

# 鲁棒低增益变结构模型参考自适应控制<sup>1)</sup>

林 岩<sup>1</sup> 毛剑琴<sup>1</sup> 操云南<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(北京航空航天大学第七研究室 北京 100083)

<sup>2</sup>(中国科学院软件研究所工业中心 北京 100080)

**摘 要** 就对象含未建模动态且其建模部分相对阶大于 1 时的变结构模型参考自适应控制 (VS-MRAC) 系统, 提出了一种鲁棒低增益变结构控制方案, 特点是系统变结构律在低增益状态下仍可保证所有辅助误差均在有限时间内收敛到零, 从而提高了系统跟踪精度. 此外, 还研究了平均值滤波器对系统稳定性的影响.

**关键词** 变结构控制, 自适应控制, 鲁棒控制, 切换控制, 混合控制.

## A ROBUST VS-MRAC WITH A LOW VARIABLE STRUCTURE CONTROL GAIN

LIN Yan<sup>1</sup> MAO Jian-Qin<sup>1</sup> CAO Yun-Fu<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(The Seventh Research Division (Systems & Control), Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

<sup>2</sup>(Institute of Software, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

**Abstract** In this paper, a new VS-MRAC scheme is proposed for plants with modeled part of relative degrees greater than one. The main feature of the scheme is that all the auxiliary errors can converge to zero in a finite time with a low variable structure control gain so that a higher tracking precision is obtained. Furthermore, the influence of averaging filters on system stability has been further investigated.

**Key words** Variable structure control, adaptive control, robust control, switching control, hybrid control.

## 1 引言

近十年来, 变结构模型参考自适应控制 (VS-MRAC) 理论取得了一系列重要进展<sup>[1~5]</sup>, 并在若干工程问题中得到成功应用<sup>[6,7]</sup>. 由于 VS-MRAC 系统具有良好的过渡过程性能和鲁棒性, 因而作为一种有前途的控制方式受到了人们的关注. 其中, 具有代表性的是文献 [4,5] 的工作. 本文的工作是: 就建模部分相对阶  $n^* > 1$  的对象, 提出了一种鲁棒变结构控制新方案, 可以保证系统在含未建模动态时所有辅助误差均可在有限时间内收敛到零, 而在

1) 国家自然科学基金重大课题(69896250)资助.

收稿日期 1999-10-18 收修改稿日期 2000-05-24

几乎所有的情形下都会导致“低增益”控制,从而提高了系统跟踪精度.这是文献[4,5]没有解决的问题(高增益变结构控制<sup>[8]</sup>可以保证系统即使在含未建模动态时所有辅助误差仍可在有限时间收敛到零,其缺点是过于保守,控制增益可能很大,影响跟踪精度).本文进一步研究了平均值滤波器对系统稳定性的影响.

## 2 问题描述

### 2.1 基本假设

考虑如下严格正则的 SISO 系统:

$$y(t) = G(s)[u(t) + d(y,t)] = G_p(s)(1 + \mu\Delta G(s))[u(t) + d(y,t)] = k_p[n_p(s)/d_p(s)](1 + \mu\Delta G(s))[u(t) + d(y,t)], \quad (1)$$

其中  $u(t), y(t)$  分别表示对象的输入和输出;  $d(y,t)$  是一个关于输出  $y(t)$  和时间  $t$  的非线性函数,反映输出干扰或不确定性等对系统的影响<sup>[9]</sup>;  $n_p(s), d_p(s)$  分别为  $m$  阶和  $n$  阶的首一多项式;  $k_p$  为高频增益. 希望跟踪的理想模型为

$$y_M(t) = M(s)r(t) = k_M[n_M(s)/d_M(s)]r(t), \quad (2)$$

这里  $r(t), y_M(t)$  表示参考输入和理想输出;  $n_M(s), d_M(s)$  分别为  $m$  阶和  $n$  阶的首一 Hurwitz 多项式;  $k_M (> 0)$  为模型的高频增益. 就对象(1)和理想模型(2),有如下基本假设<sup>[3~5]</sup>: A1) 仅对象输入信号  $u(t)$  和输出信号  $y(t)$  是可测量的; A2)  $G_p(s)$  参数是未知的,但其参数不确定性的界属于一个已知的紧集;高频增益  $k_p$  的符号是已知的,不失一般性,假设  $k_p > 0, k_p \in [k_l, k_u]$ ; A3)  $G_p(s)$  是相对阶  $n^* > 1$  的最小相位系统. 因此,可定义一个 Hurwitz 多项式

$$\alpha(s) := \prod_{i=1}^{n^*-1} \alpha_i(s) = \prod_{i=1}^{n^*-1} (s + p_i), \quad p_i > 0, \quad (3)$$

使得  $M(s)\alpha(s)$  的相对阶  $n^* = 1$  (但本文不要求  $M(s)\alpha(s)$  是 SPR 函数); A4) 干扰或不确定项  $d(y,t)$  满足  $|d(y,t)| \leq \bar{d}(y,t)$ , 这里,  $\bar{d}(y,t)$  是一个已知、分段连续且一致有界的函数<sup>[9]</sup>; A5)  $G_p(s), M(s)$  均是完全能控和完全能观测的; A6)  $\Delta G(s)$  严格正则且已知  $\gamma_0 > 0$ , 使未建模动态  $\Delta G(s - \gamma_0)$  仍然是稳定的. 本文仅假设  $k_u > k_l$ , 因为  $k_u = k_l$  时使系统所有辅助误差均收敛至零的变结构律设计问题已经解决<sup>[5]</sup>.

### 2.2 控制结构

仍采用文献[4,5]提出的  $n^* > 1$  时的控制结构. 故有如下定义,跟踪误差:  $e(t) = y(t) - y_M(t)$ ; 输入/输出滤波器:  $\dot{v}_1 = \Lambda v_1(t) + g u(t), \dot{v}_2 = \Lambda v_2(t) + g y(t)$ , 其中  $(\Lambda, g)$  能控,  $v_1, v_2, g \in \mathbf{R}^{n-1}, \Lambda \in \mathbf{R}^{(n-1) \times (n-1)}, \det(sI - \Lambda) = \bar{n}(s)$ , 且选  $\bar{n}(s)$  为任意满足  $\bar{n}(s - \gamma_0)$  稳定的多项式 ( $\gamma_0 > 0$  参见假设 A6)); 对象输入信号:  $u(t) := \hat{\theta}^T \omega(t) + u_{vs}(t), \omega(t) := [r(t), y(t), v_1^T(t), v_2^T(t)]^T, \hat{\theta} := [\hat{k}, \hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1^T, \hat{\theta}_2^T]^T, u_{vs}(t)$  即为欲设计的变结构律. 此外,由文献[10]知,在满足上述假设时,存在  $2n$  阶常向量  $\theta^* := [k^*, \theta_0^*, (\theta_1^*)^T, (\theta_2^*)^T]^T$ , 使得当对象的输入信号  $u(t) = (\theta^*)^T \omega(t)$ , 干扰  $d(y,t) \equiv 0, \mu = 0$  时,有  $y(t) = G_p(s)u(t) = G_p(s)[(\theta^*)^T \omega(t)] = M(s)r(t)$ . 由于本文不考虑调参律,故以上  $\hat{\theta}$  是根据名义对象  $\hat{G}_p(s) := \hat{k}_p \hat{n}(s) / \hat{d}_p(s)$  所求得的一个  $2n$  阶常向量,作为  $\theta^*$  的估计值.

