



Wiener 去卷滤波器设计新方法¹⁾

邓自立 郭金柱 孙书利

(黑龙江大学应用数学研究所 哈尔滨 150080 E-mail: dzl@hlju.edu.cn)

摘 要 应用现代时间序列分析方法,提出了多通道 Wiener 去卷滤波器设计的一种新的时域方法. 它的特点是基于 ARMA 新息模型可简单地得到渐近稳定的 Wiener 去卷滤波器,避免了求解 Diophantine 方程,减小了计算负担,且可统一处理去卷滤波、平滑和预报问题. 仿真例子说明了其有效性.

关键词 反卷积, Wiener 去卷滤波器, 现代时间序列分析方法, 时域方法.

NEW APPROACH TO WIENER DECONVOLUTION FILTERS DESIGN

DENG Zi-Li GUO Jin-Zhu SUN Shu-Li

(*Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University, Harbin 150080*)

(E-mail: dzl@hlju.edu.cn)

Abstract Using the modern time series analysis method, a new time-domain approach to multichannel Wiener deconvolution filters design is presented. Its features are that based on the autoregressive moving average (ARMA) innovation model, asymptotically stable Wiener deconvolution filters can simply be obtained, the solution of Diophantine equations is avoided so that the computational burden may be reduced, and it can handle the deconvolution filtering, smoothing and prediction problems in a unified framework. A simulation example shows its effectiveness.

Key words Deconvolution, Wiener deconvolution filter, modern time series analysis method, time domain approach.

1 引言

由系统输出估计其输入叫反卷积(Deconvolution)或去卷. 它广泛应用于油田地震勘

1) 国家自然科学基金(69774019)资助项目.

探、通讯和信号处理等领域. 用流行的频域多项式方法^[1~3]设计 Wiener 去卷滤波器, 要求解 Diophantine 方程, 且为了保证其渐近稳定性, 通常要求解两个耦合的 Diophantine 方程^[2,3]. 虽然文献[4,5]用时域现代时间序列分析方法, 采用增广状态方法和在新息滤息滤波器形式下的白噪声估值器^[6], 提出了在 ARMA 新息滤波器形式下的多通道最优去卷滤波器, 但仍要求解 Diophantine 方程, 且对非平稳输入它是非渐近稳定的. 本文避免了采用增广状态方法, 将信号 Wiener 去卷滤波问题归结为一类带多重观测滞后系统的状态估计问题, 采用在 Wiener 滤波器形式下的白噪声估值器, 由非递推状态滤波器的递推变形, 提出了新的渐近稳定的多通道 Wiener 去卷滤波器, 避免了求解 Diophantine 方程, 构成了 Wiener 去卷滤波的一种新的时域方法.

2 问题阐述和引理

考虑多通道最优去卷问题^[1~5]

$$y(t) = \Phi^{-1}\Psi s(t) + \eta(t) + \xi(t), \quad (1)$$

$$s(t) = A^{-1}C e(t), \eta(t) = P^{-1}R v(t), \quad (2)$$

其中 $y(t) \in R^m$ 为系统输出; $s(t) \in R^n$ 为输入; $\eta(t)$ 为有色观测噪声; $\xi(t)$ 为白色观测噪声; Φ, Ψ, A, C, P, R 均为单位滞后算子 q^{-1} ($q^{-1}x(t) = x(t-1)$) 的多项式矩阵. 形如 $X = X(q^{-1}) = X_0 + X_1q^{-1} + \dots + X_{n_x}q^{-n_x}$, $n_x = \deg(X)$ 为阶次; X_i 为系数阵. 设首系数阵 $\Phi_0 = I_m, A_0 = I_n, P_0 = I_m, I_m$ 为 $m \times m$ 单位阵. 定义 $X_i = 0 (i > n_x)$.

