题.

多种调度策略,证明了服务系统的缓冲状态是最终有界的,并证明了服务系统的 Lagrange 稳定性. 文献[2]对优先权调度策略,后来文献[3]对 FCFS 策略和随机选择策略研究了切换服务系统的 Lagrange 稳定性,并给出了缓冲状态的上界估计表达式. 文献[4]证明了在任意的调度策略下,不考虑重置时间开销的三个 BUFFER 切换服务系统是最终周期的,这是一种 Lyapunov 意义下的稳定结果. 本文考虑重置时间的 N 个 Buffer 切换服务系统,在优先权调度策略下^[2],证明了任意一条轨道将稳定于唯一的极限轨道,并给出极限轨道表达式和收敛于极限轨道的速度估计.

2 考虑重置时间的切换服务系统

考虑由一个 Server(机器)、 N 个 Buffers(缓存区)组成的切换服务系统如图1. 假定每类工件到达缓存区的到达率确定,缓存区中工件等待机器的处理,机器根据调度规律选择一个缓存区中任务进行服务. 若 i 型工件到达缓存区的间隔为 b_i 时间单位,机器需 m_i 时间单位处理单位 i 型工件,重置机器到第 i Buffer 为 s_i 时间单位. 引入特征量: $\rho_i = 1/b_i$ 为 i 型工件到达率; $\pi_i = 1/m_i$ 为 i 型工件的服务率;而 $\omega_i = \rho_i/\pi_i$,其含义是保持缓存区中工件数平衡,机器对第 i 缓冲区的服务频率.

根据文献[1],上述离散切换流系统可逼近为连续切换流系统. 考虑基于优先权的调度策略^[2];不妨假定选择缓存区的优先权次序为 $1, 2, \dots, N$. 图2为对 $N=2$ 的系统周期轨道的一种形象解释. 本文假定

