

线性二次最优控制的精细积分法

钟万勰

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室 大连 116023)

(E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn)

摘要 LQ控制虽然是最优控制的最基本问题,但其数值求解仍有很多问题.黎卡提微分方程的精细积分法利用黎卡提方程的解析特点,求出计算机上高度精密的解,并已证明误差在计算机倍精度数的误差范围之外.这对于Kalman-Bucy滤波,LQG问题以及 H_∞ 控制及滤波等都可运用,精细积分还求解了反馈后的状态微分方程.数例验证了其高精度特性.

关键词 LQ控制,黎卡提方程,精细积分.

THE PRECISE INTEGRATION OF LQ CONTROL PROBLEMS

ZHONG Wan-Xie

(State Key Lab of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023)

(E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn)

Abstract Linear quadratic control is one of the basic problems for optimal control, however, its numerical computations still have to be solved. The precise integration of the Riccati matrix differential equations introduced in this paper is very attractive. The analytic characteristics of the Riccati equation is applied to deriving the high precision numerical solution so that the full computer precision is reached. The same method can also be applied to such as Kalman-Bucy filtering, LQG and H_∞ control problems. The precise integration method differs from the usual finite difference style method dramatically, and the numerical examples verify the high precision of the solutions. The state vector equation under optimal control is also solved by the precise integration method.

Key words LQ control, Riccati equation, precise integration.

1 前言

线性二次控制是最优控制最基本的问题,受控系统方程为线性

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

其中 x 为 n 维状态向量, u 为 p 维输入向量, A, B 为相应维数的定常矩阵.性能指标为状

态与输入的二次型泛函

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}_f^T S_f \mathbf{x}_f + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}] dt, \quad \min_u J, \quad (2)$$

其中 $0 \leq t \leq t_f$ 为问题的时间区间, 求 $\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)$ 使泛函 $J = J(\mathbf{u})$ 达到最小, 其中 $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(t_f)$ 是一种简写; Q, S_f 为半正定阵, R 为正定阵, 这些矩阵皆为给定阵. 认为 A, B 为可控, 且系统为全状态反馈. 问题的提法是最常见的, 并且也是最基本的^[1]. 对如此基本的问题, 在计算方面却尚有不足, 例如黎卡提方程的求解. 本文将精细积分法引入最优控制的计算使之取得进展.

精细积分法于文献[2~4]提出时, 用于初值问题的积分, 适用于常系数常微分方程组. 其特点是在计算机上求得高度精确的解, 即除了四则运算的舍入误差外, 其算法误差已在计算机字长范围之外, 因此给出的是计算机上的“精确解”. 精细积分法高度精密的特点可适用于刚性问题、不同时间尺度的问题, 并且是显式无条件稳定的.

初值精细积分法很快就发展到二点边值问题及黎卡提矩阵微分方程的求解^[5-7], 这对于控制问题很有用. 但 LQ 控制的增益阵是时间的函数, 因此状态向量的积分要面临时变矩阵常微分方程组的求解. 对于这种特定的情况, 如何利用该方程的生成特点, 发展其相应的精细积分法, 求得其精密解答, 显然是有意义的, 尤其是面对不同时间尺度的刚性系统, 精细积分法可以展现其突出的特点.

2 区段混合能

在动力方程(1)的约束下, 令二次型指标(2)取最小的问题, 可引入拉格朗日乘子向量 $\lambda(t)$ 及变分原理, 导出最优对偶向量 \mathbf{x}_*, λ_* 及输入向量 \mathbf{u}_* 的方程

$$\mathbf{u}_* = -R^{-1} B^T \lambda_*(t), \quad \dot{\lambda}_* = P(t) \mathbf{x}_*, \quad (3), (4)$$

其中 $P(t)$ 为半正定对称阵, 是矩阵黎卡提方程

$$-\dot{P}(t) = Q + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P \quad (5)$$

及条件

$$P(t_f) = S_f, \quad t = t_f \quad (6)$$

的解. 将 $P(t)$ 阵数值求解后, 再将(4)式代入(1)式, 即得到求解状态向量 $\mathbf{x}_*(t)$ 的方程

$$\dot{\mathbf{x}}_* = [A - BR^{-1}B^T P(t)] \mathbf{x}_*, \quad \dot{\lambda}_* = [A - BK(t)] \mathbf{x}_*, \quad (7), (8)$$

其中 $K(t) = R^{-1}B^T P(t)$ 称为增益阵, 初始条件已于(1)式给出.

