第27卷 第2期
2001年3月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 2
Mar., 2001

短文

带非线性摄动的状态延迟系统的 H_∞ 鲁棒控制

伏玉笋 田作华 施颂椒

(上海交通大学自动化研究所 上海 200030 E-mail: fys80897@maill.sjtu.edu.cn)

摘 要 研究了带非线性摄动的状态延迟系统的 H_∞ 鲁棒控制. 该摄动用有界范数描述,它不仅与非延迟状态有关,而且与延迟状态有关. 用动态耗散理论,基于矩阵不等式,给出了系统满足 H_∞ 鲁棒扰动衰减性能准则的充分条件;同时系统地推导出了独立于延迟的无记忆状态反馈控制器、基于状态观测器的动态输出反馈控制器和依赖于延迟的状态反馈控制器的设计算法.

关键词 H_∞ 鲁棒控制,状态延迟系统,矩阵不等式.

H_∞ ROBUST CONTROL OF THE STATE DELAYED UNCERTAIN NONLINEAR SYSTEMS

FU Yu-Sun TIAN Zuo-Hua SHI Song-Jiao

(Institute of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030)

(E-mail: fys80897@maill.sjtu.edu.cn)

Abstract H_∞ robust control problem of the state-delayed systems with nonlinear uncertainties is researched. The uncertainties described by bounded norm are concerned with both the non-delayed state and the delayed state. Based on matrix inequality, the sufficient conditions are presented by dynamic dissipative theory such that the systems satisfy H_∞ robust disturbance attenuation performance. At the same time, a memoryless state feedback controller that is independent of delay, an observer-based dynamic output and a delay-dependent state feedback controller are given.

Key words H_∞ robust control, state-delayed system, matrix inequality.

1 引言

众所周知,时间延迟问题广泛存在于各种工程系统中,例如,化工过程、液压系统等. 它的存在,常常是造成系统不稳定的原因之一. 因此,时间延迟系统的控制问题一直倍受

收稿日期 1999-01-28 收修改稿日期 1999-09-28

关注. 因为时间延迟系统时常包含一些摄动,所以研究不确定延迟系统的控制问题是非常必要的.

不带有延迟的线性时不变系统的 H_∞控制问题已经有了相当完美的结果. 最近,状态空间 H_∞控制器的设计方法被推广到状态延迟的线性时不变系统[3~5]. 本文对带有不确定项的状态延迟系统进行了研究,给出了系统满足 H_∞鲁棒扰动衰减性能准则的充分条件,同时系统地推导出了独立于延迟的无记忆状态反馈控制器、基于状态观测器的动态输出反馈控制器和依赖于延迟的状态反馈控制器的设计算法.

2　问题的描述

考虑如下带有不确定项的状态延迟系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_1\boldsymbol{x}(t) + A_2\boldsymbol{x}(t-d) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),t) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-d),t) + B\boldsymbol{u}(t) + D\boldsymbol{\omega}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = C_1\boldsymbol{x}(t) + D_1\boldsymbol{\omega}(t), \quad \boldsymbol{x}(t) = 0, t \leqslant 0, \\ \boldsymbol{z}(t) = C_2\boldsymbol{x}(t) + D_2\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n, \boldsymbol{y}(t)\in R^p, \boldsymbol{z}(t)\in R^s, \boldsymbol{u}(t)\in R^m, \boldsymbol{\omega}(t)\in R^r$ 分别是状态向量,输出向量,评价向量,控制输入,外界扰动输入;$A_1, A_2, B, D, C_1, C_2, D_1, D_2$是具有合适维数的已知矩阵;$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),t)(\boldsymbol{f}(0,t)=0), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-d),t)(\boldsymbol{g}(0,t)=0)$是未知向量,满足如下条件[2]:

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),t)\| \leqslant \alpha\|\boldsymbol{x}(t)\|, \quad \|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-d),t)\| \leqslant \beta\|\boldsymbol{x}(t-d)\|, \tag{2}$$

其中 α, β 是已知正实数.