假设1. $\xi(t) \in R^m; e(t) \in R^p; v(t) \in R^r$ 是零均值, 方差阵各为 $Q_\xi > 0; Q_e, Q_v$ 的白噪声 $\xi(t)$ 独立于 $e(t), v(t)$; 而 $e(t), v(t)$ 是相关的^[3,5]

$$E \left\{ \begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^T(j) & v^T(j) \end{bmatrix} \right\} = Q \delta_{ij}, Q = \begin{bmatrix} Q_e & S \\ S^T & Q_v \end{bmatrix} > 0, \quad (3)$$

其中 E 为均值号, T 为转置号, $\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0 (i \neq j)$. 引入左素分解

$$P\Phi^{-1} = \tilde{\Phi}^{-1}\tilde{P}, \quad \tilde{P}\Psi A^{-1} = \bar{A}^{-1}B, \quad (4)$$

带 $\tilde{\Phi}_0 = I_m, \tilde{P}_0 = I_m, \bar{A}_0 = I_m$.

假设2. $(\bar{A}, BC, \bar{A}\tilde{\Phi}R, \bar{A}\tilde{\Phi}P)$ 左素, 且

$$\text{rank}[(BC, \bar{A}\tilde{\Phi}R)Q^{\frac{1}{2}}, \bar{A}\tilde{\Phi}PQ^{\frac{1}{2}}] = m, \quad (5)$$

而 $[BC, \bar{A}\tilde{\Phi}R]Q^{\frac{1}{2}}, \bar{A}\tilde{\Phi}PQ^{\frac{1}{2}}$ 无行列式的零点在单位圆上的左因式.

将式(3)代入式(1), 利用式(4)和假设2, 并引入新的观测过程

$$z(t) = \tilde{\Phi}P y(t). \quad (6)$$

由谱分解可得 ARMA 新息模型

$$\bar{A}z(t) = D\varepsilon(t), \quad (7)$$

其中 D 是稳定的(即 $\det D(x)$ 的零点全在单位圆外), $D_0 = I_m$, 新息 $\varepsilon(t) \in R^m$ 是零均值、方差阵为 Q_ε 的白噪声, 且有关系

$$D\varepsilon(t) = BC e(t) + \bar{A}\tilde{\Phi}R v(t) + \bar{A}\tilde{\Phi}P\xi(t), \quad (8)$$

其中 D, Q_ε 可用 Gevers 和 Wouters^[7]算法求得.

Wiener 去卷滤波问题是: 设 $t_0 = -\infty$, 基于观测 $(y(t+N), y(t+N-1), \dots)$ 求输

入信号 $s(t)$ 的稳态最优(即线性最小方差)滤波器 $\hat{s}(t|t+N)$, 它具有以观测 $y(t+N)$ 作为输入的传递函数阵表达式, 叫 Wiener 去卷滤波器. 对 $N=0, N>0$ 或 $N<0$, 各称其为 Wiener 去卷滤波器、平滑器或预报器.

信号 $s(t)$ 有状态空间模型

$$\mathbf{x}(t+1) = \underline{A}\mathbf{x}(t) + \underline{C}\mathbf{e}(t), \quad (9)$$

$$s(t) = H^0\mathbf{x}(t) + C_0\mathbf{e}(t), \quad (10)$$

其中定义 $n_0 = \max(n_a, n_c)$,

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -A_1 & & \\ \vdots & I_{(n_0-1)n} & \\ -A_{n_0} & 0 \cdots 0 & \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} C_1 - A_1C_0 \\ \vdots \\ C_{n_0} - A_{n_0}C_0 \end{bmatrix}, \quad H^0 = [I_n \ 0 \cdots 0]. \quad (11)$$

将式(10)代入式(1)并利用式(4),(6)可得观测方程

$$\mathbf{z}(t) = H(q^{-1})\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t), \quad (12)$$

其中定义最大观测滞后 $\tau = n_{\bar{r}} + n_{\psi}$, 且

$$H(q^{-1}) = \tilde{P}\Psi H^0 = H_0 + H_1q^{-1} + \cdots + H_{\tau}q^{-\tau}, \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \tilde{P}\Psi C_0\mathbf{e}(t) + \tilde{\Phi}R\mathbf{v}(t) + \tilde{\Phi}P\xi(t). \quad (14)$$

系统(9),(12),(14)构成带多重观测滞后和带有色观测噪声系统. 对式(10)两边取射影运算^[5]有

$$\hat{s}(t|t+N) = H^0\hat{\mathbf{x}}(t|t+N) + C_0\hat{\mathbf{e}}(t|t+N). \quad (15)$$

若能求得 Wiener 状态滤波器 $\hat{\mathbf{x}}(t|t+N)$ 和白噪声滤波器 $\hat{\mathbf{e}}(t|t+N)$, 则由式(15)便可求得 Wiener 去卷滤波器.

