第27卷 第2期
2001年3月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 27, No. 2
Mar., 2001

混合不确定系统的鲁棒稳定性[1)]

安森建
(北京理工大学自动控制系 北京 100081)

黄 琳
(北京大学力学与工程科学系 北京 100871)

(E-mail: sjan@263.net)

摘 要 研究兼有参数不确定性和非结构不确定性的混合不确定系统的鲁棒稳定性，该问题可以转化为具有参数摄动的传递函数族的最大 H_∞ 范数的计算问题，针对区间对象的加权 H_∞ 范数的最大值问题，给出了精确的计算公式并讨论了顶点检验成立的条件.

关键词 区间系统，混合不确定性，鲁棒稳定性.

ROBUST STABILITY OF SYSTEMS WITH UNCERTAINTIES OF MIXED TYPE

AN Sen-Jian
(Department of Automatic Control, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)
(E-mail: sjan@263.net)

HUANG Lin
(Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871)

Abstract This paper deals with robust stability analysis of systems with both parametric and unstructured uncertainties. This problem can be transformed to the computation problem of the maximal norm of transfer functions with parametric perturbations. In this paper, an exact formula is given to compute the maximal norm of a weighted interval plant and the condition under which vertex results hold is discussed.

Key words Interval system, uncertainty of mixed type, robust stability.

1 引言

考察如图 1 所示的混合摄动系统，

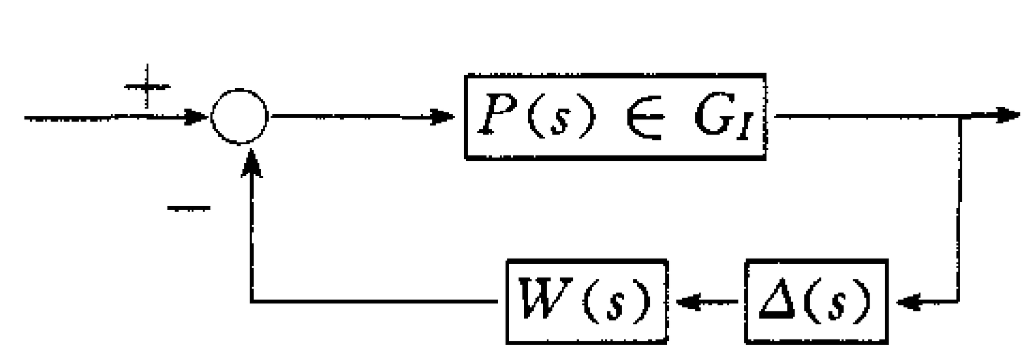

图 1 混合摄动系统

图中 $\Delta(s)$ 表示非结构摄动，它是满足下述条件的稳定的传递函数

$$|\Delta(j\omega)| < 1, \forall\ \omega \geqslant 0,$$

1) 国家自然科学基金、北京理工大学引进人才启动基金资助项目.
收稿日期 1999-01-29 收修改稿日期 1999-11-10

$W(s)$为非结构摄动的加权因子，并且为稳定的传递函数，它描述了非结构摄动的大体轮廓，G_I 表示一个真的区间系统族，即

$$G_I \triangleq \left\{P(s): P(s)=\frac{N(s)}{D(s)}, N(s)\in N_I, D(s)\in D_I\right\},$$

其中 N_I, D_I 均为区间多项式族，$N_I=\left\{N(s)=\sum_{i=0}^{m} b_i s^i, b_i\in[b_i^-, b_i^+], 0\leqslant i\leqslant m\right\}, D_I=\left\{D(s)=s^n+\sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i, a_i\in[a_i^-, a_i^+], 0\leqslant i\leqslant n-1\right\}$.

