



# 一类开关系统的开关控制策略优化设计<sup>1)</sup>

费树岷 王泽宁 冯纯伯

(东南大学自动化研究所 南京 210096 E-mail: infcon@seu.edu.cn)

**摘 要** 对一类基于线性系统模型的开关系统,提出了一种新的开关控制策略优化设计,加快了整个系统的收敛速度,对整个开关系统的稳定性进行了分析.定义了系统对给定初值的运动轨迹在区间上的衰减速率,进而分析了整个系统的收敛性.最后给出了一个仿真例子以说明所给控制策略的有效性.

**关键词** 开关系统,收敛速率,稳定性.

## ON THE OPTIMAL DESIGN VIA THE SWITCHING CONTROL STRATEGY FOR A CLASS OF SWITCHING SYSTEMS

FEI Shu-Min WANG Ze-Ning FENG Chun-Bo

(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210096)

(E-mail: infcon@seu.edu.cn)

**Abstract** A novel optimal design via the switching control strategy is presented for a class of switching systems based on a linear system model in this paper. This switching control strategy improves the convergent rate of the closed-loop system and the stability of the closed-loop system is analyzed. The decay rate of a motion trajectory of the system in some interval is defined and the astringency of the switching system is investigated. Finally, a simulation example is given to show the validity of the proposed control strategy.

**Key words** Switching system, convergent rate, stability.

## 1 引言

开关系统在很多实际工程应用中是经常遇到的,是混杂系统(hybrid system)中较为简单的一种,如飞机的多工作点控制、电力系统网络的切换以及多频采样数字控制系统等

1)国家攀登计划(970211017)、国家自然科学基金(69934010,69603004)资助项目.

等. 由于开关的引入, 整个系统常常表现出相当复杂的动态行为<sup>[1]</sup>, 在系统稳定性分析方面, Branicky 等人<sup>[2]</sup>使用多李亚普诺夫函数方法对开关系统的稳定性进行了分析, 并将其引申到较一般的混杂系统中. Mancilla 等人<sup>[3]</sup>讨论了开关系统的指数稳定性和数字反馈镇定问题. 而文献[4]~[6]则讨论了备选结构为线性时, 系统的可控性和可观测性及其镇定性问题. Frommer 等人<sup>[7]</sup>基于性能积分指标, 设计了一种开关控制策略, 并分析了其稳定性, 但没有对系统的静动态特性进行分析, 而且所给出的优化指标过于简单、粗糙.

本文对一类基于线性系统的开关系统进行了开关控制策略优化设计, 以改善系统静、动态性能, 并讨论整个系统的稳定性. 给出了系统运动轨迹在给定时间区间上的衰减速率概念, 对系统的收敛快慢性进行了分析. 最后给出了一个仿真例子并与文献[7]的结果进行了比较, 结果表明系统的动态品质得到了显著地提高.

## 2 问题的描述

考虑如下开关系统

$$\dot{\mathbf{x}} = A_{q(x,t)}\mathbf{x}(t) \quad q(\mathbf{x}(t), t) \in \underline{N} \triangleq \{1, 2, \dots, N\}, N \text{ 为自然数}, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x}(t) \in R^n$ ,  $q: R^n \times R^+ \rightarrow \underline{N}$  为分段右连续函数,  $A_q \in R^{n \times n}$ , 对任意给定的  $q \in \underline{N}$  为常矩阵.

假设 1.  $\forall i \in \underline{N}$ ,  $A_i$  是渐近稳定的.

考虑形如式(1)的系统是基于以下的理解: 通常对给定的对象, 根据不同的要求或不同的工作状态采用多个控制器, 每个控制器与对象构成一个闭环系统矩阵, 如第  $i$  个控制器与对象构成的系统矩阵可记为  $A_i$ . 于是在  $A_i$  之间进行开关切换可以认为是各控制器之间的开关切换. 为叙述方便, 当取  $q \in \underline{N}$  时, 称系统使用第  $q$  个子系统.