于是就有矩阵黎卡提方程(5), (6)的求解, 以及方程(7)的求解. 尽管系统是定常的, 但由于 $P(t)$ 的原因, 方程(7)是时变的, 对它的精细积分还应另作考虑.

为了求解矩阵黎卡提方程, 还应回到对偶方程

$$\dot{\mathbf{x}}_* = A \mathbf{x}_* - BR^{-1}B^T \lambda_*, \quad \mathbf{x}_*(0) = \mathbf{x}_0, \quad (9a)$$

$$\dot{\lambda}_* = -Q \mathbf{x}_* - A^T \lambda_*, \quad \lambda_{*f} = S_f \mathbf{x}_{*f}, \quad (9b)$$

而这一对方程正对应于变分原理

$$J_e = \frac{1}{2} \mathbf{x}_f^T S_f \mathbf{x}_f + \int_0^{t_f} [\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} / 2 - \lambda^T B R^{-1} B^T \lambda / 2 + \lambda^T A \mathbf{x} - \lambda^T \dot{\mathbf{x}}] dt, \quad \delta J_e = 0. \quad (10)$$

这就给引入区段混合能提供了根据. 设 $0 \leq t_a \leq t_b \leq t_f$, (t_a, t_b) 称为一个区段, 对应于区段

(t_a, t_b) 可引入其混合能

$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T x_b - \int_{t_a}^{t_b} [\lambda^T \dot{x} - x^T Q x / 2 - \lambda^T A x + \lambda^T B R^{-1} B^T \lambda / 2] dt. \quad (11)$$

在积分号下的 x, λ 应当根据式(9)的对偶微分方程及其两端条件 $x(t_a) = x_a, \lambda(t_b) = \lambda_b$ 确定.

区段混合能 $V(x_a, \lambda_b)$ 的重要性在于其变分式

$$\delta V(x_a, \lambda_b) = x_b^T \delta \lambda_b + \lambda_a^T \delta x_a \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_b} \right)^T \delta \lambda_b + \left(\frac{\partial V}{\partial x_a} \right)^T \delta x_a.$$

故

$$x_b = \partial V / \partial \lambda_b, \quad \lambda_a = \partial V / \partial x_a. \quad (12)$$

但由其定义(11)可看到, $V(x_a, \lambda_b)$ 是 x_a 与 λ_b 的二次式

$$V(x_a, \lambda_b) = \lambda_b^T F x_a + x_a^T E x_a / 2 - \lambda_b^T G \lambda_b / 2, \quad (13)$$

其中 E, G, F 阵皆为 $n \times n$ 阵 $E^T = E, G^T = G$, 这三个矩阵决定了此二次式, 当然为待求. E, G, F 将只与系统阵 $A, B R^{-1} B^T, Q$ 阵有关. 将式(13)代入式(12), 有

$$x_b = E x_a - G \lambda_b, \quad \lambda_a = E x_a + F^T \lambda_b. \quad (14a), (14b)$$

显然 E, G, F 皆为 t_a, t_b 的函数, 表示为 $E(t_a, t_b)$ 等. 令 $t_a \rightarrow t_b$, 有

$$E \rightarrow 0, G \rightarrow 0, F \rightarrow I, \quad (15)$$

对时不变系统, 这些矩阵只是 $\tau = t_b - t_a$ 的函数, 有微分方程^[5,6]

$$dE/d\tau = Q + A^T E + E A - E B R^{-1} B^T E = F^T Q F, \quad (16)$$

$$dG/d\tau = F(B R^{-1} B^T) F^T = B R^{-1} B^T + A G + G A^T - G Q G, \quad (17)$$

$$dF/d\tau = (A - G Q) F = F(A - B R^{-1} B^T E). \quad (18)$$

3 区段合并消元

首尾相连的区段 $(t_a, t_b), (t_b, t_c)$ 可以通过对 x_b, λ_b 的消元, 合并成 (t_a, t_c) 区段, 其相应的矩阵 E_c, G_c, F_c 当然可以从两个区段相应的矩阵来表示(见图1).

