第 27 卷 第 5 期
2001 年 9 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 5
Sept., 2001

短文

满秩仿 Hermite 多项式矩阵的 J_- 谱分解计算[1)]

叶庆凯 黄 琳
(北京大学力学与工程科学系 北京 100871)
(E-mail: yqk@pku.edu.cn)

摘 要 基于仿等价变换实现了满秩仿 Hermite 多项式矩阵的 J_- 谱分解计算. 对于一个满秩的仿 Hermite 多项式矩阵, 首先用仿等价变换将其变换为单模的满秩仿 Hermite 多项式矩阵, 进一步再用仿等价变换将其变换为常数满秩矩阵, 最后变换为 J_- 矩阵. 将这些变换矩阵积累起来, 得到满秩仿 Hermite 多项式矩阵的 J_- 谱分解. 在作者发展的多项式矩阵运算程序库的基础上, 给出了实现所提出的计算方法的算法. 数例表明, 该方法是有效的.

关键词 多项式矩阵, J_- 谱分解, 仿等价变换.

THE CALCULATION OF J_-SPECTRUM FACTORIZATION FOR THE FULL RANK PARA-HERMITE POLYNOMIAL MATRIX

YE Qing-Kai HUANG Lin
(*Mechanics Department, Peking University, Beijing* 100871)
(E-mail: yqk@pku.edu.cn)

Abstract Using the para-equivalent transform, we propose a method for calculating the J-spectrum factorization for the full rank para-Hermite polynomial matrix. For a full rank para-Hermite polynomial matrix, we transform it into a uni-module full rank para-Hermite polynomial matrix by para-equivalent transform at first, then into a full rank constant symmetric matrix, and into a J_- matrix at last. Accumulating these transforms, we obtain the J_-spectrum factorization. Based on the programming package for polynomial matrix developed by the authors, an algorithm which realizes the proposed method is given. The numerical example indicates this method is useful.

Key words Polynomial matrix, J_-spectrum factorization, para-equivalent transform.

1) 国家自然科学基金资助(69974003).
收稿日期 1999-11-02 收修改稿日期 2000-05-25

1 引言

仿 Hermite 多项式矩阵的 J- 谱分解在讨论 H 无穷鲁棒控制设计等问题时起着重要作用. 至今,J- 谱分解的计算主要有两大类方法:一类是先通过最小实现转换为状态空间形式再经过求解代数 Riccati 方程来实现[1];另一类是通过建立 McMillan 型来实现[2]. 但是,这两类方法在计算机上实现时都在数值稳定性方面遇到一些困难. 本文在作者发展的多项式矩阵运算程序库的基础上,给出了直接用仿等价变换实现满秩多项式矩阵 J- 谱分解的算法. 数例表明,该方法是有效的,有较好的数值稳定性.

定义 1. 多项式矩阵$A(s)$称为仿 Hermite 多项式矩阵,系指有 $A(s)=A'(-s)$且它的行列式的实部为零的根均有偶数重数.

定义 2. 设 $A(s)$是仿 Hermite 多项式矩阵,$T(s)$为非奇异多项式矩阵,则称关系 $C(s)=T'(-s)A(s)T(s)$为仿合同变换. 特别,若 $T(s)$为单模矩阵,则称上述关系为仿等价变换.

显然,仿 Hermite 矩阵经仿合同变换后仍为仿 Hermite 矩阵. 仿合同变换不改变多项式矩阵的秩.

定义 3[3]. 满秩多项式矩阵 $A(s)$的次数为它的不变因子的次数之和. 若 $A(s)$为方阵,它的次数即它的行列式的次数.

显然,单模矩阵的次数为零;两个满秩多项式矩阵的乘积若仍是满秩的,则其次数等于这两个矩阵的次数之和;仿等价变换不改变满秩仿 Hermite 矩阵的次数.

容易看出,满秩列(行)正规多项式矩阵[4]的次数等于它的各列(行)次的和,而满秩非列(行)正规多项式矩阵的次数则小于它的各列(行)次的和.

定义 4. 设 $A(s)$为满秩仿 Hermite 矩阵,若存在一个 J- 矩阵以及一个零点均在闭左半平面内的多项式矩阵 $W(s)$,使得 $A(s)=W'(-s)JW(s)$,其中 $J=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix}$,则称 $A(s)$可 J- 谱分解,$W(s)$为 $A(s)$的 J- 谱因子.

定义 5. 设有两个长度相同的矢量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$和 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,其中 $a_i,b_i,i=1,\cdots,n$ 均为正整数. 先将它们分别按降序排列得到$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$和$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$. 若存在整数 m,使得 $c_i=d_i,i=1,\cdots,m<n$,而 $c_{m+1}>d_{m+1}$,则称 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}<\boldsymbol{a}$.