为避免整个开关系统频繁切换引起的颤动, 要求对给定的常数  $\tau > 0$ , 切换时间序列  $\{t_i, i = 1, 2, \dots\}$  满足  $t_{i+1} - t_i \geq \tau$ . 确定开关控制就是对给定的  $\tau > 0$  确定切换时间序列  $\{t_i\}_{i=1,2,\dots}$ , 满足  $t_{i+1} - t_i \geq \tau > 0$ , 切换序列  $q(t_i) \triangleq q(\mathbf{x}(t_i), t_i) \in \underline{N}$ , 使整个开关系统  $\dot{\mathbf{x}} = A_{q(t_i)}\mathbf{x}, t \in [t_i, t_{i+1}), i = 1, 2, \dots$ , 渐近稳定, 状态轨线  $\mathbf{x}(t)$  更快地趋近平衡点(原点).

## 3 开关策略设计及其稳定性分析

在文献[7]中所用性能指标为  $J(t, \rho) = \int_0^t e^{-\rho(t-s)} |\mathbf{x}_\rho(s)| ds, \rho > 0, \rho \in \underline{N}$ . 该指标不能反映系统在给定时间段上各子系统状态的衰减快慢和动态性能, 本文提出如下性能指标:

$$J(t, q) = |\mathbf{x}_q(t)| + \frac{\rho}{(|\dot{\mathbf{x}}_q(t)|)}, q \in \underline{N}, \quad (2)$$

这里  $|\cdot|$  为欧氏范数,  $\rho > 0$  为权系数,  $\mathbf{x}_q(t)$  为系统使用第  $q$  个子系统在  $t$  时刻的状态. 切换时间序列  $\{t_i\}$  由以下原则来确定:

$$t_{i+1} = \inf\{t | t - t_i \geq \tau : J(t, q(t_i)) > \min\{J(t, q) : q \in \underline{N}, q \neq q(t_i)\}\}, \quad (3a)$$

$$\forall i \geq 0, t_0 = 0.$$



开关切换序列:  $q(t_0) = q(0) \in \underline{N}$  为任意,  $t_{i+1}$  时刻  $q(t_{i+1})$  为

$$J(t_{i+1}, q(t_{i+1})) = \min\{J(t_{i+1}, q) : q \in \underline{N}\}. \quad (4a)$$

由假设1知,  $\forall i \in \underline{N}$ , 存在  $M_i > 0, \lambda_i > 0$ , 使  $|\mathbf{x}_i(t)| \leq M_i e^{-\lambda_i t} |\mathbf{x}_i(0)|, t \geq 0$ .

**定理1.** 设假设1成立. 由(3a), (4a)确定的开关切换系统  $\dot{\mathbf{x}} = A_{q(\mathbf{x}, t)} \mathbf{x}(t), q(\mathbf{x}(t), t) \in \underline{N}$  是指数渐近稳定的.

证明. 任给  $\mathbf{x}_0 \in R^n$ , 记  $\mathbf{x}(t)$  为整个开关系统(1)的解满足  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{q(t_i)}(t), t \in [t_i, t_{i+1}), i = 1, 2, \dots, \mathbf{x}_{q(t_i)}(t)$  为满足  $\dot{\mathbf{x}}_{q(t_i)}(t) = A_{q(t_i)} \mathbf{x}_{q(t_i)}(t), \mathbf{x}_{q(t_i)}(t_i) = \mathbf{x}_{q(t_{i-1})}(t_i), t \in [t_i, t_{i+1})$  的解. 显然只要证明存在  $M > 0, \lambda > 0$  使  $|\mathbf{x}(t)| \leq M e^{-\lambda t} |\mathbf{x}(0)|, t \geq 0$  即可. 在区间  $[0, t_1)$  上, 由于  $q(0)$  为任选, 故由假设1知, 在  $[0, t_1)$  有  $|\mathbf{x}(t)| = |\mathbf{x}_{q(0)}(t)| \leq M e^{-\lambda t} |\mathbf{x}(0)|, t \in [0, t_1), \lambda = \min_{1 \leq i \leq N} \{\lambda_i\}, M = \max_{1 \leq i \leq N} \{M_i\}$ .

