第27卷 第2期
2001年3月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 2
Mar., 2001

短文

多输入非线性串级系统的 H_∞ 控制[1)]

周绍生 费树岷 冯纯伯

(东南大学自动化研究所 南京 210096 E-mail: sszcontrol@263.net)

摘 要 研究了一类多输入非线性串级系统的 H_∞ 控制问题. 证明了当第一个子系统对应的 H_∞ 控制问题可解时，整个系统的 H_∞ 控制问题，可利用 Backstepping 递推设计方法，进行状态反馈控制设计，设计出的状态反馈控制律使闭环系统是渐近稳定的，且满足 H_∞ 性能指标.

关键词 多输入，非线性，Backstepping，V 函数，H_∞ 控制.

H_∞ CONTROL OF MULTI-INPUT CASCADE NONLINEAR SYSTEMS

ZHOU Shao-Sheng FEI Shu-Min FENG Chun-Bo

(*Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing* 210096)

(E-mail: sszcontrol@263.net)

Abstract The problem of the H_∞ control for multi-input cascade nonlinear systems is investigated in this paper. We obtain a result that if the H_∞ control problem for the first subsystem is solvable, the H_∞ problem of the control for the overall system can be solved based on backstepping recursive design method. The resulting state feedback control law can make the closed-loop system internally stable and satisfy the H_∞ performance.

Key words Multi-input, nonlinear, backstepping, Lyapunov function, H_∞ control.

1 引 言

线性系统的 H_∞ 控制理论已趋成熟[1,2]，对非线性系统 H_∞（几乎干扰解耦）控制研究也有了一些进展[3~8]. 非线性系统的 H_∞ 控制问题的解最终归结为解 HJI 不等式 (Hamilton-Jacobi Inequalities)[4,5]. H J I 不等式是一个偏微分不等式，其解的存在性及解法都在探讨中. 严格反馈非线性系统(Strick-Feedback Nonlinear Systems)的自适应控制问题已得到了较充分的研究[3~10]，其控制律的设计都是基于 Backstepping 方法. 本文提

1) 国家攀登计划(97021101)及国家自然科学重点基金(69934010)资助项目.

收稿日期 1999-04-08 收修改稿日期 1999-11-17

出了一类多输入非线性串级系统,这类系统与文献[3～10]中的严格反馈非线性系统模型相比,后者的每一个子系统都是一标量形式,前者的每一个子系统都是一向量形式.本文研究的 H_∞ 控制问题能拓宽严格反馈非线性系统的模型,进一步丰富非线性系统的 H_∞ 控制理论,可能对一类特殊的非线性系统的 H_∞ 控制问题的求解提供新的思路.

2　系统模型

考虑系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{f}_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i) + G_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)\boldsymbol{x}_{i+1} + H_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)\boldsymbol{\omega},\ i = 1,\cdots,n-1,\\ \dot{\boldsymbol{x}}_n = \boldsymbol{f}_n(\boldsymbol{x}) + G_n(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + H_n(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}).\end{cases} \tag{1}$$

该系统共有 n 个子系统,每个子系统都是一向量形式,其中 $\boldsymbol{x}_i$ 是向量,表示第 i 个子系统的状态;$\bar{\boldsymbol{x}}_i=(\boldsymbol{x}_1^\tau,\boldsymbol{x}_2^\tau,\cdots,\boldsymbol{x}_i^\tau)$ 表示前 i 个子系统组成的状态,$\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}_n$ 表示整个系统的状态;$\boldsymbol{f}_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)$,$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$,$G_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)$,$H_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)$ 分别是具有适当维数的向量或矩阵函数;$\boldsymbol{u}$ 是控制向量;$\boldsymbol{z}$ 是评价信号向量;$\boldsymbol{\omega}$ 是外部干扰.对该系统有以下假设:

假设1. $G_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i)$ 对所有 $\bar{\boldsymbol{x}}_i=(\boldsymbol{x}_1^\tau,\boldsymbol{x}_2^\tau,\cdots,\boldsymbol{x}_i^\tau)$ 是行满秩的,且 $\boldsymbol{f}_i$,$G_i^\tau(G_iG_i^\tau)^{-1}$,$H_i(\bar{\boldsymbol{x}})$ 是充分光滑的.$i=1,\cdots,n$.