本文用 N_K, D_K 来表示对应 N_I, D_I 的 Kharitonov 顶点多项式族[1]

$$N_K=\{N_1(s), N_2(s), N_3(s), N_4(s)\}, D_K=\{D_1(s), D_2(s), D_3(s), D_4(s)\},$$

其中

$$N_1(s)=b_0^+ + b_1^+ s + b_2^- s^2 + b_3^- s^3 + b_4^+ s^4 + b_5^+ s^5 + \cdots,$$
$$N_2(s)=b_0^- + b_1^- s + b_2^+ s^2 + b_3^+ s^3 + b_4^- s^4 + b_5^- s^5 + \cdots,$$
$$N_3(s)=b_0^- + b_1^+ s + b_2^+ s^2 + b_3^- s^3 + b_4^- s^4 + b_5^+ s^5 + \cdots,$$
$$N_4(s)=b_0^+ + b_1^- s + b_2^- s^2 + b_3^+ s^3 + b_4^+ s^4 + b_5^- s^5 + \cdots,$$
$$D_1(s)=a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^+ s^5 + \cdots,$$
$$D_2(s)=a_0^- + a_1^- s + a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^- s^4 + a_5^- s^5 + \cdots,$$
$$D_3(s)=a_0^- + a_1^+ s + a_2^+ s^2 + a_3^- s^3 + a_4^- s^4 + a_5^+ s^5 + \cdots,$$
$$D_4(s)=a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 + a_5^- s^5 + \cdots.$$

另外，用 N_{KS}, D_{KS}来表示对应 N_I, D_I 的 Kharitonov 棱边多项式集合

$$N_{KS}=\{N(s): N(s)=\lambda N_i(s)+(1-\lambda)N_j(s), \lambda\in[0,1], i=1,2; j=3,4\},$$
$$D_{KS}=\{D(s): D(s)=\lambda D_i(s)+(1-\lambda)D_j(s), \lambda\in[0,1], i=1,2; j=3,4\}.$$

基于 N_K, D_K, N_{KS}, D_{KS}构造了下面的 Kharitonov 对象集和 Kharitonov 棱边对象集

$$G_K=\left\{P(s): P(s)=\frac{N(s)}{D(s)}, N(s)\in N_K, D(s)\in D_K\right\},$$

$$G_{KS}=\left\{P(s)=\frac{N(s)}{D(s)}: N(s)\in N_K, D(s)\in D_{KS}, \text{or } N(s)\in N_{KS}, D(s)\in D_K\right\},$$

前者包含 16 个 Kharitonov 对象，后者包含 32 个 Kharitonov 棱边对象.

对于图 1 所示的闭环系统由文献[2]中第十一章的定理 11.10 可知闭环系统鲁棒稳定的必要充分条件为

$$\max_{\substack{N(s)\in N_K\\ D(s)\in D_{KS}}}\left\|W(s)\frac{N(s)}{D(s)}\right\|_\infty<1.$$

Mori T, S Barnet[3], Chapellat[4]等人首先研究了区间系统的最大 H_∞范数计算问题，指出一个稳定的真的区间系统族的最大 H_∞范数在对应的 16 个 Kharitonov 对象上达到. Hollot, Tempo[5]就加权函数为一次传递函数的情况给出了顶点检验结果，但是，对于二次以上的加权函数，他们断言一定存在一个区间对象，使得顶点检验结果不成立. 事实上，由于证明不严格，上述结论是错误的，对于一次加权传递函数，虽然结论是正确的，但其证明仍然是不完备的[6]. 在文献[6,7]中得到的结果表明只要加权函数 $W(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}$满

足条件:$A(s)$的根都是实的、负的、互不相同,并且对于$A(s)$(如果其次数大于1)的任意两个根$\alpha_2<\alpha_1<0$,都存在$B(s)$的一个实根β,使得$-\alpha_1<|\beta|<-\alpha_2$,则对任意的区间系统族$G_I$都有

$$\max_{P(s)\in G_I}\|W(s)P(s)\|_\infty=\max_{P(s)\in G_K}\|W(s)P)(s)\|_\infty.$$

但是,对于一般的加权函数,顶点检验结果不是普遍成立的,本文将针对一般加权函数,研究区间系统的加权H_∞性能,给出精确且便于计算的公式.

2　几个定义和引理

为讨论方便,本文用C表示复平面,R表示实数集,另外先给出几个定义和引理.

定义 1[8]. 设$p(s)=s^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_is^i,a_i\in C,0\leqslant i\leqslant n-1$,如果$p(s)$的根都在复平面$C$的左半开平面,则称$p(s)$为Hurwitz稳定多项式,简记为$p(s)\in H$,其中$H$表示所有Hurwitz稳定多项式的集合.