$$\sum \omega_i < 1, \sum s_i > 0. \tag{1}$$

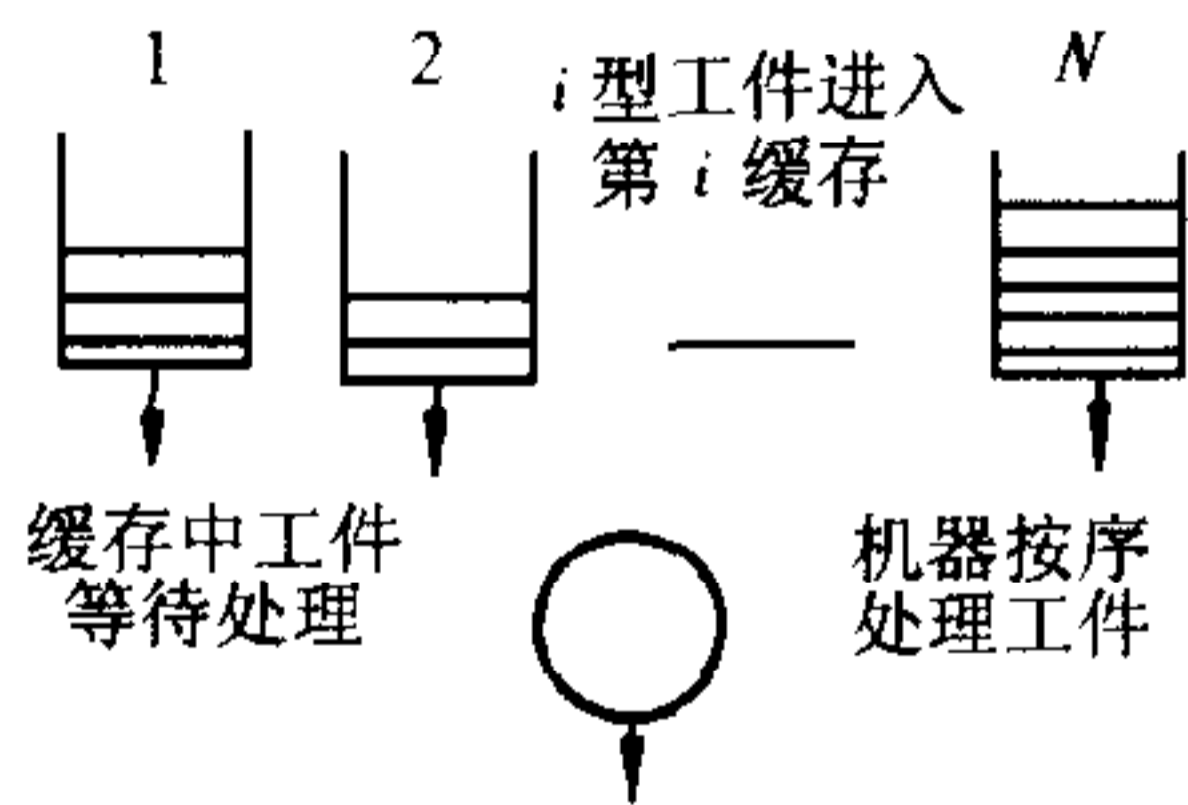


图1 切换服务系统

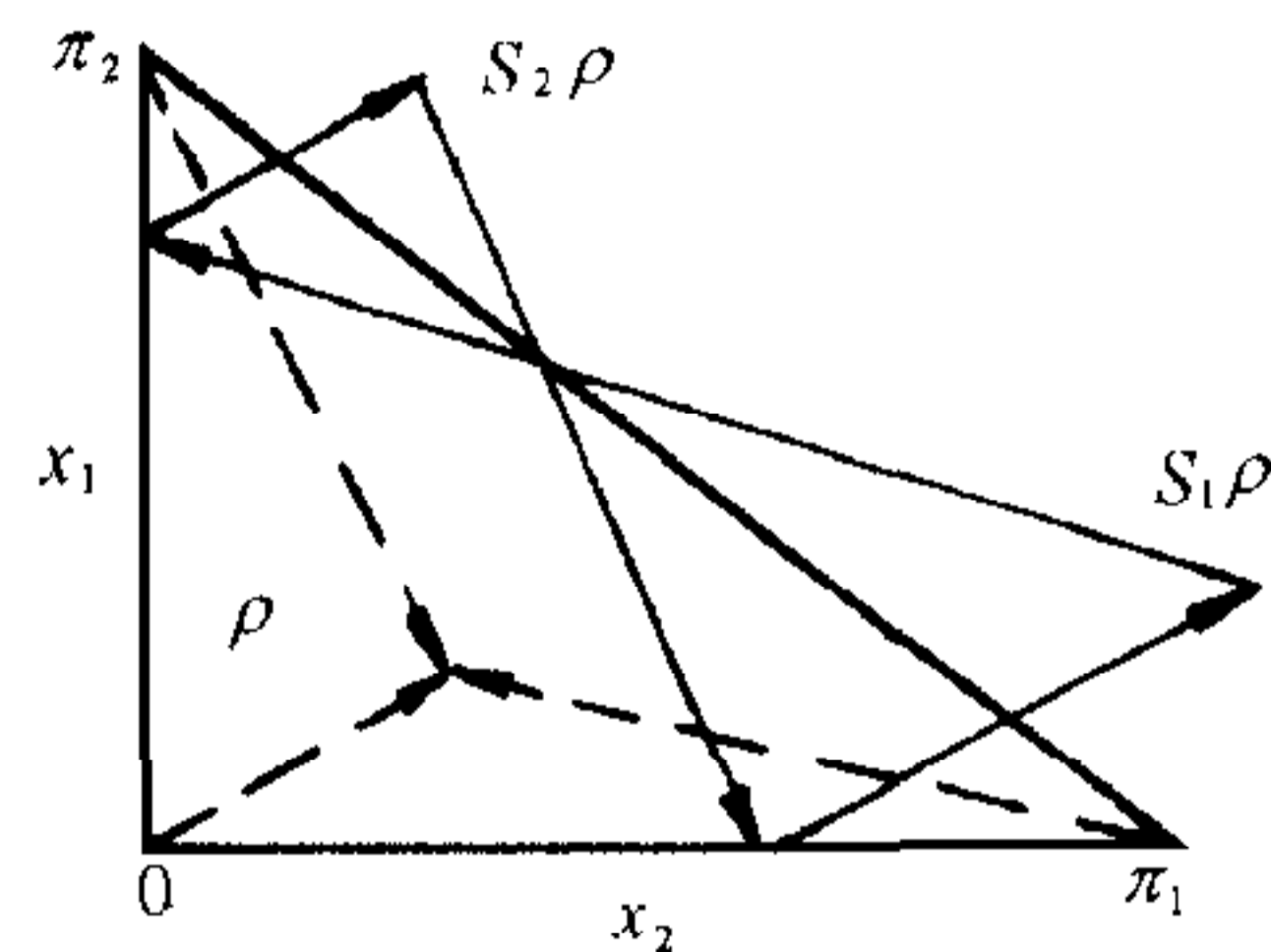


图2 $N=2$ 时的周期轨道

3 切换服务系统的稳定性分析

3.1 当 $\sum_{i=1}^N \omega_i + \sum_{i=1}^N s_i = 1$ 时的稳定性分析

设在诸缓存区的状态变量为 $x_i(t), t \geq 0$. 假定初始时满足 $x_{i_0}(0) = 0$, 不失一般性假定 $i_0 = 1$. 按调度策略服务器离开 Buffer j 的切换边界是: $X_j = \{(x_1, x_2, \dots, x_N); x_j(0) = 0\}$. 所以状态停留在区域: $\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_N); x_i(t) \geq 0\}$ 内. 设 $l(t)$ 是时刻 t 选择服务的 buffer 编号且右连续, $\{T_n\}$ 是切换点时间序列, 则有 $l(T_n) = [l(T_{n-1}) + 1] / \text{mod } N$. 在 $[T_n, T_n + s_{l(T_n)}]$ 期间, 服务器处于重置中, 在区间 $[T_n + s_{l(T_n)}, T_{n+1})$ 服务器处理 buffer $l(T_n)$ 的工件, 这里 $T_{n+1} = T_n + s_{l(T_n)} + t_n$, t_n 由 $t_n = (x_{l(T_n)}(T_n) + \rho_{l(T_n)} s_{l(T_n)}) / (\pi_{l(T_n)} - \rho_{l(T_n)})$ 确定. 所以状态演化方程为

$$x'_i(t) = \rho_i, i \neq l(T_n); x'_{l(T_n)}(t) = \rho_i, T_n \leq t \leq T_n + s_{l(T_n)},$$