引理1. 在 Wiener 滤波器形式下的白噪声估值器为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t+N) = L_N^{\theta} \tilde{A}\tilde{D}^{-1}\tilde{\Phi}P\mathbf{y}(t+N), \quad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{e}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}, \quad (16)$$

其中 \tilde{A}, \tilde{D} 由如下右素分解决定

$$D^{-1}\bar{A} = \tilde{A}\tilde{D}^{-1}, \quad (17)$$

带 $\tilde{A}_0 = I_m, \tilde{D}_0 = I_m$, 且定义 $L_N^{\theta} = 0 (N < 0)$; 对 $N \geq 0$ 定义

$$L_N^e = [Q_e \Pi_N^e + S \Pi_N^v] Q_e^{-1} q^{-N}, \quad L_N^v = [Q_v \Pi_N^v + S^T \Pi_N^e] Q_e^{-1} q^{-N}, \quad (18)$$

$$L_N^{\xi} = Q_{\xi} \Pi_N^{\xi} Q_e^{-1} q^{-N}, \quad (18)$$

$$\Pi_N^{\theta} = (F_0^{\theta} + F_1^{\theta}q + \cdots + F_N^{\theta}q^N)^T, \quad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{e}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}, \quad (19)$$

其中 q 为单位前进算子, $q\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t+1)$, F_i^{θ} 可递推为

$$F_i^{\theta} = -DF_{i-1}^{\theta} - \cdots - D_{n_d} F_{i-n_d}^{\theta} + G_i^{\theta}; F_i^{\theta} = 0 (i < 0), \quad (20)$$

其中定义 $G^e = BC, G^v = \bar{A}\tilde{\Phi}R, G^{\xi} = \bar{A}\tilde{\Phi}P$.

证明. 文献[6]证明了白噪声估值器

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t|t+N) = L_N^{\theta} \boldsymbol{\varepsilon}(t+N), \quad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{e}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}. \quad (21)$$

由式(7)有 $\boldsymbol{\varepsilon}(t+N) = D^{-1}\bar{A}\mathbf{z}(t+N)$, 将其代入式(21), 利用式(17),(6)得式(16).

引理2. $\mathbf{z}(t+i)$ 有最优预报器

$$\hat{\mathbf{z}}(t+i|t) = J_i \tilde{D}^{-1}\tilde{\Phi}P\mathbf{y}(t), \quad (22)$$

其中 J_i 由下式决定:

$$\tilde{D} = E_i \tilde{A} + q^{-i}J_i, (i > 0); \quad J_i = \tilde{D}q^i, (i \leq 0), \quad (23)$$

带 $\deg(E_i) = i - 1, \deg(J_i) = \max(n_a - 1, n_d - i)$.

证明. 由式(7)有 Åström 预报器^[8]

$$\hat{z}(t+i|t) = J_i \tilde{D}^{-1} z(t), \quad (24)$$

其中 \tilde{D}, J_i 由式(17), (23)定义. 将式(6)代入式(24)得式(22).

3 Wiener 状态滤波器

由式(9), (12)迭代可得带单重观测滞后系统

$$x(t+1) = \underline{A}x(t) + \underline{C}e(t), \quad (25)$$

$$z(t+\tau) = \underline{H}x(t) + \delta(t+\tau), \quad (26)$$

其中常阵 \underline{H} 和有色观测噪声 $\delta(t+\tau)$ 定义为

$$\underline{H} = H_0 \underline{A}^\tau + H_1 \underline{A}^{\tau-1} + \dots + H_{\tau-1} \underline{A} + H_\tau, \quad (27)$$

$$\delta(t+\tau) = \alpha(t+\tau) + \sum_{s=0}^{\tau-1} \sum_{k=0}^{\tau-1-s} H_s \underline{A}^{\tau-1-s-k} \underline{C}e(t+k). \quad (28)$$