假设  $\forall i \geq 2, j = 2, \dots, i$ , 有  $|\mathbf{x}(t)| = |\mathbf{x}_{q(t_{j-1})}(t)| \leq e^{-\lambda(t-t_{j-1})} |\mathbf{x}_{q(t_{j-2})}(t_{j-1})|, t \in [t_{j-1}, t_j)$  成立, 下证  $\forall t \in [t_i, t_{i+1})$ , 有  $|\mathbf{x}(t)| = |\mathbf{x}_{q(t_i)}(t)| \leq e^{-\lambda(t-t_i)} |\mathbf{x}_{q(t_{i-1})}(t_i)|$  成立. 事实上, 由式(2), (3a), (4a)知, 在时刻  $t_i, J(t_i, q(t_i)) < J(t_i, q), q(t_i) \neq q \in \underline{N}$ , 故下列情况必居其一:

$$\text{a) } |\mathbf{x}_{q(t_i)}(t_i)| < |\mathbf{x}_q(t_i)|, q \neq q(t_i); \quad \text{b) } |\dot{\mathbf{x}}_{q(t_i)}(t_i)| > |\dot{\mathbf{x}}_q(t_i)|, q \neq q(t_i).$$

若 a) 成立, 由  $\mathbf{x}_q(t)$  的连续性可知, 存在  $t'_{i+1} \in (t_i, t_{i+1}), q' \in \underline{N}, q' \neq q(t_i)$ , 使  $|\mathbf{x}_{q(t_i)}(t'_{i+1})| = |\mathbf{x}_{q'}(t'_{i+1})|$ , 且  $|\mathbf{x}_{q(t_i)}(t)| < |\mathbf{x}_q(t)|, t \in [t_i, t'_{i+1}), \forall q \neq q(t_i)$ , 否则可选取  $t_{i+1} = +\infty$ . 显然此时  $\forall q \in \underline{N}, q \neq q(t_i), |\dot{\mathbf{x}}_{q(t_i)}(t'_{i+1})| > |\dot{\mathbf{x}}_q(t'_{i+1})|$  否则  $|\dot{\mathbf{x}}_{q(t_i)}(t'_{i+1})| \leq |\dot{\mathbf{x}}_q(t'_{i+1})|$ , 根据  $t_{i+1}$  的定义必有  $t_{i+1} = t_i + \tau$ , 于是

$$|\mathbf{x}_{q(t_i)}(t)| \leq e^{-\lambda_i(t-t_i)} |\mathbf{x}_{q(t_i)}(t_i)| \leq e^{-\lambda(t-t_i)} |\mathbf{x}_{q(t_{i-1})}(t_i)|, t \in [t_i, t_{i+1}), \quad (5)$$

而  $|\dot{\mathbf{x}}_{q(t_i)}(t'_{i+1})| \geq |\dot{\mathbf{x}}_q(t'_{i+1})|, q \neq q(t_i)$ , 意味着  $J(t'_{i+1}, q(t_i)) \leq J(t'_{i+1}, q), q \neq q(t_i)$ . 可见, 必须  $t_{i+1} = t_i + \tau$ , 或必须  $t_{i+1} - t_i > \tau$ , 有  $J(t_{i+1}, q(t_i)) \leq J(t_{i+1}, q), q \neq q(t_i)$ . 当  $t_{i+1} - t_i > \tau$  时, 存在  $t'_{i+1} < t''_{i+1} \leq t_{i+1}, q(t_i) \neq q' \in \underline{N}$ , 使  $J(t''_{i+1}, q(t_i)) = J(t''_{i+1}, q'), J(t, q(t_i)) < J(t, q), \forall t \in [t_i, t''_{i+1}), q(t_i) \neq q \in \underline{N}$ , 根据  $t_{i+1}$  的定义便知必有  $t''_{i+1} = t_{i+1}$ , 故有(5)式成立.