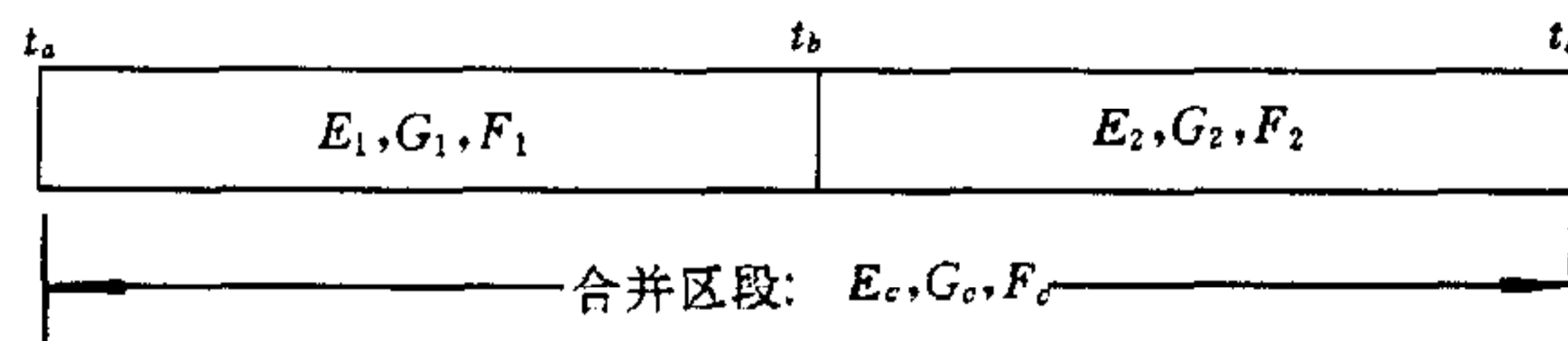


图1 区段1(t_a, t_b)及区段2(t_b, t_c)合并为区段(t_a, t_c)

由区段混合能的定义(11), 显然有

$$V(x_a, \lambda_c) = \left[V(x_b, \lambda_c) + V(x_a, \lambda_b) - \lambda_b^T x_b \right]_{\lambda_b, x_b}^{\max, \min}, \quad (19)$$

由此导出

$$-x_b + F_1 x_a - G_1 \lambda_b = 0, \quad -\lambda_b + E_2 x_b + F_2^T \lambda_c = 0,$$

求解得

$$x_b = (I + E_2 G_1)^{-T} (F_1 x_a - G_1 F_2^T \lambda_c), \quad \lambda_b = (I + E_2 G_1)^{-1} (E_2 F_1 x_a + F_2^T \lambda_c). \quad (20)$$

将式(20)代入(19)式得 (t_a, t_c) 区段的矩阵

$$E_c = E_1 + F_1^T (E_2^{-1} + G_1)^{-1} F_1, \quad G_c = G_2 + F_2 (G_1^{-1} + E_2)^{-1} F_2^T,$$

$$F_c = F_2(I + G_1 E_2)^{-1} F_1, \quad (21)$$

这就是区段合并消元公式^[8].

区段合并消元是与次序无关的^[3],表述为:如顺次有3个区段 $(t_a, t_b), (t_b, t_c), (t_c, t_d)$,则先执行前两个合并得 (t_a, t_c) ,再执行与 (t_c, t_d) 合并得 (t_a, t_d) ;将相同于先执行 (t_b, t_c) 与 (t_c, t_d) 的合并得 (t_b, t_d) ,再与 (t_a, t_b) 合并而得的 (t_a, t_d) .如将区段合并消元视作“乘法”,则次序无关定理就是其结合律.

4 黎卡提方程的精细积分

方程(16)就是黎卡提微分方程,只要时间差 τ 倒过来,其正负号就完全一致了.因此精细积分应首先将 E, G, F 矩阵的精细积分作出.

时程积分总得要一个步长,设记为 η .于是

$$t_0 = 0, t_1 = \eta, t_2 = 2\eta, \dots, t_k = k\eta, \dots, t_f = k_f \eta. \quad (22)$$

应当在这些时间点上将(5)式的 $P(t)$ 阵算出来,还应当将式(7)的 $x_*(t)$ 计算出来.前者在文献[5,7]中有所涉及,而后者则为全新.这二者是密切关联的.