假设3. $(\underline{A}, \underline{H})$ 为完全可观对, β 为可观性指数, 即如下 Ω 为列满秩矩阵:

$$\Omega = [\underline{H}^\top, (\underline{H} \underline{A})^\top, \dots, (\underline{H} \underline{A}^{\beta-1})^\top]^\top. \quad (29)$$

于是存在伪逆 $\Omega^\# = (\Omega^\top \Omega)^{-1} \Omega^\top$, 可将 $\Omega^\#$ 分块表示为

$$\Omega^\# = [\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{\beta-1}]. \quad (30)$$

定理1. 系统(25), (26)在假设1~3下, 有渐近稳定的 Wiener 状态滤波器

$$\hat{x}(t|t+N) = K_N \tilde{D}^{-1} \tilde{\Phi} P y(t+N), \quad (31)$$

$$K_N = \sum_{i=0}^{\beta-1} \Omega_i [J_{\tau+i-N} - \Lambda_i^N \tilde{A} - \Delta_i^N \tilde{A}], \quad (32)$$

$$\Lambda_i^N = \sum_{j=0}^{i-1} \underline{H} \underline{A}^{i-1-j} \underline{C} L_{N-j}^e; \Lambda_0^N = 0, \quad (33)$$

$$\Delta_i^N = \sum_{j=0}^{n_c} C'_j L_{N-\tau-i+j}^e + \sum_{j=0}^{n_r} R'_j L_{N-\tau-i+j}^v + \sum_{j=0}^{n_{p'}} P'_j L_{N-\tau-i+j}^{\xi} + \sum_{s=0}^{\tau-1} \sum_{k=0}^{\tau-1-s} H_s \underline{A}^{\tau-1-s-k} \underline{C} L_{N-i-k}^e, \quad (34)$$

其中定义 $C' = \tilde{P} \Psi C_0, R' = \tilde{\Phi} R, P' = \tilde{\Phi} P$.

证明. 由式(25), (26)迭代, 应用式(29), (30)和射影运算可得非递推最优状态滤波器^[9]

$$\hat{x}(t|t+N) = \sum_{i=0}^{\beta-1} \Omega_i [\hat{z}(t+\tau+i|t+N) - \sum_{j=0}^{i-1} \underline{H} \underline{A}^{i-1-j} \underline{C} \hat{e}(t+j|t+N)] - \delta(t+\tau+i|t+N), \quad (35)$$

其中规定 $\underline{A}^i = 0 (i < 0)$ 且 $j \geq 0$. 由式(14), (28), 在式(28)两边取射影运算^[5]有 $\delta(t+\tau+i|t+N)$ 是一些白噪声估值器的线性组合. 将式(16), (22)代入式(35)整理后得式(31)~(34). 由 D 的稳定性和式(17)引出 \tilde{D} 是稳定的, 故式(31)是渐近稳定的.

4 多通道 Wiener 去卷滤波器

定理2. 系统(1), (2)在假设1~3下, 有渐近稳定的 Wiener 去卷滤波器.

$$\hat{s}(t|t+N) = \bar{D}_N^{-1} \bar{K}_N \tilde{\Phi} P y(t+N), \quad (36)$$

或等价地有 ARMA 递推形式

$$\bar{D}_N \hat{s}(t|t+N) = \bar{K}_N \tilde{\Phi} P y(t+N), \quad (37)$$

其中 \bar{D}_N, \bar{K}_N 由如下左素分解决定

$$\bar{D}_N^{-1} \bar{K}_N = \tilde{K}_N \tilde{D}^{-1}, \quad (38)$$

带 $\bar{D}_{N_0} = I_n$, 且定义

$$\tilde{K}_N = H^0 K_N + C_0 L_N^e \tilde{A}, \quad (39)$$

其中 K_N 由式(32)计算.

证明. 将式(16), (31)代入式(15)有 Wiener 去卷滤波器

$$\hat{s}(t|t+N) = \tilde{K}_N \tilde{D}^{-1} \tilde{\Phi} P y(t+N). \quad (40)$$

将式(38)代入式(40)得式(36), (37). 由 \tilde{D} 的稳定性和式(38)引出 \bar{D}_N 是稳定的, 故式(36)或(37)是渐近稳定的.