例如,整型矢量$(\mathbf{2},\mathbf{5},\mathbf{4})$大于整型矢量$(\mathbf{3},\mathbf{5},\mathbf{3})$.

一个多项式矩阵的列次矢量是正整型矢量. 按上述定义 5,可以比较两个列次矢量的大小. 显然,对于一个给定的列次矢量,小于它的列次矢量只有有限个.

2 主要结果

引理 1[5]. 设 $A(s)$为满秩仿 Hermite 单模矩阵,则存在单模矩阵 $T(s)$使得 $C=T'(-s)A(s)T(s)$为实的非奇异常数对称矩阵.

证明. 设 $A(s)$的列次为 $d_1,\cdots,d_n$,各列次之和为 t,列次项系数阵为 R.

若 $A(s)$为列正则,由于 $A(s)$是单模矩阵,其次数为零,因而其各列次均为零,它是一个常数矩阵. 再考虑到 $A(s)$是满秩仿 Hermite 单模矩阵,因而它是一个非奇异常数对称矩阵.

现设 $A(s)$非列正则,R 为奇异阵,即 R 中的某些列是线性相关的. 因而存在非零矢量 $\boldsymbol{c}$

使得 $Rc=0$. 设对应于 $\boldsymbol{c}$ 的非零元素的各个 d_i 中以 d_k 为最大.

如下构造变换矩阵 $T(s)$:用

$$\boldsymbol{g}(s)=\begin{bmatrix} s^{d_k-d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^{d_k-d_n} \end{bmatrix}\boldsymbol{c} \tag{1}$$

替换掉单位矩阵中的第 k 列,由于 $T(s)$的第 k 行 k 列元素为常数,$T(s)$是单模矩阵. 用这样构造的 $T(s)$对 $A(s)$进行仿等价变换,得到 $C(s)=T'(-s)A(s)T(s)$. 在这样的变换下,$A(s)$中只有第 k 列和第 k 行的元素有变化. $A(s)$的第 k 列中各元素的 s^{d_k}项将被消去,它的第 k 列的各元素的最高次数将低于 d_k. 由仿 Hermite 矩阵的性质,它的第 k 行的各元素的最高次数也低于 d_k. 因而 $C(s)$的第 k 列的列次低于 $A(s)$的第 k 列的列次,而其它列的列次或者不变,如果有变化,其列次将不会高于该列的第 k 行元素的次数,即不会高于 d_k-1. 这样,在 $A(s)$非列正则的情况下,可以找到一个仿等价变换使变换后的矩阵 $C(s)$的列次矢量小于原矩阵 $A(s)$的列次矢量. 只要矩阵还不是列正则的,就可以经仿等价变换使它的列次矢量继续变小,直至列次项系数阵 R 成为非奇异的. 按前面的分析,此时它是一个非奇异常数对称矩阵. 引理得证.

推论. 设 $A(s)$为满秩仿 Hermite 单模矩阵,则存在单模矩阵 $T(s)$使得 $C=T'(-s)A(s)T(s)$为 J_-矩阵.

证明. 由引理 1,存在单模矩阵 $T_1(s)$使得 $C_1=T_1'(-s)A(s)T_1(s)$是非奇异常数对称矩阵. 从而存在非奇异常数矩阵 U 使得 $C=U'C_1U$ 为 J_-矩阵. 由于 $T_1(s)U$ 仍为单模矩阵,推论得证.

引理 2[5]. 设 $A(s)$为满秩仿 Hermite 多项式矩阵,它的特征根为 $s_1,s_2,\cdots,s_n,-s_1,-s_2,\cdots,-s_n$, 其中 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 均具有非正实部,则存在单模矩阵 $T(s)$使得 $C(s)=T'(-s)A(s)T(s)$的某一列的各元素均含有因子 $s-s_i$(当 s_i 为实数时)或$(s-s_i)(s-\bar{s}_i)$(当 s_i 为复数时),而相应行的各元素均含有因子$s+s_i$或$(s+s_i)(s+\bar{s}_i)$.

实际计算时,当 s_i 为实数时,可对 $A(s_i)$进行奇异值分解,得到右奇异矢量阵 V,取它的最后一列为 $\boldsymbol{v}$. 用 $\boldsymbol{v}$ 替换掉单位矩阵中的第 k 列得到变换矩阵 T. 考虑到数值稳定性,k 的选取方法是使 $\boldsymbol{v}$ 的各元素中以 v_k 的绝对值为最大. 这样选取的 k 可使变换矩阵 T 的条件最好.