注1. 这一假设蕴涵了 $\boldsymbol{x}_{i+1}$ 的维数不小于 $\boldsymbol{x}_i$ 的维数,即子系统的维数是逐级非减的,且控制 $\boldsymbol{u}$ 的维数不小于任一子系统的状态的维数.

假设2. $\boldsymbol{f}_i(0)=0$,$H_i(0)=0$,$i=1,\cdots,n$.

注2. 假设2表明,$x=0$ 是系统(1)的平衡点.

假设3. $\boldsymbol{\omega}\in L^2_{[0,\infty)}$.其中 $L^2_{[0,\infty)}$ 表示2-范数有界的向量函数空间,$\forall\ \boldsymbol{\omega}\in L^2_{[0,\infty)}$,$\forall\ T>0$ 定义 $\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_T=(\int_0^T\boldsymbol{\omega}^\tau(t)\boldsymbol{\omega}(t)\mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}}$.

系统(1)的控制目标是求解 H_∞ 控制问题,即:对于给定的 $\gamma>0$,设计状态反馈控制律,使闭环系统满足

i)当初态 $\boldsymbol{x}(0)=\mathbf{0}$ 时,$\|\boldsymbol{z}\|_T\leqslant\gamma\|\boldsymbol{\omega}\|_T$.

ii)当初态 $\boldsymbol{\omega}(0)=\mathbf{0}$ 时,闭环系统的平衡点是渐近稳定的.

约定 $\boldsymbol{\alpha}_0=\mathbf{0}$;$\sum_i^{x_{i+1}}$ 表示式(1)中的前 i 个子系统组成的以 $\boldsymbol{x}_{i+1}$ 为输入的系统;$\|\cdot\|$ 表示相应量的欧氏范数;$\dot{V}_i(\sum_i^{x_{i+1}=\alpha_i})$ 表示当系统输入为 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 时,V_i 沿系统 $\sum_i^{x_{i+1}=\alpha_i}$ 的全导数.为实现上述控制目标,对第一个子系统 $\sum_1^{x_2}$ 作如下假设,以此作为递推设计的出发点.

假设4. 存在充分光滑的正定函数 $V_1(\boldsymbol{x}_1)$,充分光滑向量函数 $\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{x}_1)$,向量函数 $w_1^{1/2}\boldsymbol{x}_1$ 满足

$$\frac{\partial V_1}{\partial \boldsymbol{x}_1^\tau}(\boldsymbol{f}_1 + G_1\alpha_1) + \frac{1}{4\gamma^2}\frac{\partial V_1}{\partial \boldsymbol{x}_1^\tau}H_1H_1^\tau\frac{\partial V_1}{\partial \boldsymbol{x}_1} + w_1\boldsymbol{x}_1^\tau\boldsymbol{x}_1 \leqslant 0, \tag{2}$$

其中 w_1 是关于 $\boldsymbol{x}_1$ 的标量正函数,且 $\boldsymbol{\alpha}_1(\mathbf{0})=\mathbf{0}$,$V_1(\mathbf{0})=0$,$\frac{\partial V_1}{\partial \boldsymbol{x}_1}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$.

注 3. 考虑第一个子系统 $\sum_1^{x_2}$:$\dot{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{f}_1+G_1\boldsymbol{x}_2+H_1\boldsymbol{\omega}$,若将 $\boldsymbol{x}_2$ 当成虚拟的控制输入,$w_1^{1/2}\boldsymbol{x}_i$ 作为参考输出,假设 4 表明子系统 $\sum_1^{x_2}$ 满足 H J I 不等式,因此对任意 T 有

$$\|w_1^{1/2}\boldsymbol{x}_i\|_T \leqslant \gamma\|\boldsymbol{\omega}\|_T. \tag{3}$$

事实上,由式(2)可以推得

$$\dot{V}_1\Big(\sum\nolimits_1^{x_2=\alpha_1}\Big) \leqslant -w_1\boldsymbol{x}_1^{\tau}\boldsymbol{x}_1 + \gamma^2\|\boldsymbol{\omega}\|^2 - \gamma^2\|\boldsymbol{\omega}_1\|^2 \leqslant -w_1\boldsymbol{x}_1^{\tau}\boldsymbol{x}_1 + \gamma^2\|\boldsymbol{\omega}\|^2, \tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2\gamma^2}H_1^{\tau}\frac{\partial V_1}{\partial \boldsymbol{x}_1}, \tag{5}$$

考虑到 $V_1(\mathbf{0})=\mathbf{0}$即可推出式(3).