一个传递函数$P(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$称为是稳定的,系指其分母多项式$D(s)$是稳定的,在连续时间意义下,是指$D(s)$为Hurwitz稳定多项式.一个传递函数$P(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$称为是真的,系指$\deg D(s)\geqslant\deg N(s)$,如果$\deg D(s)>\deg N(s)$则称$P(s)$为严格真的.本文所讨论的均是线性定常连续时间系统,相应的稳定性均指Hurwitz稳定性.

定义 2[2]. 设$P(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$为稳定的传递函数,其H_∞范数定义为

$$\|P(s)\|_\infty=\sup_{\omega\in R}|P(j\omega)|.$$

引理 1[4]. 设$P(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$为稳定的n次真传递函数(实系数或复系数),则$\|P(s)\|_\infty<1$当且仅当

1) $|q_n|<|r_n|$;

2) $D(s)+e^{j\phi}N(s)\in H,\forall\ \phi\in[0,2\pi]$.

其中q_n,r_n分别为$N(s),D(s)$的首项系数.

引理 2[2]. 设$p(s)=h(s^2)+sg(s^2)$为实系数Hurwitz稳定多项式,则$h(-\mu),g(-\mu)$的根均为实的、正的、互不相同且互相交错,并且$h(-\mu)$最小的根小于$g(-\mu)$最小的根.

引理 3[6,7]. 设$N(s),D_0(s),A(s),B(s)$均为固定的实系数多项式,$q(s)$为仅含奇次项或仅含偶次项且次数小于$D_0(s)$次数的实系数多项式,$k>0$,则

$$\max_{\lambda\in[0,1]}\left\|\frac{B(s)}{A(s)}\frac{N(s)}{D_0(s)+\lambda q(s)}\right\|_\infty<k,$$

当且仅当

1) $\lim\limits_{s\to+\infty}\left|\frac{B(s)N(s)}{A(s)D_0(s)}\right|<k$;

2) $A(s)[D_0(s)+\lambda q(s)]+\frac{1}{k}e^{j\phi}B(s)N(s)\in H,\forall\ \lambda\in\{0,1\},\phi\in[0,2\pi]$;

3) $D_0(s)+\lambda q(s)\pm j\left|\frac{B(s)N(s)}{kA(s)q(s)}\right|q(s)\neq0,\forall\ s=j\omega,\omega>0,\lambda\in(0,1)$.

3 主要结果

由第一节的讨论知道需要检验16条棱边，关键问题是

$$\max_{\lambda\in[0,1]}\left\|\frac{B(s)}{A(s)}\frac{N(s)}{D_0(s)+\lambda q(s)}\right\|_\infty<1$$

的检验，其中 $D_0(s)+\lambda q(s)\in H,\forall\ \lambda\in[0,1]$，$q(s)$为仅含奇次项或仅含偶次项且次数小于 $D_0(s)$次数的实系数多项式，$\frac{B(s)N(s)}{A(s)D_0(s)}$为真有理函数.

记 $D_0(s)=h_0(s^2)+sg_0(s^2)$，$A(s)=h_A(s^2)+sg_A(s^2)$，$B(s)=h_B(s^2)+sg_B(s^2)$，如果$q(s)$仅含奇次项，则记 $q(s)=s\bar{q}(s^2)$；如果 $q(s)$仅含偶次项，则记 $q(s)=\bar{q}(s^2)$.

首先考虑 $q(s)$仅含偶次项的情况，由于 $D_0(s)+\lambda\bar{q}(s)\in H,\forall\ \lambda\in[0,1]$，由引理2可知，对于任意的 $\lambda\in[0,1]$，$h_0(-\mu)+\lambda\bar{q}(-\mu)$，$g_0(-\mu)$的根均为实的、正的、互不相同且互相交错. 这里 $s=j\omega,\mu=\omega^2$(下同). 为书写方便，某些多项式的元素将省略不写.