步长 η 一般来说是比较小的一个时段,但并不是充分地小.即如果采用差分法来逼近微分,其效果不太好.精细积分在步长 η 的基础上,再进一步将它划分为 $m = 2^N$ 步,例如选用 $N = 20$,则 $2^N = 1\,048\,576$,于是精细积分相应于

$$\tau = \eta / 2^N \approx \eta \cdot 10^{-6} \quad (23)$$

步长.作出泰勒展开

$$E(\tau) \approx q_1 \tau + q_2 \tau^2 + q_3 \tau^3 + q_4 \tau^4, \quad (24a)$$

$$G(\tau) \approx g_1 \tau + g_2 \tau^2 + g_3 \tau^3 + g_4 \tau^4, \quad (24b)$$

$$F(\tau) \approx I + f_1 \tau + f_2 \tau^2 + f_3 \tau^3 + f_4 \tau^4 = I + F', \quad (24c)$$

这与条件(15)是相容的.代入式(16~18),对比各幂次有

$$\begin{aligned} q_1 &= Q, & g_1 &= BR^{-1}B^T, \\ q_2 &= (A^T Q + QA)/2, & g_2 &= (Ag_1 + g_1 A^T)/2, \\ q_3 &= (f_2^T Q + Qf_2 + A^T QA)/3, & g_3 &= (f_2 g_1 + g_1 f_2^T + Ag_1 A^T)/3, \\ q_4 &= (f_3^T Q + Qf_3 + A^T Qf_2 + f_2^T QA)/4, & g_4 &= (f_3 g_1 + g_1 f_3^T + f_2 g_1 A^T + Ag_1 f_2^T)/4, \\ f_1 &= A, f_2 = (A^2 - g_1 Q)/2, & f_3 &= (Af_2 - g_2 Q - g_1 QA)/3, \\ f_4 &= (Af_3 - g_3 Q - g_2 QA - g_1 Qf_2)/4, \end{aligned} \quad (25)$$

可以看到 $g_i, q_i (i=1, 2, 3, 4)$ 都是对称阵.这些公式只要顺次计算,不需求解.式(24), (25)将系统矩阵 $A, Q, BR^{-1}B^T$ 与区段矩阵联系起来.由于式(24)泰勒展开取到 τ^4 ,其相对误差已经是 $O(\tau^4)$.根据式(23),误差因子 $O(\tau^4) = \eta^4 \cdot 10^{-24}$,其量级已超出了倍精度浮点数的相对误差 10^{-16} ,因此(24)式的泰勒展开近似已经不会在计算机上引起实质性误差.而本文的公式推导在别处皆为精确公式,仅有的近似便是(24)式的展开式,其误差并不是实质性的.这就保证了计算的高度精确性.

还应当注意,(24c)式中 F' 阵不可与 I 阵相加,否则将大量丧失精度,因为 F' 阵是非常小的值.作为其对策,在运用(21c)式作合并消元时,应改为

$$F'_c = F'_1 + F'_2 + F'_2 F'_1 - (I + F'_2)(E_2^{-1} G_1^{-1} + I)^{-1}(I + F'_1), \quad (26a)$$

$$F'_c = F'_1 + F'_2 + F'_2 F'_1 - (I + F'_2)[(I + G_1 E_2)^{-1} G_1 E_2 + G_1 E_2 (I + G_1 E_2)^{-1}](I + F'_1)/2, \quad (26b)$$

这样便可保持其计算精度. 这是至关重要的, 缺少这一步, 精度就要受到很大影响, 而不成其为精细积分了.

4.1 时段 η 的精细算法 (2^N 算法)

对单步长 η 作出精细计算, 求得 $E(\eta), G(\eta), F(\eta)$, 是关键一步. 可执行如下:

{给定 $A, Q, BR^{-1}B^T, \eta$; 选 $N=20, \tau=\eta/1\ 048\ 576$;},

{按式(25), (24), 计算 $E(\tau), G(\tau), F'(\tau)$; 并送存 E_c, G_c, F'_c },

for ($iter=0$; $iter < N$; $iter++$) { $\{E_1=E_2=E_c; G_1=G_2=G_c; F'_1=F'_2=F'_c\}$ {按式(21a), (21b), (26b) 计算新的 E_c, G_c, F'_c }},

$$F_c = I + F'_c. \quad (27)$$

(注. 此时已是 $E(\eta), G(\eta), F(\eta)$. 加 I 已无问题) 有了 η 时段的矩阵 $E(\eta), G(\eta), F(\eta)$, 即可按式(22)逐步推进了.