关于 s_i 为复数的情况可按照文献[5]中给出的方法处理. 在得到上述矢量 $\boldsymbol{v}$(此时它是复矢量)后,求 $\boldsymbol{v}$ 的各元素中模为最大的元素 v_k,令 $\boldsymbol{v}:=\boldsymbol{v}/v_k$,因而 $\boldsymbol{v}$ 的第 k 个元素为 1. 计算 $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{v}\bar{s}_i-\boldsymbol{v}^h s_i)/(\bar{s}_i-s_i)$, $\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{v}^h-\boldsymbol{v})/(\bar{s}_i-s_i)$,其中 $\boldsymbol{v}^h$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的共轭. 显然这里定义的矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都是实矢量. 用 $\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}$ 替换掉单位矩阵的第 k 列来得到变换矩阵 $T(s)$,由于它的第 k 行 k 列元素是 1,它是一个单模矩阵. 此时,矩阵$A(s)T(s)$的第 k 列均含有因子$(s-s_i)(s-\bar{s}_i)$. 而 $T'(-s)A(s)T(s)$的第 k 行还均含有因子$(s+s_i)(s+\bar{s}_i)$.

定理 1. 设 $A(s)$为满秩仿 Hermite 多项式矩阵,则 $A(s)$可 J_-谱分解.

证明. 给定 n 阶满秩仿 Hermite 多项式矩阵 $A(s)$,设 $A(s)$的特征根为 $s_1,s_2,\cdots,s_n,-s_1,-s_2,\cdots,-s_n$, 其中 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 均具有非正实部.

由引理 2,存在单模矩阵 $T(s)$使得 $A_1(s)=T'(-s)A(s)T(s)$的第 k 列有公因子 $s-s_i$(当 s_i 为实数时)或$(s-s_i)(s-\bar{s}_i)$(当 s_i 为复数时),同时第 k 行有公因子 $s+s_i$ 或$(s+s_i)(s+\bar{s}_i)$. 即有 $A_1(s)=S'(-s)A_2(s)S(s)$,其中 $S(s)$为用 $s-s_i$(或$(s-s_i)(s-\bar{s}_i)$)替换单位矩阵中的第

k 行 k 列元素后所得到的多项式矩阵，它的零点均在闭左半平面内. 因而有 $A(s)=(S(-s)T^{-1}(-s))'A_2(s)(S(s)T^{-1}(s))$. 显然，$A_2(s)$的次数至少比 $A(s)$的次数低 2.

再从 $A_2(s)$出发重复上述过程，最后得到 $A(s)=N'(-s)D(s)N(s)$，其中 $D(s)$是仿 Hermite 单模矩阵.

由引理 1 的推论，存在单模矩阵 $T(s)$使得 $J=T'(-s)D(s)T(s)$是 J_-矩阵. 因而有

$$A(s)=(T^{-1}(-s)N(-s))'J(T^{-1}(s)N(s))=M'(-s)JM(s),$$

其中 $M(s)$的零点均在闭左半平面内. 由此实现了 $A(s)$的 J_-谱分解，定理得证.

3 算法

1) 给定多项式矩阵 $A(s)$.

2) 计算 $D(s)=A(s)-A'(-s)$. 若 $D(s)\neq 0$，报错“矩阵不是仿 Hermite 的”.

3) 计算 $A(s)$的行列式 $a(s)$. 若 $a(s)=0$，报错“矩阵不是满秩的”；否则，计算 $a(s)$的特征根 $s_1,s_2,\cdots,s_n,-s_1,-s_2,\cdots,-s_n$，其中 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 均具有非正实部.

4) 检查 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 中是否包含有具有零实部的根，若有，检查是否也包含它的共轭，若不包含，报错“矩阵不是仿 Hermite 的”.

5) 置 $i=1$；T 为单位矩阵.

6) 若 s_i 为实数，计算 $A(s_i)$的右奇异矢量阵 V，取它的最后一列为 $\boldsymbol{v}$. 设 $\boldsymbol{v}$ 中第 k 个元素的绝对值最大，以 $\boldsymbol{v}$ 代替单位阵中的第 k 列得单模矩阵 T_i. 置

$$A=T_i'AT_i,\quad T=T_i^{-1}T,$$

以$(s-s_i)$乘 T 的第 k 行，以$(s-s_i)$除 A 的第 k 列，以$-(s+s_i)$除 A 的第 k 行，若$-(s+s_i)$不能除尽 A 的第 k 行，报错“矩阵不能 J_-谱分解”. 将 i 加 1.