$$x'_{l(T_n)}(t) = \rho_i - \pi_i, T_n + s_{l(T_n)} < t < T_{n+1}, \tag{2}$$

显然切换点之间的系统动态是逐段线性的(如图2). 记 $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N)^T, \pi_i = (0, \dots, \pi_i, \dots, 0)^T$ 第 i 个元非零, 按式(2)从 X_i 到 X_j 映射记为 A_{ij} :

$$x^{(j)} = A_{ij}x^{(i)} = \left(E + \frac{1}{\pi_i - \rho_i} [0, \dots, \rho - \pi_j, \dots, 0] \right) x^{(i)} + \frac{s_j \rho_j}{\pi_j - \rho_j} (\rho - \pi_j) + s_j \rho. \tag{3}$$

由调度策略知, 在一个切换周期后状态从 X_1 返回到 X_1 , 点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ 被映射到 $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)^T := A_{1 \leftrightarrow 1}x$, 这里 $A_{1 \leftrightarrow 1} = A_{N1}A_{(N-1)N} \dots A_{23}A_{12}$. 为方便设

$$z := x/\pi, \quad \text{这里 } z_i = x_i/\pi_i, \|x\|_\pi = \|z\|_{L_1}. \tag{4}$$

引理1. 映射 $A_{1 \leftrightarrow 1}: X_1 \rightarrow X_1$ 在范数 $\| \cdot \|_\pi$ 是压缩映射.