若 b) 成立, 则存在  $q' \in \underline{N}, q' \neq q(t_i), \delta > 0$ , 使  $|\mathbf{x}_{q(t_i)}(t)| \geq |\mathbf{x}_{q'}(t)|, t \in [t_i, t_i + \delta]$ . 否则,  $\delta$  充分小便有 a) 成立. 由  $J(t, q(t_i)) < J(t, q), q(t_i) \neq q' \in \underline{N}, t \in [t_i, t_i + \delta]$ , 便知要么  $t_{i+1} = t_i + \tau$ , 要么  $t_{i+1} > t_i + \tau$ , 存在  $q' \in \underline{N}, q' \neq q(t_i)$ , 有  $J(t_{i+1}, q(t_i)) = J(t_{i+1}, q'), J(t, q(t_i)) < J(t, q), \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$  从而有式(5)成立. 至此可以说明无论哪种情况式(5)均成立.

由(5)式,  $\forall i = 2, \dots$ , 有  $|\mathbf{x}_{q(t_i)}(t)| \leq e^{-\lambda(t-t_i)} |\mathbf{x}_{q(t_{i-1})}(t_i)|, t \in [t_i, t_{i+1})$  且  $|\mathbf{x}_{q(t_{i-1})}(t)| \geq |\mathbf{x}_{q(t_i)}(t)|, t \in [t_{i-1}, t_i)$ . 同理对  $t \in [t_{i+1}, t_{i+2})$ , 有

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_{q(t_{i+1})}(t)| &\leq e^{-\lambda(t-t_{i+1})} |\mathbf{x}_{q(t_i)}(t_{i+1})| \leq \\ &e^{-\lambda(t-t_{i+1})} e^{-\lambda(t_{i+1}-t_i)} |\mathbf{x}_{q(t_{i-1})}(t_i)| = e^{-\lambda(t-t_i)} |\mathbf{x}_{q(t_{i-1})}(t_i)|. \end{aligned}$$

因此, 由归纳法可递推得出  $\forall n = 1, 2, \dots$ , 有

$$|\mathbf{x}(t)| = |\mathbf{x}_{q(t_n)}(t)| \leq M e^{-\lambda(t-t_0)} |\mathbf{x}_{q(t_0)}(t_0)| = M e^{-\lambda t} |\mathbf{x}(0)|, t \in [0, t_{n+1}).$$

## 4 收敛速度分析

从选择的开关序列的准则看, 由  $J(t, q(t_i)) < J(t, q), q \neq q(t_i)$ , 变化到  $J(t, q(t_i)) \geq$

$J(t, q(t_{i+1}))$ 所经过的时间为  $t_{i+1} - t_i$ . 若  $\tau > 0$ 适当小, 则由于  $N$  为有限集合通常都会有  $t_{i+1} - t_i \geq \tau$ , 故以下假设2对实际系统而言不会是非常严格的限制. 改变开关序列(3a)和切换序列(4a)的选取分别为

$$t_{i+1} = \inf\{t | t \geq t_i; J(t, q(t_i)) > \min\{J(t, q), q \in \underline{N}, q \neq q(t_i)\}\}. \quad (3b)$$

$$J(t_{i+1}, q(t_{i+1})) = \min\{J(t_{i+1}, q); q \in \underline{N}\}. \quad (4b)$$

假设2. 存在  $\tau > 0$ 使由(3b)确定的开关序列  $\{t_i\}$ , 有  $t_{i+1} - t_i \geq \tau, i \geq 1$ .

注. 在假设2之下, 由式(3b), (4b)确定的开关序列和切换序列将使整个系统(1)的运动轨线比任何备选子系统单独使用的运动轨线更快地收敛于原点.

**定义1.** 对稳定系统  $\dot{x} = Ax$ , 记初始值为  $x(0)$ 的解为  $x(t, x(0))$ , 如果  $\lambda > 0, k > 0$ 使  $|x(t, x(0))| \leq ke^{-\lambda t} |x(0)|, t \geq 0$ , 则称解  $x(t, x(0))$ 以速率  $\lambda$ 趋于零. 如果对区间  $[a, b), 0 \leq a < b$ , 有  $|x(t, x(a))| \leq ke^{-\lambda t} |x(a)|, t \in [a, b)$ , 则称解  $x(t, x(a))$ 在  $[a, b)$ 上以速率  $\lambda$ 向零衰减.