变结构律  $u_{vs}(t)$  设计的目的:对象建模部分  $n^* > 1$  时系统所有辅助误差均在有限时间内收敛到零,而其跟踪误差  $e(t)$  能在有限时间收敛到一个残差集内,从而提高跟踪精度.

### 3 主要结果

本节将介绍对象建模部分相对阶  $n^* > 1$  时变结构律  $u_{vs}(t)$  新的设计方案. 根据上一节所介绍的控制结构, 利用 Mason 公式, 容易得到  $n^* > 1$  时系统跟踪误差表达式为

$$e(t) = M(s)\alpha(s)\kappa^* \{ \tilde{\theta}^T \omega(t) / \alpha(s) + (1 - d_1(s) / \bar{n}(s)) [d(y, t) + \mu \Delta G(s) d(y, t) + \mu \Delta G(s) u(t)] / \alpha(s) + \varepsilon(t) + u_{vs}(t) / \alpha(s) \}, \quad (4)$$

其中  $\tilde{\theta} := \hat{\theta} - \theta^* = [\hat{k} - k^*, \hat{\theta}_0 - \theta_0^*, \hat{\theta}_1^T - (\theta_1^*)^T, \hat{\theta}_2^T - (\theta_2^*)^T]^T$ ,  $d_1(s) := \hat{\theta}_1^T \text{adj}(sI - \Lambda) \mathbf{g}$ ,  $\kappa^* := k_p / k_M = 1 / k^*$ ,  $\alpha(s)$  由式(3)定义; 此外, 在式(4)中增加了一项  $\varepsilon(t)$ , 为一有界、可微且依指数速度衰减的函数, 反映系统所有内部状态初始条件的影响. 尽管此时  $M(s)\alpha(s)$  的相对阶为 1, 但由于(4)式中  $1/\alpha(s)$  的影响使得不可能按照通常处理相对阶  $n^* = 1$  的方法来设计变结构律  $u_{vs}(t)$ , 而要利用增广和辅助信号<sup>[4]</sup>来得到  $u_{vs}(t)$ , 即

$$\text{增广信号: } y_a(t) = M(s)\alpha(s)\hat{k} [u_{vs}(t) / \alpha(s) - u_0(t)]; \quad (5)$$

$$\text{辅助误差信号: } e_0(t) = e(t) - y_a(t), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= -p_i e_i(t) - F^{-2}(s) \alpha_i(s) u_{i-1}(t) + u_i(t), \\ i &= 1, 2, \dots, (n^* - 1), u_{n^*-1}(t) := u_{vs}(t), \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $\hat{k} := k_u / k_M$ ;  $k_u$  的定义参见假设 A2);  $\alpha_i(s)$  ( $i = 1, 2, \dots, n^* - 1$ ) 的定义参见(3)式;  $u_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n^* - 1$ ) 是欲设计的变结构律;  $F^{-2}(s) = [1 / (\tau s + 1)^2]$  即是“平均值”滤波器<sup>[5]</sup>, 这里时间常数  $\tau$  是一个较小的正数, 其作用将在后面讨论. 利用文献[11, 13]的结果可将  $e_0(t)$  也表示为如式(7)的一阶微分方程形式

$$\begin{aligned} \dot{e}_0(t) &= -p e_0(t) + k_p \{ [\tilde{\theta}^T \omega(t) + (1 - d_1(s) / \bar{n}(s)) d(y, t)] / \alpha(s) + \\ &\quad \mu (1 - d_1(s) / \bar{n}(s)) \Delta G(s) [d(y, t) + u(t)] / \alpha(s) + \\ &\quad (1 - k_u / k_p) \left[ \sum_{i=1}^{n^*-1} (\Omega_{(i-1)}^{-1}(s) F^{-2(n^*-1-i)}(s) e_i(t)) \right] - (\rho(s) / (k_p n_M(s) \alpha(s))) e_0(t) + \\ &\quad \varepsilon(t) + (1 - k_u / k_p) F^{-2(n^*-1)}(s) u_0(t) + (k_u / k_p) u_0(t) \}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $\rho(s)$  为一可求出的多项式, 满足  $\deg(\rho(s)) < \deg(n_M(s)\alpha(s))$ ,  $p$  是一个可求出的实数,  $\rho(s)$ ,  $p$  的定义均见文献[11];  $\Omega_{(i-1)}^{-1}(s) := \prod_{j=1}^{i-1} \alpha_j^{-1}(s)$ ,  $\Omega_0^{-1}(s) := 1$ ,  $\alpha_j^{-1}(s)$  见(3)式.

以下引理反映了平均值滤波器对向量  $\omega(t)$  的影响(其证明略).

**引理 1.** 存在一个  $\mu_1^* > 0$ , 使得对所有  $\mu \in [0, \mu_1^*]$ , 有

$$\theta^T \omega(t) / \alpha(s) = \theta^T \omega_{\Delta e}(t) / \alpha(s) + \tau [G(s, \mu) / \alpha(s)] u_0(t), \quad (9)$$

这里  $\theta$  可分别取  $\hat{\theta}$  或  $\tilde{\theta}$ , 相应地,  $G(s, \mu)$  可分别取  $\hat{G}(s, \mu)$  或  $\tilde{G}(s, \mu)$ ,

$$\omega_{\Delta e}(t) := [r(t), y_e(t), \mathbf{v}_{1\Delta e}^T(t), \mathbf{v}_{2e}^T(t)]^T,$$

$$y_e(t) := e_0(t) + \sum_{i=1}^{n^*-1} \{ M(s)\alpha(s)\hat{k} [\Omega_{i-1}^{-1}(s) F^{-2(n^*-1-i)}(s)] e_i(t) \} + y_M(t),$$

$$\mathbf{v}_{1\Delta e}(t) := (sI - \Lambda)^{-1} \mathbf{g} [G_p(s) (1 + \mu \Delta G(s))]^{-1} y_e(t) - d(y, t),$$

$$\mathbf{v}_{2e}(t) := (sI - \Lambda)^{-1} \mathbf{g} y_e(t),$$

$$G(s, \mu) := \{ \theta_0 + \theta_1^T (sI - \Lambda)^{-1} \mathbf{g} [G_p(s) (1 + \mu \Delta G(s))]^{-1} + \theta_2^T (sI - \Lambda)^{-1} \mathbf{g} \} \bar{G}(s),$$

$$\bar{G}(s) := [\hat{k}M(s)\alpha(s)(F^{-2(n^*-1)}(s) - 1)/\tau]. \quad (10)$$

注 1. 注意到  $(sI - \Lambda)^{-1}g$  的各分量严格正则, 故容易验证  $\bar{G}(s, \mu)/\alpha(s)$ ,  $\hat{G}(s, \mu)/\alpha(s)$  均是严格正则且稳定的.