推论1. 多通道 Wiener 去卷滤波器可表为

$$\det \tilde{D} \hat{s}(t|t+N) = \tilde{K}_N \text{adj} \tilde{D} \tilde{\Phi} P y(t+N). \quad (41)$$

证明. 将 $\tilde{D} = \text{adj} \tilde{D} / \det \tilde{D}$ 代入式(40)得式(41).

推论2. 单通道 Wiener 去卷滤波器为

$$D \hat{s}(t|t+N) = \tilde{K}_N \Phi P y(t+N), \quad (42)$$

其中 \tilde{K}_N 由式(39)计算, 但应置 $\tilde{A} = A, H^0 = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \beta = n$.

证明. 对单通道系统 ($m = n = p = r = 1$), 有 $\tilde{A} = A, \tilde{D} = D, \beta = n$, 由式(40)得(42).

5 仿真例子

考虑两通道系统(1), (2), 其中 $s(t) = [s_1(t), s_2(t)]^T, \xi(t), e(t), v(t)$ 是零均值、方差阵各为 $Q_\xi = I_2, Q_e = I_2, Q_v = I_2$ 的独立高斯白噪声. $\Phi = I_2 + \Phi_1 q^{-1}, \Psi = I_2 q^{-1}, A = I_2 + A_1 q^{-1}, C = C_1 q^{-1}, P = I_2 + P_1 q^{-1}, R = I_2 q^{-1}$, 且

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} -0.6 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.95 & 0 \\ 0.2 & -0.7 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ -0.5 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

取 $N = 0$ 应用定理2可求得 Wiener 去卷滤波器为

$$\bar{D}_0 \hat{s}(t|t) = \bar{K}_0 \tilde{\Phi} P y(t), \quad (43)$$

其中 $\tilde{\Phi} = I_2 + \tilde{\Phi}_1 q^{-1}, \bar{D}_0 = I_2 + \bar{D}_{01} q^{-1} + \bar{D}_{02} q^{-2} + \bar{D}_{03} q^{-3}$, 且

$$D_{01} = \begin{bmatrix} -0.285465 & 0.306578 \\ -0.003221 & 0.379135 \end{bmatrix}, \quad D_{02} = \begin{bmatrix} -0.031103 & -0.054986 \\ 0.092248 & -0.282026 \end{bmatrix},$$

$$D_{03} = \begin{bmatrix} 0.079839 & -0.061392 \\ 0.035609 & -0.089752 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} -0.6 & 0 \\ -0.933333 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_0 = \begin{bmatrix} 0.330195 & 0.047944 \\ -0.148902 & 0.230101 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

仿真结果如图1和图2所示.