若 n 为偶数，设$\{\mu_e^i(\lambda),i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}\}$，$\{\mu_o^i,i=1,2,\cdots,\frac{n-2}{2}\}$分别为 $h_0(-\mu)+\lambda\bar{q}(-\mu)$，$g_0(-\mu)$的根集合，则有

$$\min\{\mu_e^i(0),\mu_e^i(1)\}\leqslant\mu_e^i(\lambda)\leqslant\max\{\mu_e^i(0),\mu_e^i(1)\},\quad i=1,2,\cdots,\frac{n}{2},\tag{1}$$

$$0<\mu_e^i(\lambda)<\mu_o^i<\mu_e^{i+1}(\lambda),\quad i=1,2,\cdots,\frac{n-2}{2};\tag{2}$$

若 n 为奇数，设$\{\mu_e^i(\lambda),i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}\}$，$\{\mu_o^i,i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}\}$分别为 $h_0(-\mu)+\lambda\bar{q}(-\mu)$，$g_0(-\mu)$的根集合，则有

$$\min\{\mu_e^i(0),\mu_e^i(1)\}\leqslant\mu_e^i(\lambda)\leqslant\max\{\mu_e^i(0),\mu_e^i(1)\},\quad i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2},\tag{3}$$

$$0<\mu_e^i(\lambda)<\mu_o^i<\mu_e^{i+1}(\lambda)<\mu_o^{i+1},\quad i=1,2,\cdots,\frac{n-3}{2}.\tag{4}$$

如果记 n_e 为不超过$\frac{n}{2}$的最大整数

$$\Omega_e=\bigcup_{i=1}^{n_e}(\min\{\mu_e^i(0),\mu_e^i(1)\},\max\{\mu_e^i(0),\mu_e^i(1)\}),\tag{5}$$

则有如下定理.

定理1. 设 $N(s),D_0(s),A(s),B(s)$均为固定的实系数多项式，$q(s)=\bar{q}(s^2)$为仅含偶次项且次数小于 $D_0(s)$次数的实系数多项式，则

$$\max_{\lambda\in[0,1]}\left\|\frac{B(s)}{A(s)}\frac{N(s)}{D_0(s)+\lambda\bar{q}(s^2)}\right\|_\infty=\max\{\gamma_e,\gamma_0\},\tag{6}$$

其中

$$\gamma_0=\max_{\lambda=0,1}\left\|\frac{B(s)}{A(s)}\frac{N(s)}{D_0(s)+\lambda\bar{q}(s)}\right\|_\infty,\tag{7}$$

$$\gamma_e=\sup_{\mu\in\Omega_e}\sqrt{\frac{(h_B^2+\mu g_B^2)(h_N^2+\mu g_N^2)}{\mu g_0^2(h_A^2+\mu g_A^2)}}.\tag{8}$$

证明. 只需证明对于任意的 $\gamma>0$,

$$\max_{\lambda\in[0,1]}\left\|\frac{B(s)}{A(s)}\frac{N(s)}{D_0(s)+\lambda\bar{q}(s^2)}\right\|_\infty<\gamma, \tag{9}$$

当且仅当 $\gamma_0<\gamma,\gamma_e<\gamma$.

必要性是显然的,因为对于任意 $\mu\in\Omega_e$,都存在 $\lambda\in(0,1)$ 使得 $h_0(-\mu)+\lambda\bar{q}(-\mu)=0$. 下面证充分性. 由引理 1 可知条件 $\gamma_0<\gamma$ 与引理 3 的条件 1),2)等价,这里只需证引理 3 的条件 3)成立. 为考察引理 3 的条件 3),研究方程

$$D_0(j\omega)+\lambda\bar{q}(-\omega^2)\pm j\left|\frac{B(j\omega)N(j\omega)}{\gamma A(j\omega)}\right|=0, \tag{10}$$

即

$$\begin{cases}h_0(-\mu)+\lambda\bar{q}(-\mu)=0, \quad \lambda\in(0,1),\\ \sqrt{\mu}\,g_0(-\mu)\pm\sqrt{\dfrac{(h_B^2+\mu g_B^2)(h_N^2+\mu g_N^2)}{\gamma^2(h_A^2+\mu g_A^2)}}=0.\end{cases} \tag{11}$$

由于 $\gamma>\gamma_e$,式(11)中第二个方程无解,从而引理 3 的条件 3)成立,定理得证.

由定理 1 直接可得如下推论.