证明. $\forall x, y \in X_1$, 从 x 开始, 依次计算在中间切换边界面 X_i 上的点坐标, 最终得:

$$x'_j = \begin{cases} 0, j = 1, \\ \pi_j \omega_j \left\{ \sum_{i=2}^j \left[\sum_{h=j+1}^{N+1} \omega_h \left[\prod_{l=i}^h (1 - \omega_l) \right]^{-1} \right] (z_i + s_i) + \right. \\ \left. \sum_{i=j+1}^{N+1} \left[\prod_{l=i}^{N+1} (1 - \omega_l) \right]^{-1} (z_i + s_i) \right\}, 2 \leq j \leq N, \end{cases} \tag{5}$$

其中为描述统一, $z_{N+1} = z_1 = 0, \omega_{N+1} = \omega_1, s_{N+1} = s_1. \sum_{i=k}^{k-1} = 0, \prod_{i=k}^{k-1} = 1$. 则

$$\|A_{1 \leftrightarrow 1}x - A_{1 \leftrightarrow 1}y\|_\pi \leq \sum_{j=2}^n \omega_j \left\{ \sum_{i=2}^j \left[\sum_{h=j+1}^{N+1} \omega_h \left[\prod_{l=i}^h (1 - \omega_l) \right]^{-1} \right] (|x_i - y_i|/\pi_i) + \sum_{i=j+1}^N \left[\prod_{l=i}^{N+1} (1 - \omega_l) \right]^{-1} (|x_i - y_i|/\pi_i) \right\}.$$

上式关于 i, j 交换求和顺序, 然后再交换 h, j 的求和顺序得

$$\begin{aligned} \|A_{1 \leftrightarrow 1}x - A_{1 \leftrightarrow 1}y\|_\pi &\leq \sum_{i=2}^n \left\{ \sum_{h=i+1}^{N+1} \omega_h \prod_{l=h+1}^{N+1} (1 - \omega_l) \sum_{j=i}^{h-1} \omega_j + 1 - \sum_{j=i}^{N+1} \omega_j - \sum_{j=1}^N s_j \right\} \left[\prod_{l=i}^{N+1} (1 - \omega_l) \right]^{-1} (|x_i - y_i|/\pi_i) = \\ &\sum_{i=2}^n \left\{ \prod_{l=i}^{N+1} (1 - \omega_l) - \sum_{j=1}^N s_j \right\} \left[\prod_{l=i}^{N+1} (1 - \omega_l) \right]^{-1} (|x_i - y_i|/\pi_i) \leq \\ \max_{2 \leq i \leq N} &\frac{\prod_{l=i}^{N+1} (1 - \omega_l) - \sum_{j=1}^N s_j}{\prod_{l=i}^{N+1} (1 - \omega_l)} \|x - y\|_\pi \leq \frac{1 - \omega_1 - \sum_{j=1}^N s_j}{1 - \omega_1} \|x - y\|_\pi = \lambda_1 \|x - y\|_\pi. \end{aligned} \tag{6}$$

定理2. 在周期调度策略下, 任意系统轨道稳定于惟一极限轨道, 收敛速度由(6)式确定, 且极限轨道是由切换点 $x^{1*}, x^{2*}, \dots, x^{N*}$ 组成的周期切换轨道, 诸 x^{k*} 点的坐标为

$$\begin{aligned} x^{1*} &= \left[0, \pi_2 \omega_2 \left(1 - \sum_{i=2}^2 (\omega_i + s_i) \right), \pi_3 \omega_3 \left(1 - \sum_{i=2}^3 (\omega_i + s_i) \right), \dots, \right. \\ &\quad \left. \pi_j \omega_j \left(1 - \sum_{i=2}^j (\omega_i + s_i) \right), \dots, \pi_N \omega_N \left(1 - \sum_{i \neq 1}^N (\omega_i + s_i) \right) \right], \\ x^{2*} &= \left[\pi_1 \omega_1 \left(1 - \sum_{i \neq 2} (\omega_i + s_i) \right), 0, \pi_3 \omega_3 \left(1 - \sum_{i=3}^3 (\omega_i + s_i) \right), \dots, \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \pi_j \omega_j \left(1 - \sum_{i=3}^j (\omega_j + s_j) \right), \dots, \pi_N \omega_N \left(1 - \sum_{i=3}^N (\omega_j + s_j) \right) \right], \dots, \\ x^{N*} = & \left[\pi_1 \omega_1 \left(1 - \sum_{i=1}^1 (\omega_j + s_j) \right), \pi_2 \omega_2 \left(1 - \sum_{i=1}^2 (\omega_j + s_j) \right), \dots, \right. \\ & \left. \pi_j \omega_j \left(1 - \sum_{i=1}^j (\omega_j + s_j) \right), \dots, \pi_{N-1} \omega_{N-1} \left(1 - \sum_{i \neq N} (\omega_j + s_j) \right), 0 \right]. \end{aligned}$$