3 系统设计

假设第 i 步已设计出 $V_j(\bar{\boldsymbol{x}}_j),\boldsymbol{\alpha}_j(\bar{\boldsymbol{x}}_j),j=1,\cdots,i$,满足

$$\dot{V}_i\Big(\sum\nolimits_i^{x_{i+1}=\alpha_i}\Big) \leqslant -\sum_{j=1}^{i}w_j(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\alpha}_{j-1})^{\tau}(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\alpha}_{j-1}) + \gamma^2\|\boldsymbol{\omega}\|^2 - \gamma^2\|\boldsymbol{\omega}_i\|^2, \tag{6}$$

其中 $w_j(j=1,\cdots,i)$是适当选择的正函数,$\boldsymbol{\alpha}_j(\bar{\boldsymbol{x}}_j),j=1,\cdots,i(\boldsymbol{\alpha}_j(\mathbf{0})=\mathbf{0})$是充分光滑的.第 $i+1$步:考虑第 $i+1$个子系统 $\sum\nolimits_{i+1}^{x_{i+2}}$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_j = \boldsymbol{f}_j(\bar{\boldsymbol{x}}_j) + G_j(\bar{\boldsymbol{x}}_j)\bar{\boldsymbol{x}}_{j+1} + H_j(\bar{\boldsymbol{x}}_j)\boldsymbol{\omega}, j = 1,\cdots,i+1, \tag{7}$$

对于该子系统其状态为 $\bar{\boldsymbol{x}}_{i+1}$,$\boldsymbol{x}_{i+2}$看成虚拟输入,设计的目的是选取 V 函数 $V_{i+2}(\bar{\boldsymbol{x}}_{i+1})$及状态反馈控制律 $\boldsymbol{x}_{i+2}=\boldsymbol{\alpha}_{i+1}(\bar{\boldsymbol{x}}_{i+1})$,使

$$\dot{V}_{i+1}\Big(\sum\nolimits_{i+1}^{x_{i+2}=\alpha_{i+1}}\Big) \leqslant -\sum_{j=1}^{i+1}w_j(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\alpha}_{j-1})^{\tau}(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\alpha}_{j-1}) + \gamma^2\|\boldsymbol{\omega}\|^2 - \gamma^2\|\boldsymbol{\omega}_{i+1}\|^2, \tag{8}$$

取

$$V_{i+1} = V_i + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_{i+1}-\boldsymbol{\alpha}_i)^{\tau}(\boldsymbol{x}_{i+1}-\boldsymbol{\alpha}_i), \tag{9}$$

计算得

$$\begin{aligned}\dot{V}_{i+1}\Big(\sum\nolimits_{i+1}^{x_{i+2}}\Big) = {}& \dot{V}_i\Big(\sum\nolimits_i^{x_{i+1}=\alpha_i}\Big) + (\boldsymbol{x}_{i+1}-\boldsymbol{\alpha}_i)^{\tau}\Big[G_i^{\tau}\frac{\partial V_i}{\partial \boldsymbol{x}_i} + \boldsymbol{f}_{i+1} - \sum_{j=1}^{i}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_i}{\partial \boldsymbol{x}_j^{\tau}}(\boldsymbol{f}_j + G_j\boldsymbol{x}_j) + \\ & G_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+2} + \Big(H_{i+1} - \sum_{j=1}^{i}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_i}{\partial \boldsymbol{x}_j^{\tau}}H_j\Big)\varphi_i\Big] + (\boldsymbol{x}_{i+1}-\boldsymbol{\alpha}_i)^{\tau}\Big(H_{i+1} - \sum_{j=1}^{i}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_i}{\partial \boldsymbol{x}_j^{\tau}}H_j\Big)\boldsymbol{\omega}_i,\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\omega=\omega_i+\varphi_i$,取