定义[1]. 如果系统满足如下条件,则称系统满足 H_∞鲁棒扰动衰减性能准则:

i)当 $\boldsymbol{\omega}=0$时,闭环系统(1)对于任意满足式(2)的 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ 是渐近稳定的;

ii)给定 $\gamma>0$. 对于任意给定的 $T>0$, $\|\boldsymbol{z}\|_T<\gamma\|\boldsymbol{\omega}\|_T$, $\forall\ \boldsymbol{\omega}\in L_2[0,T]$及满足式(2)的任意 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ 均成立. 其中 $\boldsymbol{\omega}$ 的 L_2范数定义如下:

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_T = \left\{\int_0^T \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\tau)\boldsymbol{\omega}(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

问题. 设计反馈控制律 $\boldsymbol{u}$,使得闭环系统(1)满足 H_∞鲁棒扰动衰减性能准则.

3　主要结果

3.1　无记忆状态反馈控制器设计

将给出系统(1)满足 H_∞鲁棒扰动衰减性能准则的充分条件及无记忆状态反馈控制器的设计算法. 为方便起见,作如下假设:

假设1. $D_2^{\mathrm{T}}D_2=I$,从而有 $I-D_2D_2^{\mathrm{T}}\geqslant 0$.

定理1. 如果系统(1)满足假设1,且存在 $\lambda_f>0, \lambda_g>0$以及对称正定矩阵 P, Q,满足下列矩阵不等式

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & PA_2 & P & P \\ A_2^{\mathrm{T}}P & -Q+\lambda_g\beta^2 I & 0 & 0 \\ P & 0 & -\lambda_f I & 0 \\ P & 0 & 0 & -\lambda_g I \end{bmatrix} < 0, \tag{3}$$

那么有状态反馈控制器

$$u(t) = -(B^{\mathrm{T}}P + D_2^{\mathrm{T}}C_2)x(t), \tag{4}$$

使得闭环系统满足 H_∞ 鲁棒扰动衰减性能准则. 其中

$$A = (A_1 - BD_2^{\mathrm{T}}C_2)^{\mathrm{T}}P + P(A_1 - BD_2^{\mathrm{T}}C_2) + P(\frac{1}{\gamma^2}DD^{\mathrm{T}} - BB^{\mathrm{T}})P +$$
$$C_2^{\mathrm{T}}C_2 - C_2^{\mathrm{T}}D_2D_2^{\mathrm{T}}C_2 + Q + \lambda_f\alpha^2 I.$$

证明从略.

3.2 基于状态观测器的动态输出反馈控制器设计

已经给出了无记忆状态反馈控制器的设计算法,但通常状态不是完全可测的,因此本节研究基于状态观测器的动态输出反馈控制器的设计算法. 为便于研究,作如下假设:

假设2. $D_2^{\mathrm{T}}[C_2 \quad D_2] = [0 \quad I]$.

设系统(1)的状态观测器具有如下结构:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_1\hat{x}(t) + A_2\hat{x}(t-d) + Bu + L(y(t) - C_1\hat{x}(t)),$$

其中 $\hat{x}$ 是估计状态, L 是待定矩阵. 令

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t),$$

则有如下增广系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - LC_1 & 0 \\ LC_1 & A_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2 & \\ & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e(t-d) \\ \hat{x}(t-d) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}u(t) +$$
$$\begin{bmatrix} D - LD_1 \\ LD_1 \end{bmatrix}\omega(t) + \begin{bmatrix} f(x(t),t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(x(t-d),t) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

定理2. 如果系统(1)满足假设2,且存在 $\lambda_f > 0, \lambda_g > 0$ 以及对称正定矩阵 P, Q,使得下列矩阵不等式

$$M_2 = \begin{bmatrix} \hat{A} & P\hat{A}_2 & P & P \\ \hat{A}_2^{\mathrm{T}}P & -Q + 2\lambda_g\beta^2 I & 0 & 0 \\ P & 0 & -\lambda_f I & 0 \\ P & 0 & 0 & -\lambda_g I \end{bmatrix} < 0 \tag{6}$$

成立,且 L 满足下面的方程:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ LC_1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}P + P\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ LC_1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma^2}P\begin{bmatrix} 0 & (D - LD_1)D_1^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}} \\ LD_1(D - LD_1)^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}P +$$
$$\begin{bmatrix} 0 & C_2^{\mathrm{T}}C_2 \\ C_2^{\mathrm{T}}C_2 & 0 \end{bmatrix} = 0, \tag{7}$$