证明. 由引理1, 任意轨道将最终稳定, 且在切换边界上的极限点唯一. 如求取在 X_1 上的极限点, 可由公式(5)计算得

$$\begin{aligned} z^{1*} j = & \omega_j \left\{ \sum_{i=2}^j \left[\sum_{h=j+1}^{N+1} \omega_h \left[\prod_{l=i}^h (1 - \omega_l) \right]^{-1} \right] (z_i^{1*} + s_i) + \right. \\ & \left. \sum_{i=j+1}^{N+1} \left[\prod_{l=i}^{N+1} (1 - \omega_l) \right]^{-1} (z_i^{1*} + s_i) \right\}, 2 \leq j \leq N, \end{aligned}$$

这里 $z_j^{1*} = x_j^{1*} / \pi_j$, $j=2 \sim N$. 代入 x^{1*} 计算公式容易验证上式成立.

3.2 在 $\sum_{i=1}^N \omega_i + \sum_{i=1}^N s_i = T$ 一般情形下切换服务系统的稳定性分析

$\exists K \in R^+$, 使得 $K(1 - \sum_{i=1}^N \omega_i) = \sum_{i=1}^N s_i$, 即 $\sum_{i=1}^N \omega_i K + \sum_{i=1}^N s_i = K$. 引入新的时间单位 KT_0 , 其中 T_0 是表示原时间单位. 在新时间度量单位下, 记有关时间特征量为 \hat{x} . 改记相关特征量 $\hat{s}_i = s_i / K$, $\hat{b}_i = b_i / K$, $\hat{m}_i = m_i / K \pi_i = 1 / \hat{m}_i = K \pi_i$, $\rho_i = 1 / \hat{b}_i = K \rho_i$, $\omega_i = \rho_i / \hat{\pi}_i = \omega_i$. 用新记号改写 $\sum_{i=1}^N \omega_i + \sum_{i=1}^N s_i = T$, $\sum_{i=1}^N \omega_i + \sum_{i=1}^N \hat{s}_i = 1$ [新的单位时间为: KT_0]. 故由定理2, 一般情形结论也成立(公式略去).

4 结论

连续切换流系统的切换周期性反映了公平的服务规律, 而系统的连续状态的稳定性则反映了切换的平稳性. 同时研究了连续切换流系统稳定性的离散切换规律和定量的系统连续状态的稳定性, 这既是混合控制系统研究中的基本理论问题, 也是混合控制系统综合中应该考虑的可实现性问题. 与文献[1~3]比较, 本文给出一种 Lyapunov 意义下的稳定结果. 与文献[4]比较, 本文考虑了重置时间且给出了具体的收敛速度表达式.

参 考 文 献

- 1 Perkins J R, Kumar P R. Stable distributed real-time scheduling of flexible manufacturing/assembly/disassembly systems. *IEEE Autom. Control*, 1989, **34**:139~148
- 2 Pssino K M, Burgess K L, Michel A N. Langrange stability and boundedness of discrete event systems. *Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications*, 1995, **5**(3):538~543
- 3 Burgess K L, Pssino K M. Stable service policy for flexible manufacturing system. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1997, **42**(3):420~425
- 4 Chase C, Serrano J, Ramadge P J. Periodicity and chaos from switched flow system: contrasting examples of discretely controlled continuous systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1993, **38**:70~83