讨论变结构律  $u_{vs}(t)$  设计问题. 首先定义正则信号<sup>[12]</sup>如下:

$$\dot{m}(t) = -\lambda_0 m(t) + \lambda_1 [\bar{d}(y, t)/\alpha(s) + |u(t)/\alpha(s)| + 1], \quad m(0) > \lambda_1/\lambda_0, \quad (11)$$

其中  $\lambda_0, \lambda_1 > 0$ , 且存在  $\lambda_2 > 0$ , 使得  $\lambda_0 + \lambda_2 < \gamma_0$  ( $\gamma_0$  参见假设 A6)). 其次, 在(8)式中, 由于  $e_i(t)$  ( $i=0, 1, \dots, n^*-1$ ),  $\omega(t)$  中各信号皆可测量,  $n_M(s), \bar{n}(s), \bar{d}(y, t), d_1(s), \rho(s), p$  已知, 于是易得函数  $h_0(t)$  ( $\bar{h}_0(t)$ ), 使得

$$\begin{aligned} & |k_p \bar{\theta}^T \omega(t)/\alpha(s) + k_p [(1 - d_1(s)/\bar{n}(s))/\alpha(s)] d(y, t) - (\rho(s)/(\alpha(s)n_M(s))) e_0(t) + \\ & (k_p - k_u) \delta [\lambda F^{-2(n^*-1)}(s) e_0(t) + (g_0/k_l) F^{-2(n^*-1)}(s) m(t) \text{sgn}(e_0(t))] + \\ & (k_p - k_u) \sum_{i=1}^{n^*-1} \Omega_{(i-1)}^{-1}(s) F^{-2(n^*-i-1)}(s) e_i(t) | \leq \\ & k_u \left\{ \xi_r \left| \frac{r(t)}{\alpha(s)} \right| + \xi_0 \left| \frac{y(t)}{\alpha(s)} \right| + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_{1i} \left| \frac{v_{1i}(t)}{\alpha(s)} \right| + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_{2i} \left| \frac{v_{2i}(t)}{\alpha(s)} \right| + \bar{d}(y, t) + \right. \\ & \left. \int_0^t |c_d^T \exp[A_d(t - \xi)] b_d| \bar{d}(y, \xi) d\xi \right\} + |[\rho(s)/(\alpha(s)n_M(s))] e_0(t) | + \\ & (k_u - k_l) | [\delta \lambda F^{-2(n^*-1)}(s) e_0(t) + \sum_{i=1}^{n^*-1} \Omega_{(i-1)}^{-1}(s) F^{-2(n^*-i-1)}(s) e_i(t) ] + \\ & \delta (g_0/k_l) F^{-2(n^*-1)}(s) m(t) \text{sgn}(e_0(t)) | := \begin{cases} \bar{h}_0(t), & \text{if } \delta = 1 \\ h_0(t), & \text{if } \delta = 0 \end{cases}, \quad (12) \end{aligned}$$

其中  $(A_d, b_d, c_d)$  为  $d_1(s)/\bar{n}(s)$  的一个最小实现,  $k_l$  为  $k_p$  的下界, 见假设 A2); 而根据假设 A2),  $\xi_r (\geq |\bar{k}|)$ ,  $\xi_0 (\geq |\bar{\theta}_0|)$ ,  $\xi_{1i} (\geq |\bar{\theta}_{1i}|)$ ,  $\xi_{2i} (\geq |\bar{\theta}_{2i}|)$  均为可求出的常数; 常数  $\lambda$  定义为: 若  $p > 0$ ,  $\lambda = -1/2$ ; 若  $p \leq 0$ ,  $\lambda = -(1/2 + \bar{p}/k_l)$ , 这里,  $\bar{p} > |p|$ . 进而, 有如下主要结论:

**定理 1.** 设上述  $n^* > 1$  时的 VS-MRAC 系统满足假设 A1)~A6). 若对辅助误差子系统  $e_0(t), e_1(t), \dots, e_{n^*-1}(t)$  (参见式(7), (8)), 令其变结构律定义如下:

$$u_0(t) = \begin{cases} \bar{u}_0(t), & \text{if } (k_u - k_l) |\sigma(t)| > c \\ \underline{u}_0(t), & \text{if } (k_u - k_l) |\sigma(t)| \leq c \end{cases}, \quad (13)$$

$$u_i(t) = -[F^{-2}(s)\alpha_i(s)u_{i-1}(t) + \Delta_i] \text{sgn}(e_i(t)), \quad i=1, 2, \dots, n^*-1, u_{n^*-1} := u_{vs}(t),$$

其中  $c$  为预先给定的正常数,  $\Delta_i$  ( $i=0, 1, \dots, n^*-1$ ) 为任意正常数,

$$\bar{u}_0(t) := \begin{cases} -e_0(t)/2 - [(\|\bar{h}_0(\zeta)_t\|_\infty + g_0 m(t) + \Delta_0)/k_l] \text{sgn}(e_0(t)), & \text{if } p > 0 \\ -(1/2 + \bar{p}/k_l) e_0(t) - [(\|\bar{h}_0(\zeta)_t\|_\infty + g_0 m(t) + \Delta_0)/k_l] \text{sgn}(e_0(t)), & \text{if } p \leq 0 \end{cases},$$

$$\underline{u}_0(t) := \begin{cases} -e_0(t)/2 - [(\|h_0(t) + g_0 m(t) + c + \Delta_0\|/k_u)] \text{sgn}(e_0(t)), & \text{if } p > 0 \\ -(1/2 + \bar{p}/k_l) e_0(t) - [(h_0(t) + g_0 m(t) + c + \Delta_0)/k_u] \text{sgn}(e_0(t)), & \text{if } p \leq 0 \end{cases},$$

$$\sigma(t) := F^{-2(n^*-1)}(s)u_0(t), \quad m(t): \text{由(11)式定义} \quad (14)$$

则存在一个  $g_0^* > 0$ ,  $\tau^* > 0$ , 一旦  $g_0 \in (0, g_0^*)$ ,  $\tau \in (0, \tau^*)$  给定, 那么, 总有  $\mu^* > 0$ , 使得对每一个  $\mu \in [0, \mu^*)$ , 辅助误差  $e_i(t)$  ( $i=0, 1, \dots, n^*-1$ ) 均会在有限时间收敛到零; 同时, 存在一个有限时间  $T > 0$ , 使系统跟踪误差  $e(t)$  对所有  $t \geq T$  收敛到如下残差集内:

$$D_\epsilon := \{e: |e(t)| \leq \tau \varphi \|u_0(\zeta)_t\|_\infty + \psi(t), \forall t \geq T\}, \quad (15)$$

其中  $\varphi$  为一正常数,  $\psi(t)$  为一依指数速度收敛到零的项, 定义  $f: R^+ \rightarrow R$  且  $\zeta \in [0, +\infty)$ , 则

$\|f(\zeta)_t\|_\infty := \text{ess sup}_{\zeta \leq t} |f(\zeta)|$ . (证明参见附录)

注 2. (13)式中,  $\bar{u}_0(t), \underline{u}_0(t)$  可分别视为高增益和低增益. 定理有关(15)式的证明过程蕴涵如下事实: 当  $u_0(t)$  为低增益时, 将可使跟踪误差的精度提高.