显然, 对二条指数衰减的曲线  $x(t), y(t)$ , 如果  $\bigcup_{i=0}^{\infty} [t_i, t_{i+1}) = R^+$ , 在每个  $[t_i, t_{i+1})$ 上  $x(t)$ 比  $y(t)$ 衰减的快, 则  $x(t)$ 的衰减速率不小于  $y(t)$ 的衰减速率. 以下利用衰减速率的概念, 说明在(3b), (4b)之下, 开关系统的解将比每个备选子系统本身的解要衰减的快.

**定理2.** 假设1, 2成立, 则存在  $M, \alpha > 0, \alpha \geq -\max\{\operatorname{Re}\sigma(A_i), i = 1, 2, \dots, N\}$ 使开关系统(1)的任何解  $x(t)$ 满足

$$|x(t)| \leq Me^{-\alpha(t-t_1)} |x_{q(t_0)}(t_1)|, \forall t \geq t_1. \quad (6)$$

证明略.

## 5 仿真结果

将本文的开关控制策略和文献[7]的开关策略分别应用于开关系统  $\dot{x} = A_i x, i = 1, 2$ ,

其中  $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -100 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 100 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$ , 则仿真得到的状态轨线如图1, 2所示, 其中

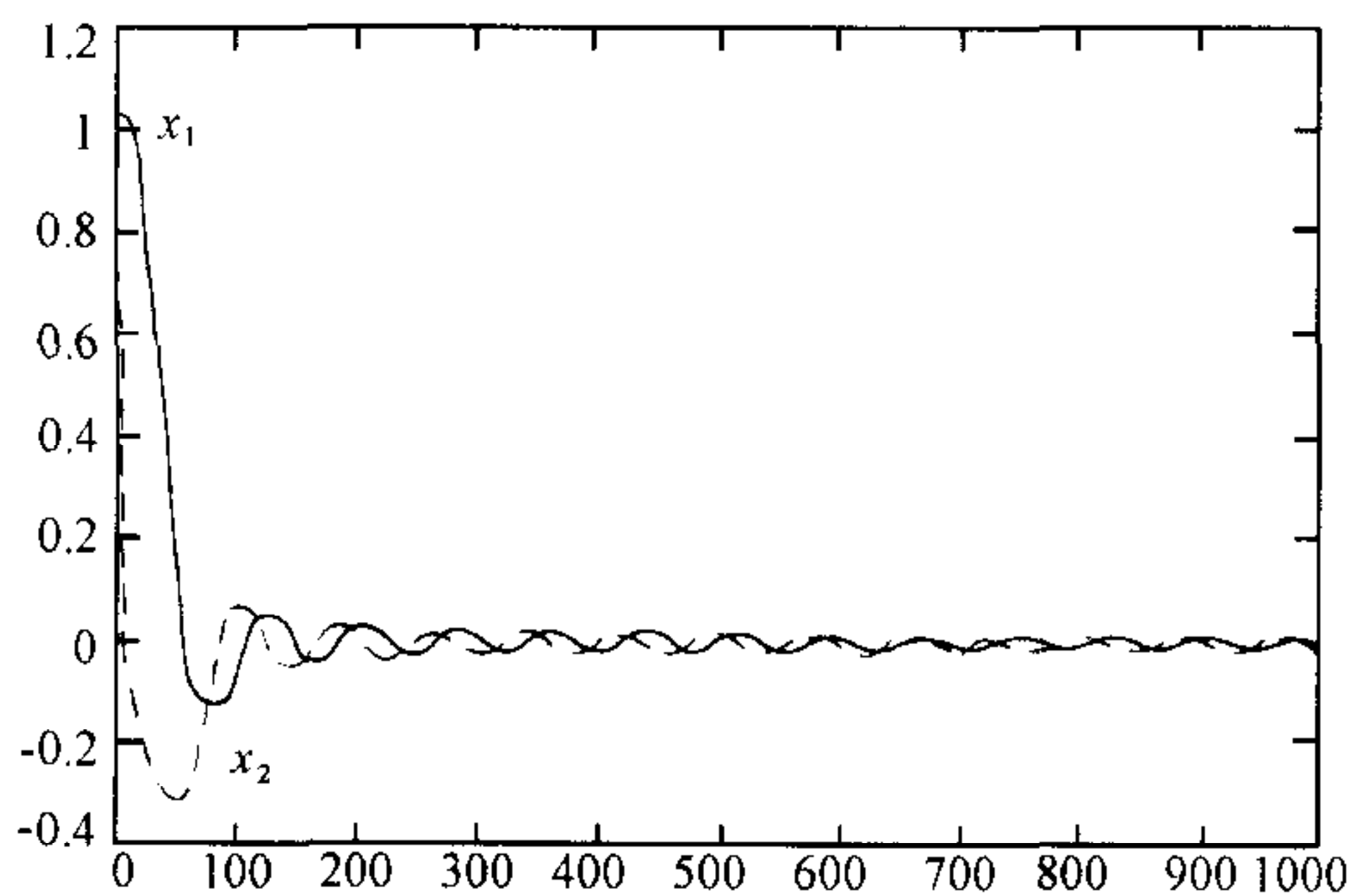


图1 9使用本文开关策略得到的状态轨线

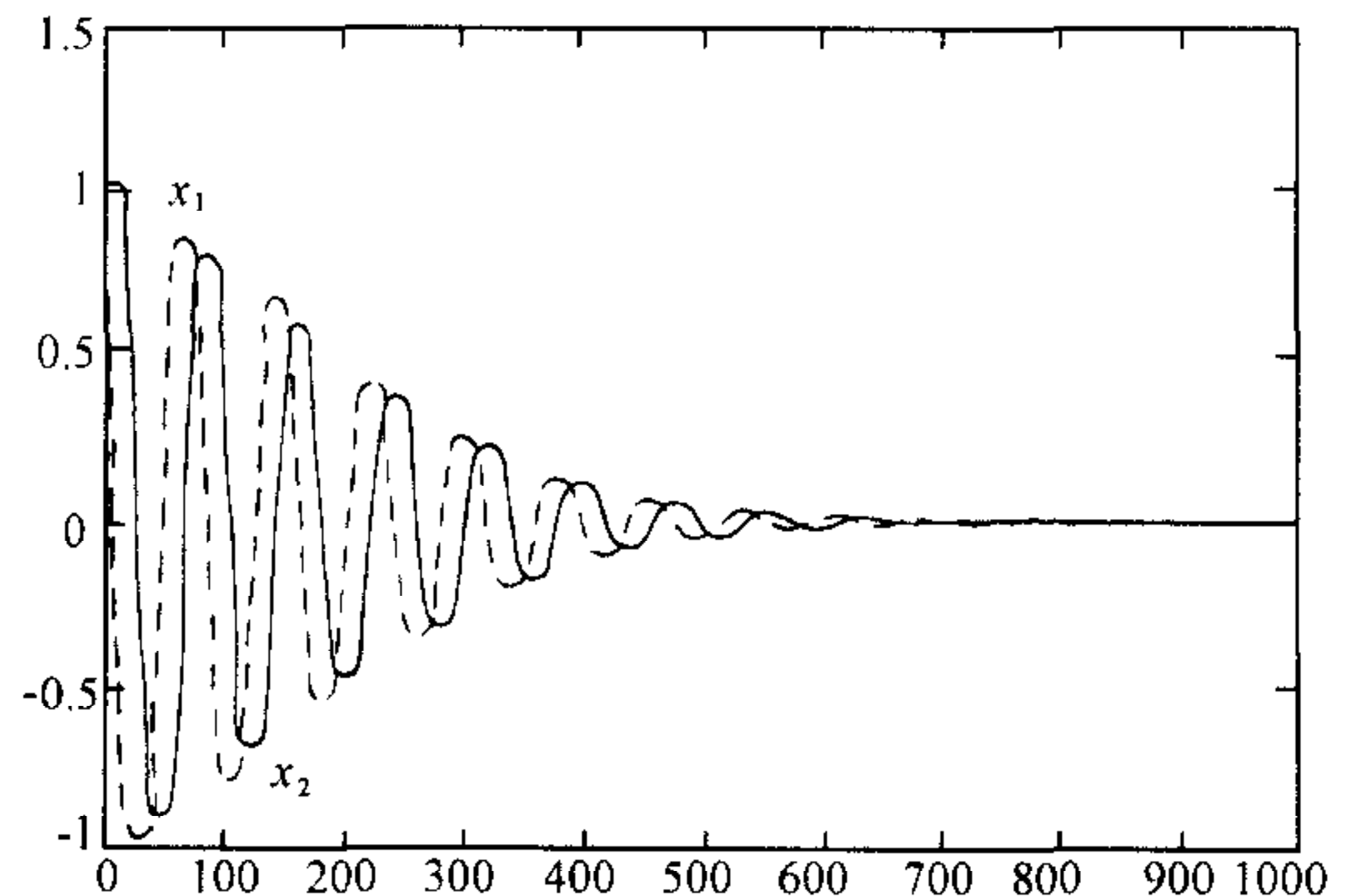


图2 使用文献[7]开关策略得到的状态轨线