否则，s_i 为复数，计算 $A(s_i)$的右奇异矢量阵 V，取它的最后一列为 $\boldsymbol{v}$. 设 $\boldsymbol{v}$ 中第 k 个元素的绝对值最大，令 $\boldsymbol{v}:=\boldsymbol{v}/v_k$，因而 $\boldsymbol{v}$ 的第 k 个元素为 1. 计算 $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{v}\bar{s}_i-\boldsymbol{v}^h s_i)/(\bar{s}_i-s_i)$，$\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{v}^h-\boldsymbol{v})/(\bar{s}_i-s_i)$，其中 $\boldsymbol{v}^h$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的共轭，显然它们都是实矢量. 用 $\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}$ 替换掉单位矩阵的第 k 列来得到变换矩阵 $T(s)$，置 $A=T_i'(-s)AT_i(s)$，$T=T_i^{-1}T$，以$(s-s_i)(s-\bar{s}_i)$乘 T 的第 k 行，以$(s-s_i)(s-\bar{s}_i)$除 A 的第 k 列，以$(s+s_i)(s+\bar{s}_i)$除 A 的第 k 行，若$(s+s_i)(s+\bar{s}_i)$不能除尽 A 的第 k 行，报错“矩阵不能 J_-谱分解”. 将 i 加 2.

7) 若 $i<n$，转向 6)；否则，A 已是一个单模矩阵，进行 8).

8) 计算 A 的列次矢量 $\boldsymbol{d}$，以及它的列次项系数矩阵 R.

9) 若 R 奇异，进行(10)；否则，A 已是一个常数对称矩阵，进行 13).

10) 对 R 进行奇异值分解. 得到它的奇异矢量阵 V，取其最后一列为 $\boldsymbol{c}$.

11) 计算矢量 $\boldsymbol{d}$ 中对应于 $\boldsymbol{c}$ 的非零元素中的最大者为 d_k，它是 $\boldsymbol{d}$ 的第 k 个元素. 按式(1)计算矢量 $\boldsymbol{g}(s)$. 以 $\boldsymbol{g}(s)$替换单位矩阵中的第 k 列得到矩阵 $T_k(s)$.

12) 用 $T_k(s)$对 $A(s)$作仿等价变换，令 $A(s)=T_k'(-s)A(s)T_k(s)$，$T=T_k^{-1}T$，转向 8).

13) 对 A 进行 UDU 分解，得到正交矩阵 U. 令 $A=U'AU$，$T=U'T$.

14) 矩阵 A 成为一个常数对角矩阵，且对角元素均不为零. 可以求出非奇异常数矩阵 V 使得 $V'AV$ 成为一个 J_-矩阵. 令 $A=V'AV$，$T=V'T$.

15) 输出矩阵 T，以及矩阵 A 中对角元素为正的个数.

4 数值例子

给定仿 Hermite 多项式矩阵

$$A=\begin{bmatrix} -1\,281s^2+2\,881 & -4s^4-42s^3+10s^2+102s+54 & -16s^4+164s^3-35s^2-456s+39 \\ -4s^4+42s^3+10s^2-102s+54 & 15s^4-1\,251s^2+2\,836 & 9s^3-135s^2+197s+729 \\ -16s^4-164s^3-35s^2+456s+39 & -9s^3-135s^2-197s+729 & 16s^4-108s^2+144 \end{bmatrix},$$

用作者按上述方法编制的程序求得 A 的 J_-谱因子 $W=$

$$\begin{bmatrix} 0.309\,652s^2-33.909\,9s-51.725\,2 & -0.107\,399s^3-2.367\,41s^2-13.074\,5s-15.200\,9 & -0.429\,598s^3+3.734\,24s^2+3.826\,61s-4.424\,84 \\ -0.005\,536\,03s^2-14.607\,5s-14.351\,7 & 0.001\,920\,11s^3+5.374\,79s^2+54.609\,6s+51.039\,8 & 0.007\,680\,44s^3+5.260\,52s^2+15.314\,6s+12.920\,1 \\ 0.309\,702s^2+10.663\,5s-0.682\,626 & -0.107\,417s^3-4.914\,79s^2-35.749\,9s+0.352\,951 & -0.429\,667s^3-6.167\,09s^2-10.895\,4s-6.519\,77 \end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

验证：

1）计算 $A(s)-W'(-s)JW(s)$，得到零矩阵.

2）计算矩阵 $W(s)$ 的零点，它们是 $-9.019\,4$，$-4.936\,4$，$-0.596\,39\pm \mathrm{j}1.522\,8$，$-1.649\,7$，$-1.501\,1$. 它们均具有负实部.

参 考 文 献

1 Francis B A. A Course in Control Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1986

2 Youla D C. On the factorization of rational matrices. *IRE Trans. Information Theory*, 1961, 7(2):172～179

3 叶庆凯. 线性系统与多变量控制. 北京：国防工业出版社，1989

4 韩京清，何关钰，许可康. 线性系统理论代数基础. 北京：辽宁科学技术出版社，1987

5 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数. 北京：科学出版社，1984

叶庆凯 1939 年生，现为北京大学力学与工程科学系教授、博士生导师. 主要研究方向为控制系统计算机辅助设计、优化与最优控制中的计算方法等.

黄 琳 1936 年生，现为北京大学力学与工程科学系教授、博士生导师. 主要研究方向为稳定性理论、鲁棒控制系统的分析与控制等.