### 4 数值仿真结果

例 1. 考虑如下建模部分相对阶  $n^* = 2$  的被控对象:

$$G(s) = G_p(s)(1 + \mu\Delta G(s)) = [1/(s^2 + 3s - 2)][1 + \mu(s - 1)/(s^2 + 2s + 1)], \mu = 0.1. \tag{16}$$

其建模部分初始条件为  $x(0) = [4, 0]^T$ ; 理想模型:  $M(s) = 1/(s^2 + s + 1)$ ; 名义系统:  $\hat{G}_p(s) = (5/3)/(s^2 + s - 4/3)$ , 由此可得  $\theta^*$  的估计值  $\hat{\theta} = [0.6, -2.6, 2.4]^T$  以及控制器参数不确定性范围; 正则信号  $m(t)$  (参见式(11)):  $\dot{m}(t) = -0.7m(t) + [\bar{d}(y, t)/(s + 2) + |u(t)/(s + 2)| + 1]$ ,  $m(0) = 2, g_0 = 0.5$ ; 平均值滤波器  $F^{-2}(s) = 1/(0.05s + 1)^2$ ; 输入信号:  $r(t) = \sin(0.5t)$ ; 干扰信号  $d(y, t)$ : 幅值为 1、频率 0.5Hz 的方波; 控制律(13)中, 取  $c = 2$ . 利用 Matlab/Simulink Toolbox, 根据定理 1 设计变结构律  $u_{vs}(t)$ , 所得系统跟踪误差  $e(t)$ , 辅助误差  $e_0(t), e_1(t), u_0(t)$  的波形图如图 1~图 4 所示. 从图中可以明显看出,  $u_0(t)$  很快从高增益状态切换到低增益状态,  $e_0(t), e_1(t)$  均在有限时间内收敛到零.