4.2 逐步积分, E, G, F 及黎卡提方程的求解

当 $t_a=t_b$ 时, E, G, F 已由式(15)给出, 并且按(27)式计算 $E(\eta), G(\eta), F(\eta)$ 后, 就可以递推计算了. 设已计算了 $k\eta$ 长的区段, 令其为区段2, 而 η 为区段1, 运用式(21), (26) 就可以算出 $(k+1)\eta$ 的 E, G, F 直至 $k_f\eta$. 但 E 阵并不满足条件(6). 为此应当在 t_f 处设想有一集中区段, 具有 $E_2=S_f, F_2=I, G_2=0$, 以与前面算得的任一区段作为区段1进行合并消元. 例如要计算 $k\eta$ 处的黎卡提方程解, 则区段1的长度为 $(k_f-k)\eta$, 相应公式

$$P(t) = E(t) + F^T(S_f^{-1} + G)^{-1}F = E + F^T(I + S_f G)^{-1}S_f F, \quad (28)$$

$$F_p(t) = (I + GS_f)^{-1}F, \quad G_p(t) = (G^{-1} + S_f)^{-1}, \quad (29), (30)$$

式中 P, F_p, G_p 就是与 t_f 处集中区段合并消元所得. 以下验证 $P(t)$ 所满足的微分方程. 当然 E, G, F 满足微分方程(16)~(18), 其中 $\tau=t_f-t, d/d\tau=-d/dt$. 运用恒等式 $\frac{d}{dt}(X^{-1}) = -X^{-1}\dot{X}X^{-1}$, 有

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{dE}{dt} + \left(\frac{dF}{dt}\right)^T (S_f^{-1} + G)^{-1}F + F^T(S_f^{-1} + G)^{-1} \frac{dF}{dt} - F^T(S_f^{-1} + G)^{-1} \frac{dG}{dt} (S_f^{-1} + G)^{-1}F \\ &= -Q - EA - A^T E + EBR^{-1}B^T E - [F(A - BR^{-1}B^T E)]^T (S_f^{-1} + G)^{-1}F \\ &\quad - F^T(S_f^{-1} + G)^{-1}F(A - BR^{-1}B^T) + F^T(S_f^{-1} + G)^{-1}FBR^{-1}B^T F^T (S_f^{-1} + G)^{-1}F \\ &= -Q - [E + F^T(S_f^{-1} + G)^{-1}F]A - A^T [E + F^T(S_f^{-1} + G)^{-1}F] \\ &\quad + [E + F^T(S_f^{-1} + G)^{-1}F]BR^{-1}B^T [E + F^T(S_f^{-1} + G)^{-1}F] \\ &= -Q - PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P, \end{aligned}$$

这就是式(5); 另一方面当 $t=t_f$ 时, $E=G=0, F=I$, 故由式(28)知 $P(t_f)=S_f$, 式(6)条件也满足. 于是知按式(28)计算的 $P(t)$ 就是黎卡提方程的解.

这样就形成了一种算法, 首先在条件(15)下求解式(16)~(18), 最后用式(28)将终端条件考虑进去. 这样计算的好处是 S_f 的条件是最后才进入的. 当需要修改 S_f 进行设计时, 前半部分不用重算. 现提供算法如下:

{ 2^N 算法(27), 计算 $E(\eta), G(\eta), F(\eta)$; 分别送 $E_1, E_c; G_1, G_c; F_1, F_c$;},
 for ($k=k_f-1; k \geq 0; k--$) { {对 k 站, 保存当前的 E_c, G_c, F_c ; 作为其 $E(t)$ 等} { $E_2=E_c; G_2=G_c; F_2=F_c; E_1, G_1, F_1$ 保持不变} 按式(21)计算新的 E_c, G_c, F_c ; } (注. 以上是计算各站的 $E(t), G(t), F(t)$);

{调出 $S_f; G_2=0; F_2=I$; } for ($k=0; k < k_f; k++$) {注. 考虑端部 k_f 处的条件 {对 k 站调出 E, G, F } {按式(28), (29)计算 P, F_p , 并保存于 k 站}}. (31)

至此已求得黎卡提矩阵微分方程的解.

4.3 状态向量的精细积分

在 LQ 控制下, 状态向量 $x_*(t)$ 服从微分方程(7)或(8), 这是变系数微分方程组. 一般的变系数微分方程组是无法求取其精细积分解的, 但当前的方程是由时不变系统来的, 因此仍可求得其精细积分解.