那么有反馈控制器

$$u(t) = -\begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}P\begin{bmatrix} e(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = -B^{\mathrm{T}}P_2\hat{x}(t), \tag{8}$$

使得闭环系统(8),(5)满足 H_∞ 鲁棒扰动衰减性能准则. 其中

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 - LC_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}P + P\begin{bmatrix} A_1 - LC_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} + Q + 2\lambda_f\alpha^2 I + \begin{bmatrix} C_2^{\mathrm{T}}C_2 & 0 \\ 0 & C_2^{\mathrm{T}}C_2 \end{bmatrix} +$$

$$\frac{1}{\gamma^2}P\begin{bmatrix}(D-LD_1)(D-LD_1)^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & LD_1D_1^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}-\gamma^2BB^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}P,$$

$$\hat{A}_2=\begin{bmatrix}A_2 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}P_1 & 0\\ 0 & P_2\end{bmatrix}.$$

证明.令

$$\hat{A}_1=\begin{bmatrix}A_1-LC_1 & 0\\ LC_1 & A_1\end{bmatrix},\quad \hat{B}=\begin{bmatrix}0\\ B\end{bmatrix},\quad \hat{D}=\begin{bmatrix}D-LD_1\\ LD_1\end{bmatrix},$$

$$\hat{C}_2=[C_2\quad C_2],\quad \hat{D}_2=D_2,\quad \boldsymbol{f}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{g}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix},$$

则

$$\|f\|^2=\|\boldsymbol{f}\|^2\leqslant\alpha^2\|\boldsymbol{x}\|^2=\alpha^2\|\boldsymbol{e}+\hat{\boldsymbol{x}}\|^2\leqslant 2\alpha^2(\|\boldsymbol{e}\|^2+\|\hat{\boldsymbol{x}}\|^2)=2\alpha^2\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{e}\\ \hat{\boldsymbol{x}}\end{matrix}\right\|^2.$$

同理

$$\|\hat{\boldsymbol{g}}\|^2=\|\boldsymbol{g}\|^2\leqslant 2\beta^2\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{e}\\ \hat{\boldsymbol{x}}\end{matrix}\right\|^2.$$

由定理1可知,如果

$$\begin{bmatrix}\overline{A} & P\hat{A}_2 & P & P\\ \hat{A}_2^{\mathrm{T}}P & -Q+2\lambda_g\beta^2I & 0 & 0\\ P & 0 & -\lambda_fI & 0\\ P & 0 & 0 & -\lambda_gI\end{bmatrix}<0,$$

其中

$$\overline{A}=(\hat{A}_1-\hat{B}\hat{D}_2^{\mathrm{T}}\hat{C}_2)^{\mathrm{T}}P+P(\hat{A}_1-\hat{B}\hat{D}_2^{\mathrm{T}}\hat{C}_2)+P(\frac{1}{\gamma^2}\hat{D}\hat{D}^{\mathrm{T}}-\hat{B}\hat{B}^{\mathrm{T}})P+$$
$$\hat{C}_2^{\mathrm{T}}\hat{C}_2-\hat{C}_2^{\mathrm{T}}\hat{D}_2\hat{D}_2^{\mathrm{T}}\hat{C}_2+Q+2\lambda_f\alpha^2I,$$

那么有反馈控制器

$$\boldsymbol{u}(t)=-(\hat{B}^{\mathrm{T}}P+\hat{D}_2^{\mathrm{T}}\hat{C}_2)\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}(t)\\ \hat{\boldsymbol{x}}(t)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0\\ B\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}P\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}(t)\\ \hat{\boldsymbol{x}}(t)\end{bmatrix}=-B^{\mathrm{T}}P_2\hat{\boldsymbol{x}}(t),$$

使得闭环系统(8),(5)满足 H_∞ 鲁棒扰动衰减性能准则.

事实上,根据定理2中的条件,容易验证上述结论成立.　　证毕.