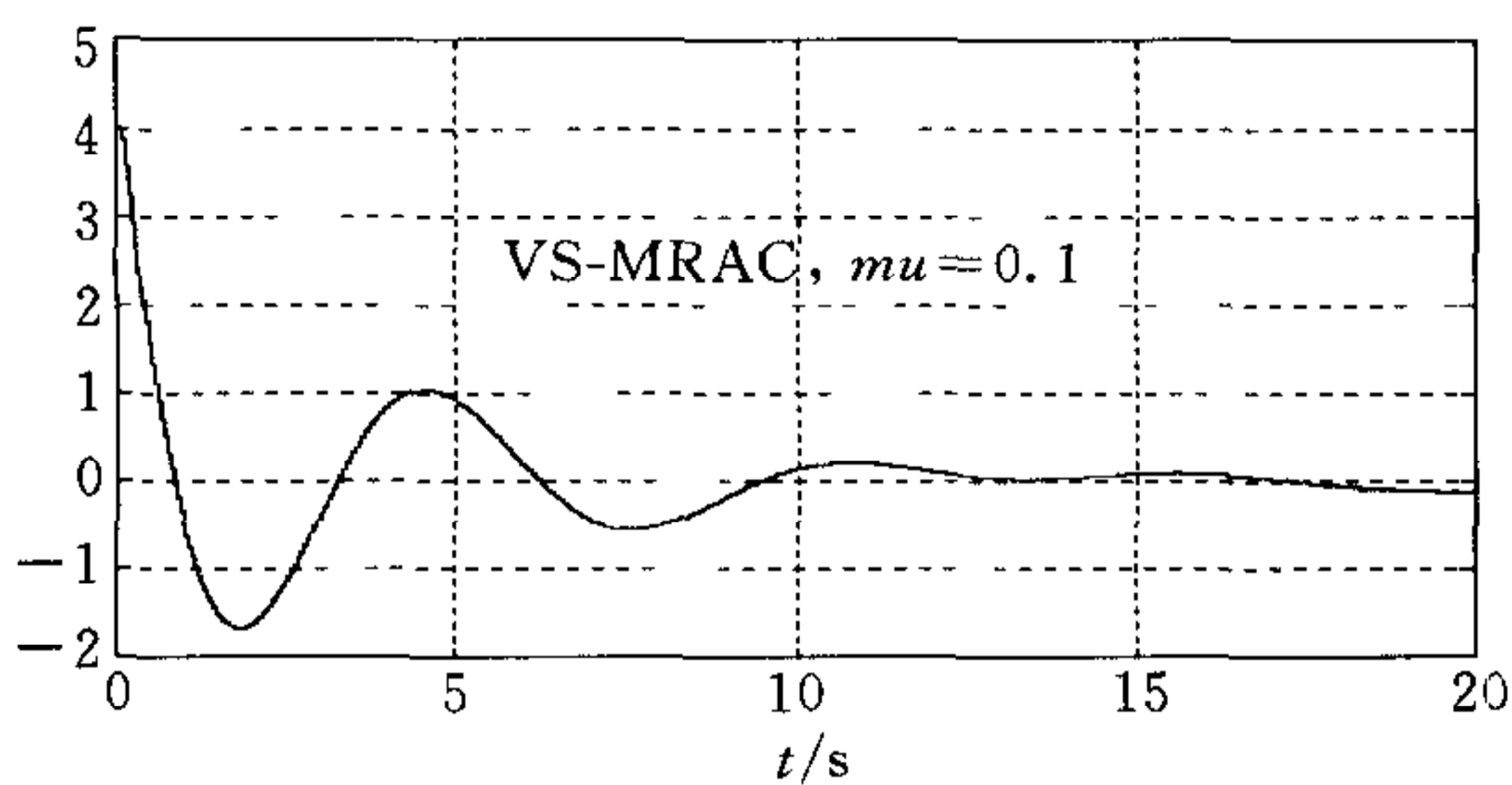


图 1 例1跟踪误差  $e(t)$

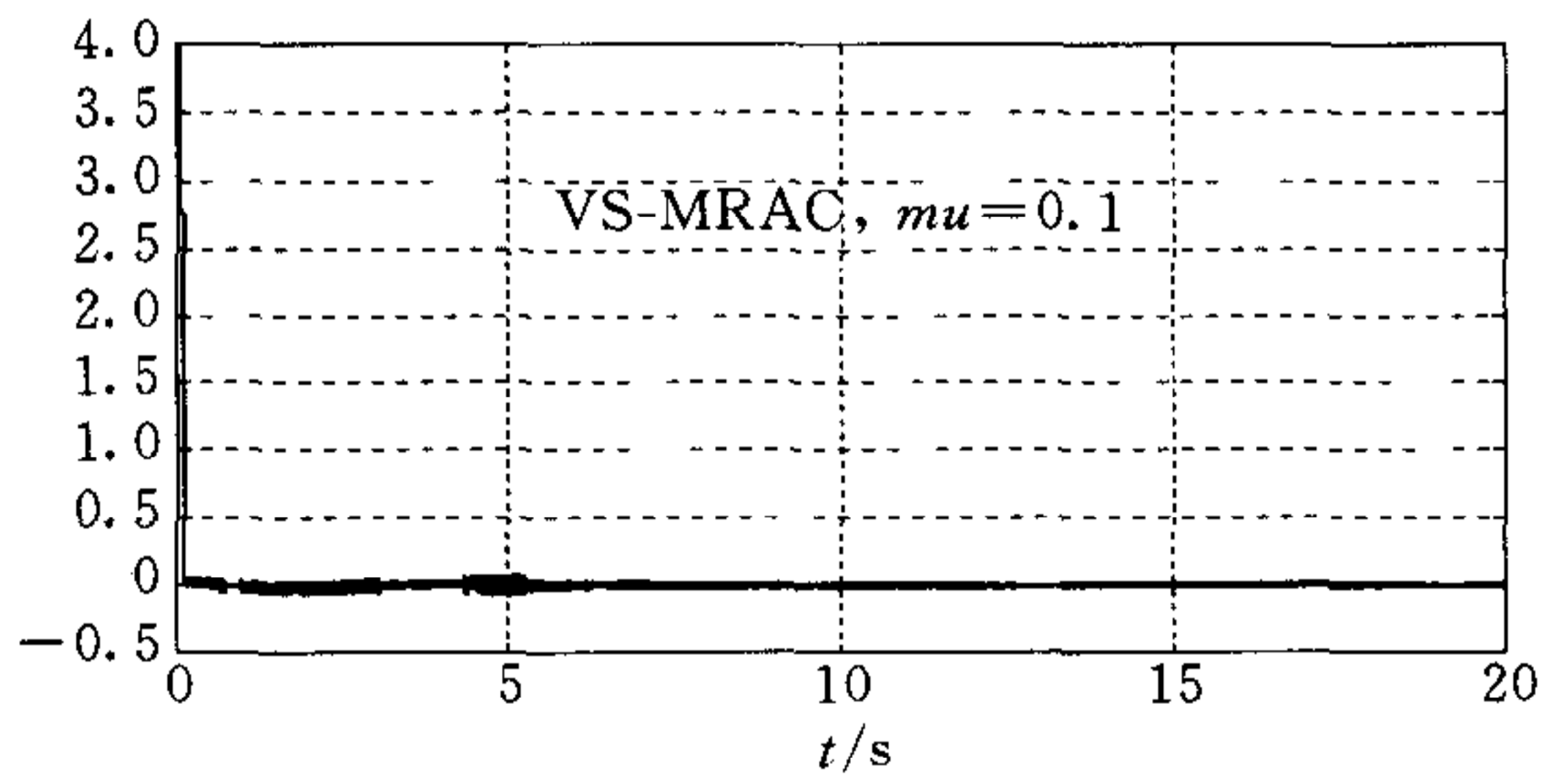


图 2 例1辅助误差  $e_0(t)$

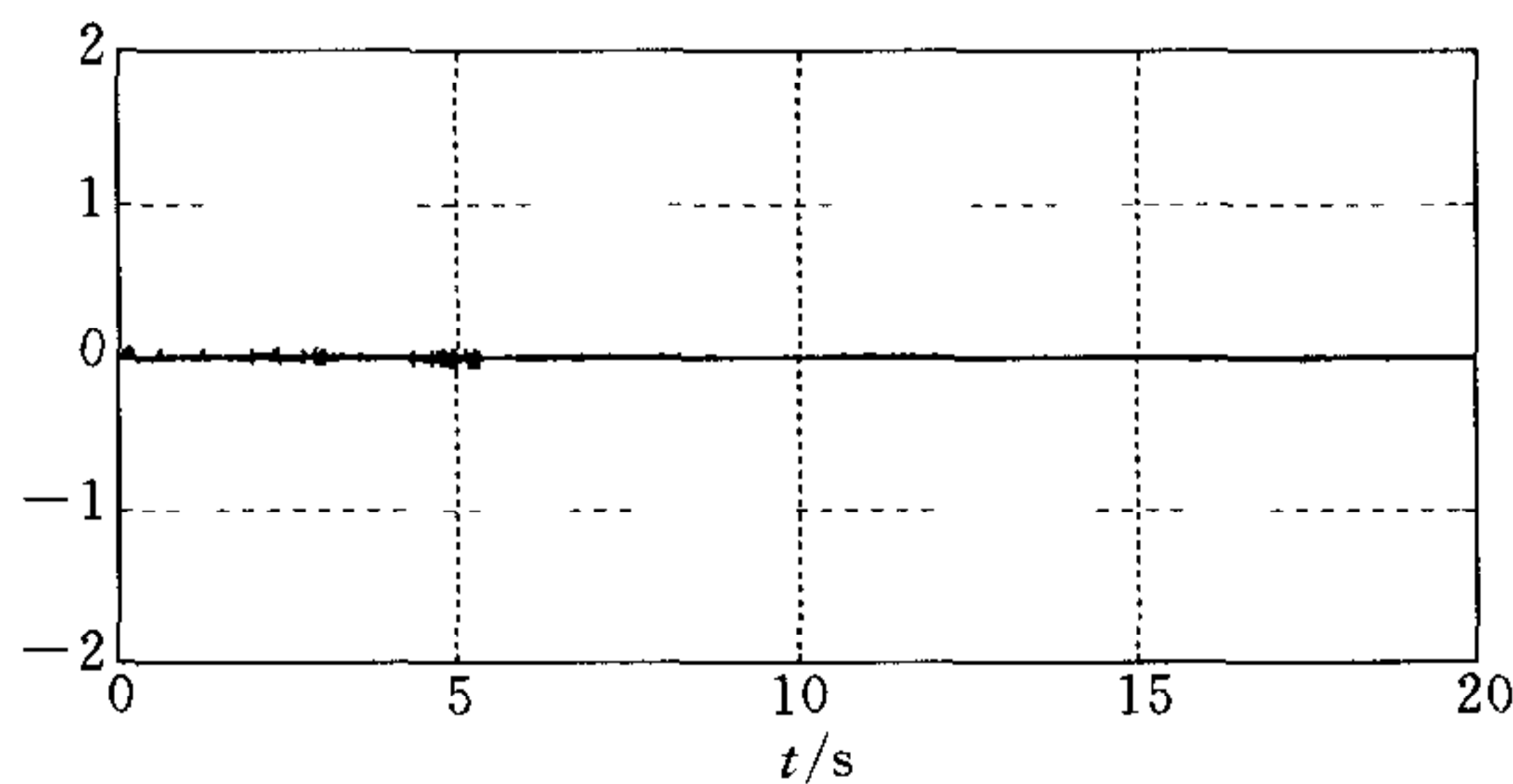