图1为使用本文提供的开关策略得到的状态轨线图( $\lambda = 0.1$ ), 图2为使用文[7]的开关策略得到的状态轨线图( $\rho = 10$ ), 初始点均为  $(x_1(0), x_2(0))^T = (-1, 1)^T$ . 显然就趋向稳定点的速率而言, 本文提出的策略要优越.



## 参 考 文 献

- 1 Serrano C C, Ramaadra P J. Periodicity and chaos from switched flow system: contrasting examples of discretely controlled continuous system. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1993, **38**(1): 70~83
- 2 Branicky M S. Multiple Lyapunov function and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1998, **43**(4): 475~482
- 3 LM-Aguilar J, Garcia R A, Troarevsky M L. Exponential stability of a certain class of hybrid systems and digital feedback stabilizers. In: Proc. American Control Conference, Philadelphia, 1998. 713~717
- 4 Ezzine J, Haddad A H. Controllability and observability of hybrid systems. *Int. J. Control*, 1989, **49**(6): 2045~2055
- 5 Peleties P, DeCarlo R. Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions. In: Proc. American Control Conf., AZ, USA; Green Valleg, 1991. 1679~1984
- 6 Wicks M A, Peleties P, DeCarlo R A. Construction of piecewise Lyapunov function for stabilizing switched syetems. In: Proc. 33rd IEEE Conf. Desicion & Control, NT, USA; Piscataway, 1994. 3492~3497
- 7 Frommer H, Kulkarni S R, Ramadge P J. Controller switching based on output prediction errors. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1998, **43**(5): 596~607

**费树岷** 1961年生. 1985年获安徽大学理学硕士学位, 1995年获北京航空航天大学工学博士学位, 1995年至1997年在东南大学自动化所从事博士后研究工作. 现为东南大学自动化所教授. 主要研究兴趣: 非线性控制系统设计与综合、鲁棒控制、自适应控制、时滞系统的设计与综合等.

**王泽宁** 1975年生. 1997年毕业于东南大学自动控制系, 作为硕博连读研究生, 现在东南大学自动化所攻读博士学位. 主要研究兴趣: 混杂系统的控制与综合、开关系统控制等.

**冯纯伯** 1928年生. 1950年毕业于浙江大学电机系, 1953年毕业于哈尔滨工业大学研究生班, 1958年获前苏联技术科学副博士学位. 现任东南大学教授、中国自动化学会常务理事、俄罗斯联邦自然科学院外籍院士、中国科学院院士. 目前主要从事系统建模、自适应、鲁棒及智能化控制理论及应用、机器人控制等方面的研究.