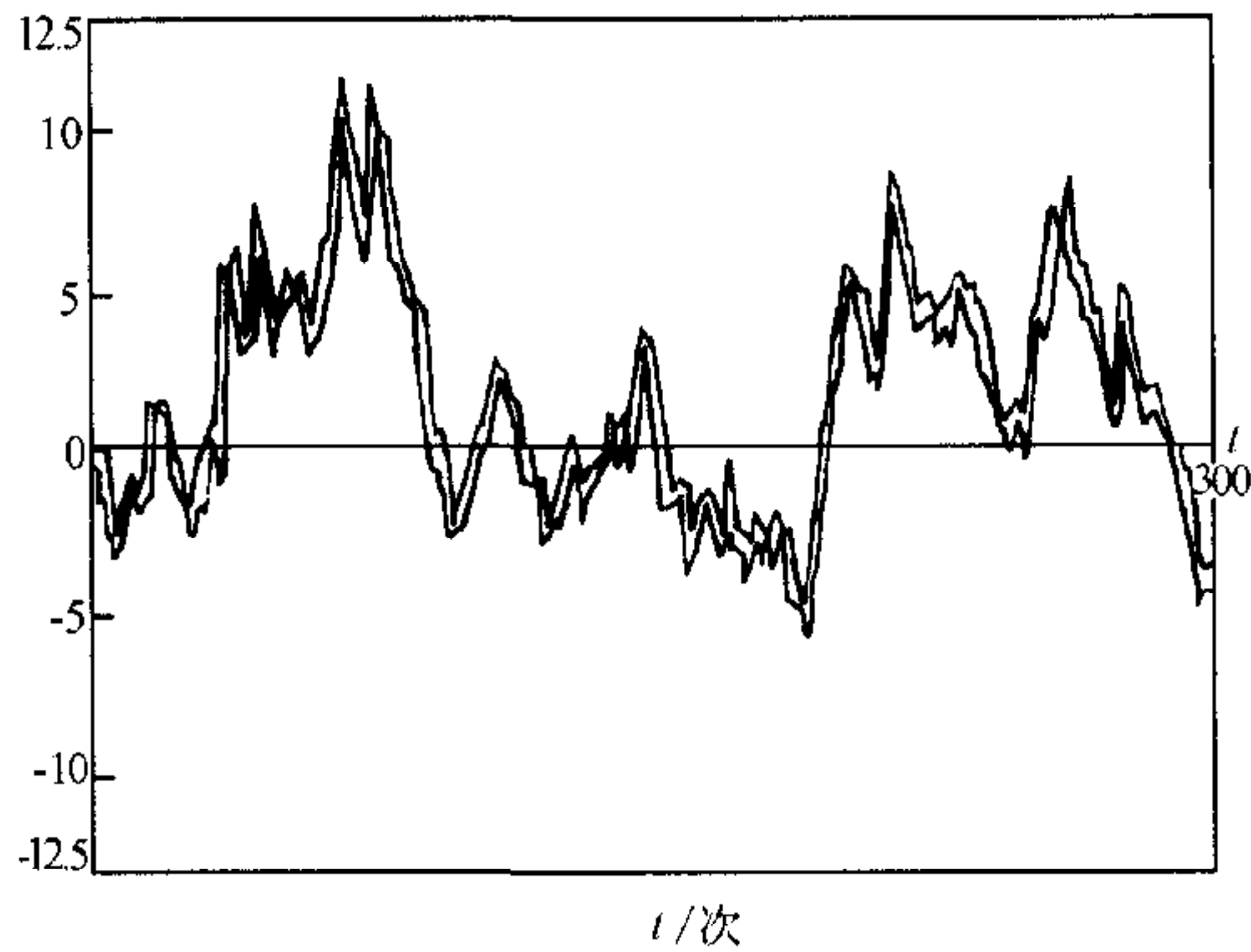


图1 $s_1(t)$ 和 Wiener 去卷滤波器
 $\hat{s}_1(t|t)$

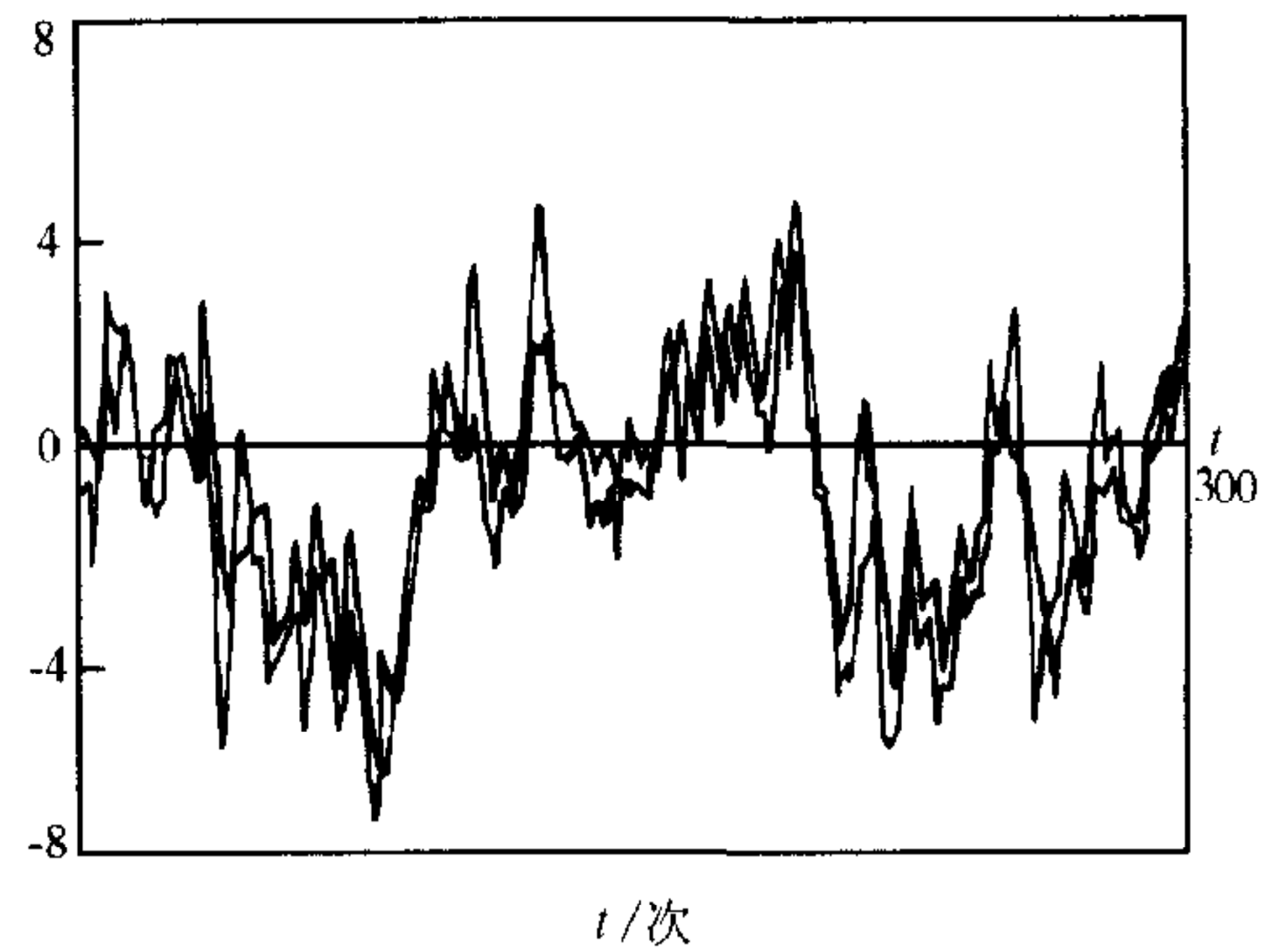


图2 $s_2(t)$ 和 Wiener 去卷滤波器
 $\hat{s}_2(t|t)$

参 考 文 献

- 1 Ahlen A, Sternad M. Wiener filter design using polynomial equations. *IEEE Trans. Signal Process.*, 1991, **39** (11): 2387~2399
- 2 Chisci L, Mosca E. MMSE deconvolution via polynomial methods and its dual LQG regulation. *Automatica*, 1994, **30**(7):1197~1201
- 3 Grimble M J. Multichannel optimal linear deconvolution filters and strip thickness estimation from gauge measurements. *Trans. of the ASME, J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1995, **117**: 165~172
- 4 邓自立,刘伟华,石莹.应用 Diophantine 方程的多通道最优去卷. *自动化学报*,1999,**25**(3):380~383
- 5 Deng Z L. Multichannel optimal deconvolution filters using modern time series analysis method. In: Proc. of 14th IFAC World Congress, Beijing: 1999. 1~6
- 6 Deng Z L, Zhang H S, Liu S J *et al.* Optimal and self-tuning white noise estimators with applications to deconvolution and filtering problems. *Automatica*, 1996, **32**(2): 199~216
- 7 Gevers M, Wouters W R E. An innovation approach to the discrete-time stochastic realization problem. *Journal A*, 1978, **19**(2): 90~109
- 8 奥斯特隆姆 K J. 随机控制理论导论. 北京:科学出版社,1983
- 9 邓自立,许燕.一种统一的 Wiener 状态估值器. *信息与控制*,1999,**27**(5):336~341

邓自立 见本刊2000年第2期.

郭金柱 1955年生,1980年毕业于黑龙江大学数学系,现为黑龙江大学自动化系副教授.主要研究领域为信号处理、最优滤波、系统仿真.