图 3 例1跟踪误差  $e_1(t)$

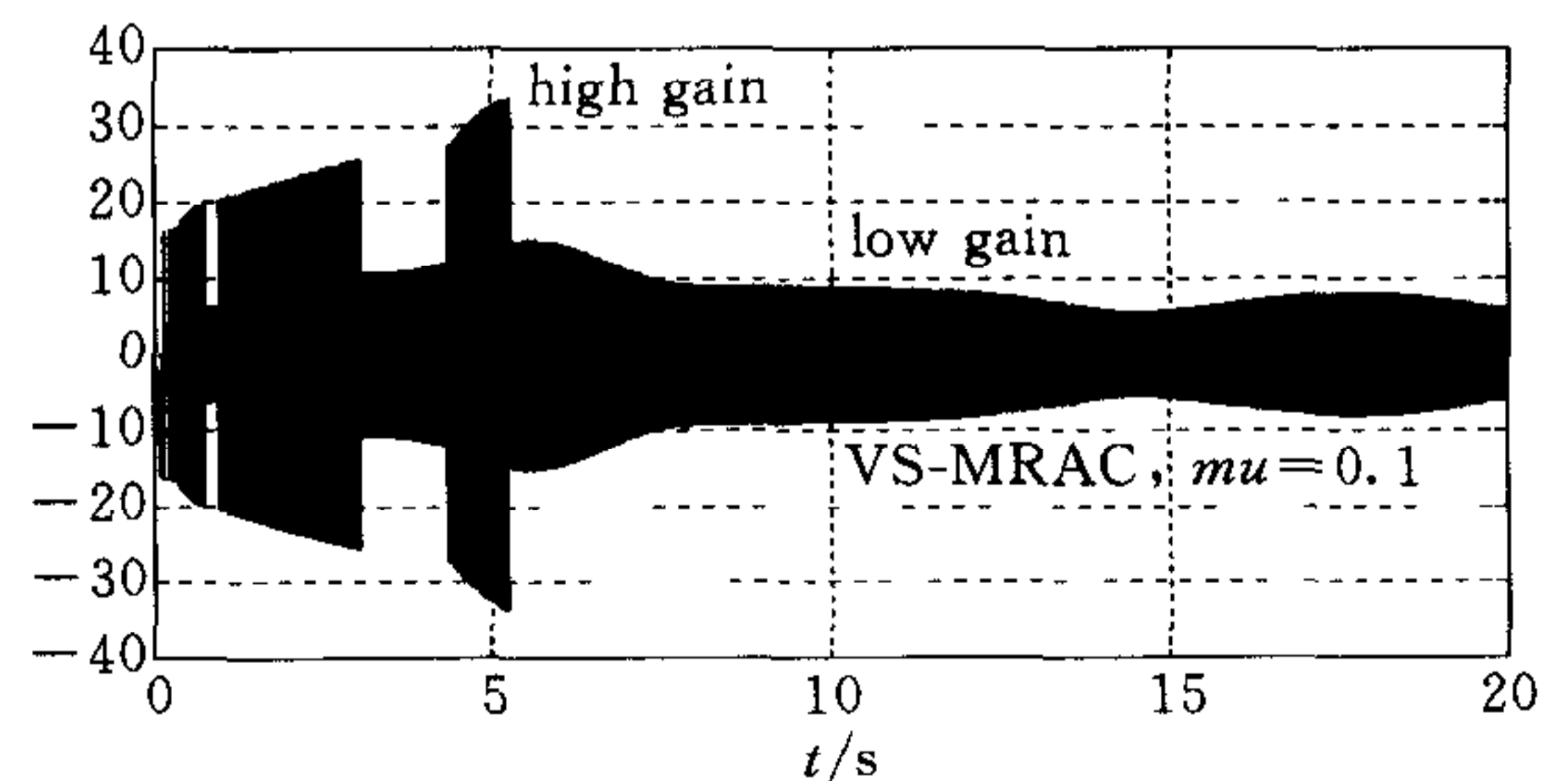
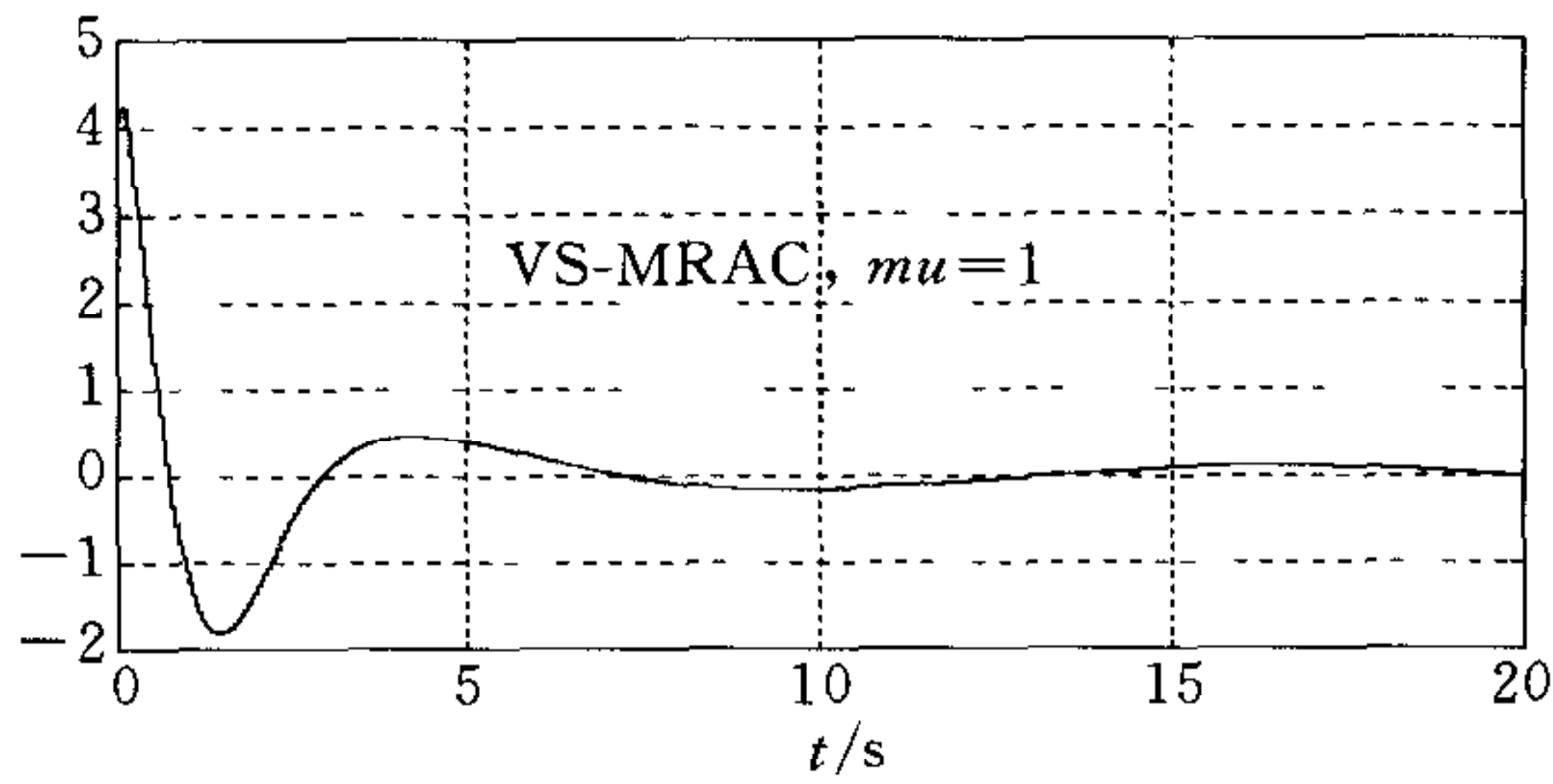
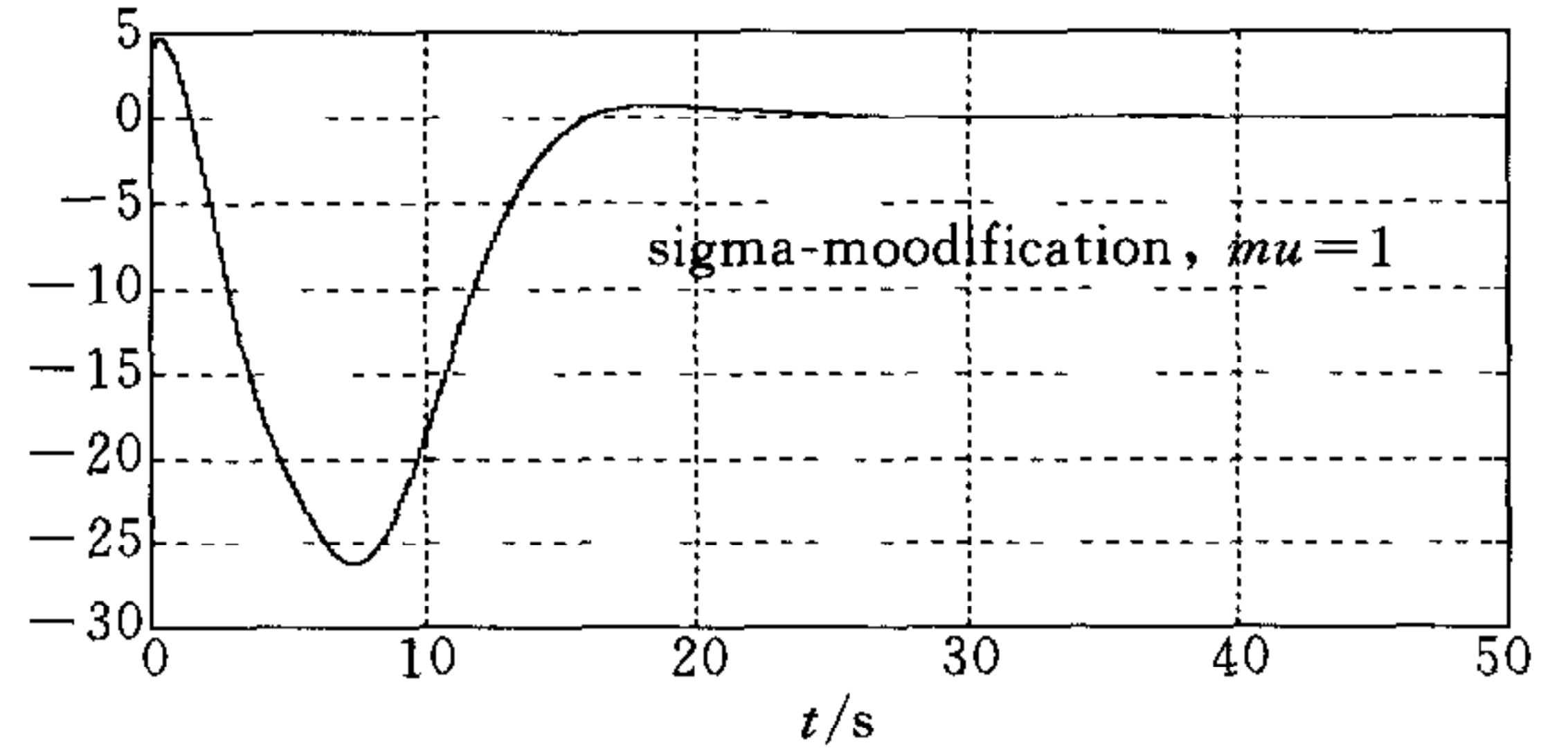