上文按式(29)已算得 $F_p(t)$, 应当考察其满足的微分方程. 注意 $d/dt = -d/d\tau$, 且 $d/dt(X^{-1}) = -X^{-1}\dot{X}X^{-1}$, 有

$$\begin{aligned} \frac{dF_p}{dt} = & -(I + GS_f)^{-1} \frac{dG}{dt} S_f (I + GS_f)^{-1} F + (I + GS_f)^{-1} \frac{dF}{dt} = \\ & (I + GS_f)^{-1} F B R^{-1} B^T F^T (S_f^{-1} + G)^{-1} F - (I + GS_f)^{-1} F (A - B R^{-1} B^T E) = \\ & (I + GS_f)^{-1} F [A - B R^{-1} B^T (E + F^T (S_f^{-1} + G)^{-1} F)] = \\ & - F_p [A - B R^{-1} B^T P(t)], \end{aligned} \quad (32)$$

就可推得

$$\frac{d}{dt}(F_p^{-1}) = [A - B R^{-1} B^T P(t)] F_p^{-1}.$$

注意, 这个微分方程就是式(7)或(8). 故若引入向量 $\xi_0 = F_p(0)x_0$, 则

$$x_*(t) = F_p^{-1}(t)\xi_0. \quad (33)$$

这样 $x_*(t)$ 已经不需再由方程(7)来进行积分了, 只需由矩阵计算便可完成. 这些推导都是精确的, $F_p(t)$ 也是由精细积分而来的, 所以由式(33)计算的 $x_*(t)$ 也是精细积分. 而 $F_p(t)$ 在算法(31)中已经算出并保存了.

5 数例

黎卡提方程本身是非线性微分方程组, 一般只有一维问题才有解析解. 虽然本文提供了任意维黎卡提方程的精细数值解, 但并无解析解比较. 这里只能给出一个一维数例以与解析解比较. 然后再给一个4维例题, 其检验方法可以令 $t \rightarrow \infty$, 其解将趋于黎卡提代数方程的解, 可由此验证; 其次可采用不同步长, 在相同的时间点上其矩阵应取相同的值, 这也表明精细积分对时间步长 η 是不敏感的.

例1. $n=1, A=-0.8, Q=0.64, BR^{-1}B^T=25.0, t_f=0.4, S_f=0.01$, 选 $\eta=0.05$, 取 $x_0=1.0$. 黎卡提方程为 $\dot{P} = -0.64 + 1.6P + 25P^2$; 当 $t=0.4$ 时, $P=0.01$. 这可以解析积分. 经解析计算及按式(27), (31)计算, 结果如表1所示.

表1 解析法与精细积分法计算结果比较

t	$t_f=0.4$	0.35	0.3	0.25	0.2
解析解 P	0.01	0.039 142 055 23	0.063 584 009 45	0.082 872 335 50	0.097 374 807 25
精细积分	0.01	0.039 142 055 23	0.063 584 009 45	0.082 872 335 50	0.097 374 807 25
状态 x	0.342 423 42	0.326 676 248 5	0.362 747 064	0.413 960 542	0.482 454 561
t	0.15	0.1	0	$-\infty$	
解析解 P	0.107 887 105 29	0.115 306 632 39	0.123 957 923 22	0.131 168 244 3	
精细积分	0.107 887 105 29	0.115 306 632 39	0.123 957 923 22	迭代趋于0.131 168 244 3	
状态 x	0.571 088 362	0.683 561 912	1.0	—	

可见精细积分计算的 P 与解析解有十位以上有效数字相同,采用不同步长计算仍得同样结果. 这种情况在多维问题也一样.

例2. $n=4, t_f=16.0, S_f=\text{diag}[10.0, 10.0, 10.0, 10.0]$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, BR^{-1}B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix},$$

选择 $\eta=1.0$, 或 $\eta=4.0$ 计算, 在相同时间处 P 阵以及状态向量所得结果完全一样. 只是没有其他结果可以比较, 因此数值结果不再例举. 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 其解应趋于代数黎卡提方程的解

$$P_\infty = \begin{bmatrix} 13.471 9 & -7.228 5 & -0.338 3 & -2.172 8 \\ -7.228 5 & 5.670 4 & 0.822 6 & 1.818 5 \\ -0.338 3 & 0.822 6 & 6.142 7 & -1.137 4 \\ -2.172 8 & 1.818 5 & -1.137 4 & 4.748 4 \end{bmatrix},$$

它与采用其它方法所得结果完全相同.