3.3 依赖于延迟的状态反馈控制器设计

研究了无记忆状态反馈和输出反馈.事实上,在控制系统设计中,应该充分利用系统信息,以减少保守性.因此在延迟系统的研究中,如果能够充分利用延迟信息,将有利于减少保守性.基于这一考虑,将研究依赖于延迟的状态反馈控制器的设计算法.

定理3. 如果系统(1)满足假设1,且存在 $\lambda_f>0$,$\lambda_g>0$以及函数矩阵 $Q(t)$和对称正定矩阵 P,满足

$$\dot{Q}(t)=(A_1+Q(0))Q(t),\quad 0\leqslant t\leqslant d,\quad Q(d)=A_2, \tag{9}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} \tilde{A} & M - C_2^{\mathrm{T}} D_2 B^{\mathrm{T}} P & 0 & P & P \\ M - PBD_2^{\mathrm{T}} C_2 & M & 0 & P & P \\ 0 & 0 & \lambda_g \beta^2 I & 0 & 0 \\ P & P & 0 & -\lambda_f I & 0 \\ P & P & 0 & 0 & -\lambda_g I \end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

那么有反馈控制器

$$\boldsymbol{u} = -D_2^{\mathrm{T}} C_2 \boldsymbol{x}(t) - B^{\mathrm{T}} P(\boldsymbol{x}(t) + \int_0^d Q(\tau)\boldsymbol{x}(t-\tau)\mathrm{d}\tau), \tag{11}$$

使得闭环系统满足 H_∞ 鲁棒扰动衰减性能准则. 其中

$$M = (A_1 + Q(0))^{\mathrm{T}} P + P(A_1 + Q(0)) - PBB^{\mathrm{T}} P + \frac{1}{\gamma^2} PDD^{\mathrm{T}} P,$$

$$\tilde{A} = M + C_2^{\mathrm{T}}(I - D_2 D_2^{\mathrm{T}}) C_2 - PBD_2^{\mathrm{T}} C_2 - C_2^{\mathrm{T}} D_2 B^{\mathrm{T}} P + \lambda_f \alpha^2 I.$$

证明从略.

4 结语

本文研究了非线性不确定项状态延迟系统的 H_∞ 鲁棒控制问题. 基于矩阵不等式,给出了系统满足 H_∞ 鲁棒扰动衰减性能准则的充分条件,同时系统地推导出了独立于延迟的无记忆状态反馈控制器、基于状态观测器的动态输出反馈控制器和有赖于延迟的状态反馈控制器的设计算法. 从简单性来看,无记忆状态反馈控制器最好,但通常状态并不完全可测,因此要用基于观测器的动态输出反馈. 但在控制系统设计中,应该充分利用系统信息,以减少保守性. 因此在延迟系统的研究中,如果能够充分利用延迟信息,将有利于减少保守性. 因此从减少保守性来看,依赖于延迟的状态反馈控制器最好,但算法较为复杂. 所以各有优缺点,只能根据实际情况来确定. 诚然,充分条件常带来一定的保守性,但要研究必要条件却是极端困难的.

参 考 文 献

1 Isidori A, Astolfi A. Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1992, **AC-37**(9): 1283～1293

2 Goubet-Bartholoméüs A, Dambrine M, Richard J P. Stability of perturbed systems with time-varying delays. *Syst. Control Lett.*, 1997, **31**(3): 155～163

3 Lee J H, Kim S W, Kwon W H. Memoryless H_∞ controllers for state delayed systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **AC-39**(1): 159～162

4 Choi H H, Chung M J. Memoryless H_∞ controller design for linear systems with delayed state and control. *Automatica*, 1995, **31**(6): 917～919

5 He J B, Wang Q G, Lee T H. H_∞ disturbance attenuation for state delayed systems. *Syst. Control. Lett.*, 1998, **33**(3): 105～114

伏玉笋 1972年生. 上海交通大学博士研究生. 目前从事鲁棒与非线性控制方面的研究.

田作华 1946年生. 上海交通大学自动化系教授、系主任. 目前从事新型监控技术方面的研究.

施颂椒 1933年生. 上海交通大学自动化系教授. 博士生导师. 目前从事鲁棒控制与自适应控制方面的研究.