图 4 例1辅助变结构律  $u_0(t)$

例 2. 将本文方法与采用  $\sigma$ -修正方案<sup>[12]</sup>的结果进行比较. 在修正  $\sigma$ -方案中, 取被控对象、参考模型及  $m(t)$  均与上例相同, 所不同的是假设对象高频增益已知且不加干扰信号  $d(y, t)$ ; 此外, 取  $[\theta_0(0), \theta_1(0), \theta_2(0)] = [-2.6, 2.4]^T$  (与例 1 中  $[\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = [-2.6, 2.4]^T$  相对应). 由图 5, 图 6 及大量仿真可看出, 本文 VS-MRAC 方案跟踪误差的过渡过程在取不同的  $\mu$  值时都较  $\sigma$ -修正方案好.

图 5 例2跟踪误差  $e(t)$  (VS-MRAC,  $\mu=1$ )图 6 例2跟踪误差  $e(t)$  ( $\sigma$ -修正,  $\mu=1$ )

## 5 结论

本文提出的 VS-MRAC 新方案使系统所有辅助误差在低增益情况下仍可在有限时间收敛到零,从而提高了系统的跟踪精度. 引理 1 的结论及定理 1 的证明过程还表明,平均值滤波器对系统稳定性的影响不仅反映在  $(k_p - k_u)F^{2(n^* - 1)}(s)u_0(t)$  一项上(参见(8)式)——这是文献[5]已经得到的结果,还反映在  $\tau[\tilde{G}(s, \mu)/\alpha(s)]u_0(t)$  等项上,它们对系统稳定性的影响是必须考虑的.

## 参 考 文 献

- 1 Narendra K S, Boskovic J D. A combined direct, indirect, and variable structure method for robust adaptive control. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1992, **37**(2):262~268
- 2 Hsu L, Costa R R. Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurement; Part I. *Int. J. Control*, 1989, **49**(2):399~416
- 3 Hsu L. Variable structure model reference adaptive control using only I/O measurement; General case. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1990, **35**(11):1238~1243
- 4 Hsu L, Araujo A D, Costa R R. Analysis and design of I/O based variable structure adaptive control. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **39**(1):4~21
- 5 Hsu L, Lizarralde F, Araujo A D. New results on output-feedback variable structure model-reference adaptive control; Design and stability analysis. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1997, **42**(3):386~393
- 6 Cunha J P V S, Costa R R, Hsu L. Design of new high performance VS position control of ROV's. *IEEE J. Oceanic Eng.*, 1995, **20**(1):42~55
- 7 Hsu L, Lizarralde F. Experimental results on variable structure adaptive robot control without velocity measurement. In: Proc. Amer. Contr. Conf., Seattle, 1995. 2317~2321
- 8 Chien C J, Sun K C, Wu A C, Fu L C. A robust MRAC using variable structure design for multivariable plants. *Automatica*, 1996, **32**(6):833~848
- 9 Qu Z, Dorsey J F, Dawson D M. Model reference robust control of a class of SISO systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **39**(11):2219~2234
- 10 Narendra K S, Valavanis S. Stable adaptive controller design-direct control. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1978, **23**(4):570~583
- 11 Lin Y, Zhang J, Mao J. Variable structure robust adaptive control with unmodelled dynamics. In: Proc. 36th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, 1997. 3243~3249
- 12 Ioannou P A, Tsakalis K S. A robust direct adaptive controller. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1986, **31**(11):1033~1043
- 13 林岩,毛剑琴,刘栋栋. 具有零辅助误差的鲁棒变结构模型参考自适应控制. 见:第三届全球华人智能控制与智能自动化大会论文集,合肥,2000