推论 1. 设 $N(s),D_0(s),A(s),B(s)$ 均为固定的实系数多项式,$q(s)=\bar{q}(s^2)$ 为仅含偶次项且次数小于 $D_0(s)$ 次数的实系数多项式,如果 $f(\mu)=\dfrac{(h_B^2+\mu g_B^2)(h_N^2+\mu g_N^2)}{\mu g_0^2(h_A^2+\mu g_A^2)}$ 在定义域 $\{\mu:\mu>0,g_0(-\mu)\neq0\}$ 上是凸函数,则

$$\max_{\lambda\in[0,1]}\left\|\frac{B(s)}{A(s)}\frac{N(s)}{D_0(s)+\lambda\bar{q}(s^2)}\right\|_\infty=\max_{\lambda=0,1}\left\|\frac{B(s)}{A(s)}\frac{N(s)}{D_0(s)+\lambda\bar{q}(s^2)}\right\|_\infty.$$

证明. 如果 $f(\mu)$ 在定义域 $\{\mu:\mu>0,g_0(-\mu)\neq0\}$ 上是凸函数,则 $\gamma_e=\sup\limits_{\mu\in\Omega_e}\sqrt{f(\mu)}$ 在 Ω_e 的边界点 $\{\mu_e^i(0),\mu_e^i(1),i=1,2,\cdots,n_e\}$ 上达到,从而必有 $\gamma_e<\gamma_0$,再由定理 1 可知推论成立. 证毕.

当 $q(s)$ 仅含奇次项时,记 $q(s)=s\bar{q}(s^2)$,由于 $D_0(s)+\lambda s\bar{q}(s)\in H,\forall\ \lambda\in[0,1]$,由引理 2 可知,对于任意的 $\lambda\in[0,1]$,$g_0(-\mu)+\lambda\bar{q}(-\mu),h_0(-\mu)$ 的根均为实的、正的、互不相同且互相交错.

若 n 为偶数,设 $\{\mu_e^i,i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}\},\{\mu_o^i(\lambda),i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}\}$ 分别为 $h_0(-\mu)$,$g_0(-\mu)+\lambda\bar{q}(-\mu)$ 的根集合,则有

$$\min\{\mu_o^i(0),\mu_o^i(1)\}\leqslant\mu_o^i(\lambda)\leqslant\max\{\mu_o^i(0),\mu_o^i(1)\},\quad i=1,2,\cdots,\frac{n-2}{2}, \tag{12}$$

$$0<\mu_e^i<\mu_o^i(\lambda)<\mu_e^{i+1},\qquad i=1,2,\cdots,\frac{n-2}{2}; \tag{13}$$

若 n 为奇数,设 $\{\mu_e^i,i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}\},\{\mu_o^i(\lambda),i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}\}$ 分别为 $h_0(-\mu),g_0(-\mu)+\lambda\bar{q}(-\mu)$ 的根集合,则有

$$\min\{\mu_o^i(0),\mu_o^i(1)\}\leqslant\mu_o^i(\lambda)\leqslant\max\{\mu_o^i(0),\mu_o^i(1)\},\quad i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}, \tag{14}$$

$$0<\mu_e^i<\mu_o^i(\lambda)<\mu_e^{i+1}<\mu_o^{i+1}(\lambda),\qquad i=1,2,\cdots,\frac{n-3}{2}. \tag{15}$$

如果记 n_o 为不超过 $\frac{n-1}{2}$ 的最大整数，则

$$\Omega_o=\bigcup_{i=1}^{n_o}(\min\{\mu_o^i(0),\mu_o^i(1)\},\max\{\mu_o^i(0),\mu_o^i(1)\}). \tag{16}$$

定理 2. 设 $N(s),D_0(s),A(s),B(s)$ 均为固定的实系数多项式，$q(s)=s\bar{q}(s^2)$ 为仅含奇次项且次数小于 $D_0(s)$ 次数的实系数多项式，则

$$\max_{\lambda\in[0,1]}\left\|\frac{B(s)}{A(s)}\frac{N(s)}{D_0(s)+\lambda s\bar{q}(s^2)}\right\|_\infty=\max\{\gamma_o,\gamma_0\}, \tag{17}$$

其中

$$\gamma_0=\max_{\lambda=0,1}\left\|\frac{B(s)}{A(s)}\frac{N(s)}{D_0(s)+\lambda s\bar{q}(s)}\right\|_\infty, \tag{18}$$

$$\gamma_o=\sup_{\mu\in\Omega_o}\sqrt{\frac{(h_B^2+\mu g_B^2)(h_N^2+\mu g_N^2)}{h_0^2(h_A^2+\mu g_A^2)}}. \tag{19}$$

证明．类似定理 1 的证明，这里从略.