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} = {}& G_{i+1}^{\tau}(G_{i+1}G_{i+1}^{\tau})^{-1}\Big[-w_{i+1}(\boldsymbol{x}_{i+1}-\boldsymbol{\alpha}_i) - G_i^{\tau}\frac{\partial V_i}{\partial \boldsymbol{x}_i} - \boldsymbol{f}_{i+1} - \Big(H_{i+1} - \sum_{j=1}^{i}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_i}{\partial \boldsymbol{x}_j^{\tau}}H_j\Big)\varphi_i + \\ & \sum_{j=1}^{i}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_i}{\partial \boldsymbol{x}_j^{\tau}}(\boldsymbol{f}_j + G_j\boldsymbol{x}_j) - \frac{1}{4\gamma^2}\Big(H_{i+1} - \sum_{j=1}^{i}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_i}{\partial \boldsymbol{x}_j^{\tau}}H_j\Big)\Big(H_{i+1}^{\tau} - \sum_{j=1}^{i}H_j^{\tau}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}_i^{\tau}}{\partial \boldsymbol{x}_j}\Big)(\boldsymbol{x}_{i+1}-\boldsymbol{\alpha}_i)\Big],\end{aligned} \tag{11}$$

其中 φ_i 待定,则

$$\dot{V}_{i+1}\Big(\sum\nolimits_{i+1}^{x_{i+1}=\alpha_{i+1}}\Big) \leqslant -\sum_{j=1}^{i+1}w_j(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\alpha}_{j-1})^{\tau}(\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{\alpha}_{j-1}) + \gamma^2\|\boldsymbol{\omega}\|^2 - \gamma^2\|\boldsymbol{\omega}_{i+1}\|^2, \tag{12}$$

其中

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{1}{2\gamma^2}(H_{i+1}^{\tau} - \sum_{j=1}^{i} H_j^{\tau} \frac{\partial \alpha_i^{\tau}}{\partial \boldsymbol{x}_j})(\boldsymbol{x}_{i+1} - \alpha_i). \tag{13}$$

下面确定待定的 φ_i，由式(5)，(13)递推得

$$\varphi_i = \frac{1}{2\gamma^2} H_1^{\tau} \frac{\partial V_1}{\partial \boldsymbol{x}_1} + \frac{1}{2\gamma^2} \sum_{j=1}^{i-1} (H_{j+1}^{\tau} - \sum_{k=1}^{j} H_k^{\tau} \frac{\partial \alpha_j^{\tau}}{\partial \boldsymbol{x}_k})(\boldsymbol{x}_{j+1} - \alpha_j), \tag{14}$$

易知 $\alpha_{i+1}(\boldsymbol{x}_{i+1})$ 是充分光滑的，且 $\alpha_{i+1}(0)=0$. 依次递推设计，即可得递推形式的状态反馈控制律(9)，(11)，(14)，$i=1,2,\cdots,n-1$，

$$\boldsymbol{u} = \alpha_n(\boldsymbol{x}), \tag{15}$$

其中 $V_1(\boldsymbol{x}_1)$，$\alpha_1(\boldsymbol{x}_1)$ 由假设4确定.

4　系统分析

先引入一个定义[4]：如果 $\omega(t)=0$ 时，任意满足 $z(\boldsymbol{x}(t))=0$ 的解为 $\boldsymbol{x}(t)=0$，则称系统(1)是零状态可观测的.

定理. 在假设1，2，3，4下，若系统(1)的零状态可观测，且可适当选取正函数 $w_j(\bar{\boldsymbol{x}}_j)$，$j=1,\cdots,n$，满足

$$\sum_{j=1}^{n} w_j(\boldsymbol{x}_j - \alpha_{j-1})^{\tau}(\boldsymbol{x}_j - \alpha_{j-1}) \geqslant z^{\tau} z, \tag{16}$$

则形如式(9)，(11)，(14)，(15)的状态反馈控制律使闭环系统满足 H_∞ 性能指标，并且闭环系统的平衡点是渐近稳定的.

证明. 递推知 $\alpha_i(0)=0$，$i=1,\cdots,n$ 若取

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_n - \alpha_{n-1})^{\tau}(\boldsymbol{x}_n - \alpha_{n-1}), \tag{17}$$

考虑到式(6)，(12)由归纳法知

$$\dot{V}_n(\textstyle\sum_n^{u=\alpha n} \leqslant - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} w_j(\boldsymbol{x}_j - \alpha_{j-1})^{\tau}(\boldsymbol{x}_j - \alpha_{j-1}) + \gamma^2\|\omega\|^2 - \gamma^2\|\omega_n\|^2, \tag{18}$$