## 附 录

**定理 1 的证明.** 因篇幅所限,在此仅给出主要的证明思路.证明分如下步骤:

1) 证明在控制律(13)的作用下辅助误差  $e_i(t)$  ( $i=0,1,2,\dots,n^*-1$ ) 一致有界且均在有限时间内收敛到零. 首先对  $e_0(t)$  定义 Lyapunov 函数  $v_0=e_0^2(t)/2$ , 则可证明无论  $u_0(t)$  取  $\bar{u}_0(t)$  还是  $\underline{u}_0(t)$ ,  $e_0(t)$  均将一致有界并且将在有限时间内收敛到零. 证明中注意如下事实:由文献[12]知,对于给定的  $g_0>0$ ,一定可以找到一个  $\mu_2^*=\mu_2^*(g_0)>0$ ,使得对每一个  $\mu\in[0,\mu_2^*)$ ,有

$$\mu|(1-d_1(s)/\bar{n}(s))\Delta G(s)[d(y,t)+u(t)]/\alpha(s)|\leq g_0 m(t), \quad (\text{A1})$$

因此,若取  $\mu^*=\min\{\mu_1^*,\mu_2^*\}$ ,显然对给定的  $\mu\in[0,\mu^*)$ ,引理 1 和(A1)式同时成立,这里,  $\mu_1^*$  见引理 1. 如果定义 Lyapunov 函数  $V_i=e_i^2(t)/2$ ,那么,当把(13)式的控制律  $u_i(t)$  ( $i=1,2,\dots,n^*-1$ ) 代入  $\dot{V}_i$ ,则易于证明  $e_i(t)$  一致有界并将在有限时间内收敛到零.

2) 证明  $u_i(t)$  ( $i=0,1,\dots,n^*-1$ ) 是一致有界的.事实上,从式(7),(13)可知若  $u_0(t)$  一致有界,那么  $u_1(t)$  必将一致有界,依此类推,  $u_i(t)$  ( $i=2,\dots,n^*-1$ ) 亦必将一致有界.因此,只要证明存在一个  $\tau^*>0$ ,使得对每一个  $\tau\in(0,\tau^*)$ ,  $u_0(t)$  一致有界就可以了.由  $u(t)/\alpha(s):=[\hat{\theta}^T\omega(t)+u_{vs}(t)]/\alpha(s)$ 、引理 1、关系  $\alpha^{-1}(s)u_{vs}(t)=\sum_{i=1}^{n^*-1}[\Omega_{i-1}^{-1}(s)F^{-2(n^*-1-i)}(s)e_i(t)]+F^{-2(n^*-1)}(s)u_0(t)$  [13] 以及  $e_i(t)$  ( $i=0,1,\dots,n^*-1$ ) 一致有界且在有限时间内收敛到零的事实,不难得到

$$\|u_a(\zeta)_t\|_\infty\leq\eta_1+(\tau\eta_2+1)\|u_0(\zeta)_t\|_\infty \quad (\text{A2})$$

对某个正常数  $\eta_1,\eta_2$  成立.这里,  $u_a(t)=u(t)/\alpha(s)$ . 另一方面,在(12)式中利用引理 1,可证

$$\xi_0\left|\frac{y(t)}{\alpha(s)}\right|+\sum_{i=1}^{n-1}\xi_{1i}\left|\frac{v_{1i}(t)}{\alpha(s)}\right|+\sum_{i=1}^{n-1}\xi_{2i}\left|\frac{v_{2i}(t)}{\alpha(s)}\right|\leq\eta_3+\tau\eta_4\|u_0(\zeta)_t\|_\infty, \quad (\text{A3})$$

其中  $\eta_3,\eta_4$  为某个正常数.考虑到式(A2),(A3),于是对  $u_0(t)$  经过烦琐的证明可知存在  $\tau^*>0$ ,使得对每个  $\tau\in(0,\tau^*)$ ,有

$$\|u_0(\zeta)_t\|_\infty\leq k_1+[2g_0(\lambda_1/\lambda_0)/(1-\tau k_2)]\|u_a(\zeta)_t\|_\infty, 1-\tau k_2>0, \quad (\text{A4})$$

$$\|u_a(\zeta)_t\|_\infty\leq k_4+[2g_0(\lambda_1/\lambda_0)(\tau k_3+1)/(1-\tau k_2)]\|u_a(\zeta)_t\|_\infty, \quad (\text{A5})$$

其中  $k_1,k_2,k_3,k_4$  均为某个正常数.式(A5)表明,总可以选择  $g_0^*>0$ ,使得对每个给定的  $g_0\in(0,g_0^*)$ ,对所有  $t\in[0,+\infty)$ ,  $\|u_a(\zeta)_t\|_\infty$  有界,从式(A4)知  $u_0(t)$  一致有界.

3) 讨论跟踪误差  $e(t)$  及闭环系统其它各处信号的一致有界性.因每一个  $e_i(t)$  均在有限时间收敛到零,令  $T:=\max\{t_{ei}:e_i(t)=0,\forall t\geq t_{ei},i=0,1,\dots,n^*-1\}$ ,则对所有  $t\geq T$ ,由关系式[13]

$$e(t)=e_0(t)+\sum_{i=1}^{n^*-1}\hat{k}[M(s)\alpha(s)\Omega_{i-1}^{-1}(s)F^{-2(n^*-1-i)}(s)e_i(t)]+\hat{k}M(s)\alpha(s)[(F^{-2(n^*-1)}(s)-1)u_0(t)] \quad (\text{A6})$$

可知与  $e_i(t)$  有关的部分只剩下一些有初始条件引起的、以指数速度收敛的项,可将其归入式(15)的  $\phi(t)$  中;而对式(A6)中与  $u_0(t)$  有关的项,则不难证明有与  $\tau$  无关的正常数  $\varphi$ ,使得  $|M(s)\alpha(s)\hat{k}[(F^{-2(n^*-1)}(s)-1)u_0(t)]|\leq\tau\varphi\|u_0(\zeta)_t\|_\infty$ ,再考虑到该项的初始条件,并将其也归入到  $\phi(t)$  中,就得到了式(15).此外,式(A6)还表明  $|u_0(t)|$  越小(低增益),则跟踪精度将会越高.最后在  $e(t),e_i(t),u_i(t)$  ( $i=0,1,\dots,n^*-1$ ) 一致有界的基础上,不难得出系统中其余信号均一致有界. 证毕.

**林 岩** 博士、副教授.主要研究领域为鲁棒与自适应控制.

**毛剑琴** 博士、教授、博士生导师,现为中国自动化学会常务理事、副秘书长,美国电子工程师学会高级会员,IEEE 控制系统学会北京分会主席、IEE Fellow.主要研究领域为最优控制、计算机辅助控制系统分析与设计、奇异值理论及其应用、基于计算智能的复杂系统辨识、建模、控制及应用、鲁棒低阶控制器的设计及变结构自适应控制系统理论与应用等.

**操云南** 副研究员,在职博士生.主要研究领域为系统建模与仿真.