推论 1. 设 $N(s),D_0(s),A(s),B(s)$ 均为固定的实系数多项式，$q(s)=s\bar{q}(s^2)$ 为仅含奇次项且次数小于 $D_0(s)$ 次数的实系数多项式，如果 $f(\mu)=\frac{(h_B^2+\mu g_B^2)(h_N^2+\mu g_N^2)}{h_0^2(h_A^2+\mu g_A^2)}$ 在定义域 $\{\mu:\mu>0,h_0(-\mu)\neq 0\}$ 上是凸函数，则

$$\max_{\lambda\in[0,1]}\left\|\frac{B(s)}{A(s)}\frac{N(s)}{D_0(s)+\lambda s\bar{q}(s^2)}\right\|_\infty=\max_{\lambda=0,1}\left\|\frac{B(s)}{A(s)}\frac{N(s)}{D_0(s)+\lambda s\bar{q}(s^2)}\right\|_\infty.$$

4 结论

本文研究了混合不确定系统的鲁棒稳定性，针对区间对象的加权 H_∞ 范数的最大值的计算问题，给出了精确的计算公式并讨论了顶点检验成立的条件，对于一般形式的棱边对象的最大 H_∞ 范数的计算问题尚需进一步研究.

参 考 文 献

1 Kharitonov V L. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differential Uravnen.*, 1978, **14**(11):2086～2088

2 Bhattacharyya S P, Chapellat H, Keel L H. Robust Control: The parametric approach. Prentice Hall PTR, 1995

3 Mori T, Barnett S. On stability tests for some classes of dynamical systems with perturbed coefficients. *IMA J. Mathematical Control and Inf.*, 1988, **5**(2):117～123

4 Chapellat H, Dahleh M, Bhattacharyya S P. Robust stability under structured and unstructured perturbations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1990, **35**(10):1100～1108

5 Hollot C V, Tempo R. H_∞ performance of weighted interval plants: Complete characterization of vertex results. In: Proc. American Control Conf., San Francisco: CA, 1993

6 安森建. 混合不确定系统的鲁棒稳定性和鲁棒性能[学位论文]. 北京：北京大学，1996

7 An S J, Huang L, Xu J L. Vertex results for H_∞ performance of weighted interval plants: beyond first order weighting functions. In: Proc. IEEE Conf. Decision and Control, Kobe, Japan, 1996

8 Gantmacher F R. The Theory of Matrices. New York: Chelsea, 1960

安森建　1966 年出生. 1989 年毕业于山东大学数学系,获学士学位;1992 年获中国科学院系统科学研究所硕士学位;1996 年获北京大学力学与工程科学系博士学位. 现为北京理工大学自动控制系副教授. 主要研究兴趣有鲁棒控制、移动通信系统的功率控制等.

黄　琳　1961 年于北京大学数学力学系研究生毕业. 现为北京大学力学与工程科学系教授、博士生导师. 研究兴趣为稳定性理论、鲁棒控制、具柔性结构系统的控制、复杂控制系统理论和相关的应用数学问题.

中国自动化学会 2001 年部分学术活动

中国自动化学会 2001 年重点学术活动计划

项目名称	主要内容	时间	地点	联系人
全国信息与自动化技术推广应用大会	展望、发展新世纪的信息与自动化技术特邀学术报告、信息与自动化领域内各学科发展与展望的综述报告、企业与用户、用户与用户之间的技术交流、技术创新、技术改造、技术转让与技术座谈等	10 月	北京	北京中关村南一条一号学会办公室 电话 62544415 邮编 100080
国际自动化技术装备与仪器仪表展览会	测试测量仪器、传感器、PLC、DCS、工业控制机、工业计算机、现场总线技术、驱动技术和各类工控元器件等	10 月	北京	北京鼓楼西大街 41 号 祁林 电话 64011371 邮编 100009
IFAC2001 年经济、金融与工程经济系统计算化研讨会	经济、金融与工程经济系统领域内广泛与实际问题方面的技术研讨与交流	10 月	天津	天津市河西区体院北环湖中道 9 号 罗绍安 电话 (022) 23359347 邮编 300060

(下转第 173 页)