考虑到式(16)，则

$$\dot{V}_n(\textstyle\sum_n^{u=\alpha_n}) \leqslant \gamma^2\|\omega\|^2 - z^{\tau} z, \tag{19}$$

当初态 $\boldsymbol{x}(0)=0$ 时有：$V_n(\boldsymbol{x}(t))$，$\alpha_1(\boldsymbol{x}_1(t))$，$\cdots$，$\alpha_n(\boldsymbol{x}(t))|_{t=0}=0$，对任意的 $T>0$，将式(19)两端从0到 T 积分得：$\|z\|_T \leqslant \gamma\|\omega\|_T$，可以推知：$\boldsymbol{x}=0$ 是闭环系统的平衡点. 当 $\omega=0$ 时，由式(18)知该平衡点是稳定的，且由零状态可观测性知，$\boldsymbol{x}(t)=0$ 是满足 $\dot{V}_n(\sum_n^{u=\alpha_n})=0$ 系统的最大不变集，由不变集原理知，当 $\omega=0$ 时，闭环系统的平衡点是渐近稳定的. 证毕.

注4：一般地，满足式(16)的正函数 $w_j(\bar{\boldsymbol{x}}_j)$，$j=1,\cdots,n$ 有无穷多个，若式(16)的左端为零，则 $\boldsymbol{x}=0$，右端必为零，式(16)显然成立. 正函数 $w_j(\bar{\boldsymbol{x}}_j)$，$j=1,\cdots,n$ 的选取依赖于 $z(\boldsymbol{x})$.

注5. 由上述定理可知多输入非线性串级系统(1)的 H_∞ 控制问题的求解可化归为其第一个子系统 $\sum_1^{x_2}$：$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = f_1 + G_1\boldsymbol{x}_2 + H_1\omega$ 的求解问题. 特别地，当这一子系统是一标量子系统时，其对应的HJI不等式(2)为一常微分不等式，其解的存在性及解法可能相对简单.

5 结语

对一类带有外部干扰的多输入非线性串级系统的 H_∞ 控制问题，基于 Backstepping 递推设计方法，进行了状态反馈控制设计. 得到以下结果：当第一个子系统对应的 H_∞ 控制问题可解时，整个系统的 H_∞ 控制问题可解. 这为求解注5中的多输入非线性串级系统(其第一个子系统是一标量子系统时)的 H_∞ 控制问题的求解提供了新的思路，这一问题有可能通过对常微分不等式(2)的深入讨论得以解决.

参 考 文 献

1 申铁龙. H_∞ 控制理论及应用. 北京：清华大学出版社，1996

2 郭雷，冯纯伯. 一类不确定系统的 H_∞ 控制器的设计. 中国科学，1998，E 辑**28**(1)：57～62

3 Zigang Pan, Tamer Basar. Daptive controller design for tacking and disturbance attenuation in parametric strict-feedback nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1998, **43**(8): 1066～1083

4 Alberto Isidori, Wei Kang. H_∞ control via measurement feedback for general nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995, **40**(3): 466～472

5 Van der Schaft A J. A state-space approach to nonlinear H_∞ control. *Systems & Control Letter*, 1991, **16**(1): 1～8

6 A. Isidori. Global almost disturbance decoupling with stability for nonmimum-phase single-input single-output nonlinear systems. *Systems & Control Letter*, 1996, **28**(4): 115～122

7 Lin Z L. Almost disturbance decoupling with global asymptotic stability for nonlinear systems with disturbance-affected unstable zero dynamics. *Systems & Control Letter*, 1998, **33**(6) 163～169

8 Xiaoping Liu, Kemin Zhou, Guoxing Gu, Global disturbance attenuation for MIMO nonlinear systems with controlled output containing input, In: Proc. 37th CDC Tampa Lorida, USA, 1998, 4081～4086

9 Miroslav K I K, Petar K. Nonlinear and Adaptive Control Design. John Wiley & Sons, Inc, 1995

10 陈卫田，周绍生等. 一类不确定非线性系统的输出反馈控制. 控制理论与应用，1998，**15**(5)：668～674

周绍生 男，1965年生，博士生. 研究领域为非线性系统、鲁棒控制、适应控制.

费树岷 男，1961年生，教授. 研究领域为非线性系统、鲁棒控制.

冯纯伯 男，1928年生，教授. 中国科学院院士、俄罗斯外籍院士. 研究领域自动控制理论与应用.