6 结语

本文只涉及了最优控制的最基本问题, 其数值求解还有许多工作要做. 精细积分以其高度精密的特点, 在数值计算方面有很大吸引力. 进一步用于 Kalman-Bucy 滤波、LQG 问题、以及 H_∞ 控制及滤波等方面具有很大潜力. 与传统的一些差分类算法形成鲜明对比.

常规的数值计算, 一见到微分方程就采用差分方法, 这是很片面的, 差分近似可以说是“最后的”手段. 如果在解析法尚可以有所作为时, 当然应当尽量采用解析手段. 精细积分充分利用解析手段, 达到了高精度的效果. 即使对于状态运动的变系数方程求解, 也有纳入黎卡提方程精细求解的办法. 黎卡提微分方程的求解是现代控制论的关键, 对如此根本性质的课题, 尚可作出精细求解的推进, 再结合初值问题指数矩阵的精细积分计算, 可知在这方面的高性能计算还有许多工作可做.

参 考 文 献

- 1 郑大钟. 线性系统理论. 北京: 清华大学出版社, 1990. 180~196
- 2 钟万勰, 杨再石. 连续时间 LQ 控制主要本征对的计算. 应用数学与力学, 1991, 12(1): 45~50
- 3 钟万勰等. 计算结构力学与最优控制. 大连: 大连理工大学出版社, 1993. 269~277
- 4 Zhong Wanxie, Zhu Jianping, Zhong Xiangxiang. A precise time integration algorithm for non-linear systems. In;

Proc. WCCM-3, Vol. I, Tokyo:Tezuka Microfilm Co. Ltd,1994. 131~136

- 5 钟万勰. 矩阵黎卡提方程的精细积分. 计算结构力学及其应用,1994,11(2):113~119
- 6 钟万勰,钟翔翔. LQ 控制区段混合能矩阵的微分方程及其应用. 自动化学报,1992,18(3):325~331
- 7 钟万勰. 弹性力学求解新体系. 大连:大连理工大学出版社,1995. 263~274
- 8 Sidhu G S, Bierman G J. Integration free interval doubling for Riccati equation solutions. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1977, AC-22(5):831~834

钟万勰 男,1934年生. 教授、博士生导师、大连理工大学工程力学研究所所长、中国科学院院士. 专业领域是工程力学、计算力学. 目前从事的工作为最优控制与计算机结构动力学.

(上接第151页)

中国自动化学会2001年一般学术活动计划

项目名称	主要内容	时间	地点	联系人
第20届中国控制会议	线性系统;最优控制;鲁棒控制;预测控制;随机控制;适应控制;模型降阶;优化方法;电力系统;交通系统;社会经济系统;生物环境系统等	3季节	大连	北京中关村中科院系统科学所 张纪峰 电话 62532161
全国第4届炼钢、连铸和轧钢自动化学术交流会	各种炼钢、连铸和轧钢自动化控制系统,计算机系统;专用自动检测仪表传感器和装置;炼钢、连铸和轧钢工艺控制数学模型;计算机辅助生产管理系统;电子商务等	8月	乌鲁木齐	北京丰台路84号 张振华 电话 63812255-3382 邮编 100071
全国第5届 DCS、PLC 和现场总线应用学术交流会	DCS、PLC 和现场总线、智能仪表系统国内外应用发展综述,在工业自动化中的应用、研制和开发;现场总线在楼宇自动化中的应用;DCS 在先进控制、优化控制中的应用软件开发;企业计算机网络和电子商务的应用成果等	10月	成都	同上
2001年中国智能自动化会议	人工神经网络,模糊系统;智能控制;先进控制方法和技术;机器人;多智能体系统;智能管理与决策;智能交通系统;模式识别与图象处理;智能建模与仿真等	8月13-16日	昆明	北京清华大学计算机系 钱宗华 电话 62788939 邮编 100084
第2届全国技术过程故障诊断与安全性学术会议	石油化工、电力、冶金、航空航天、电子、机械、交通运输等行业中涉及实时监测控制、故障检测与诊断、系统可靠性与安全性、安全控制与管理、容错控制等方面的新理论、新方法、新技术和新的应用成果	9月	上海	上海海运学院科研处 蔡荣 电话 62785845 邮编 200135