研究简报

具有状态和控制滞后不确定系统的保性能控制器设计1)

陈国定[1,2] 俞 立[1] 褚 健[2]
[1](浙江工业大学信息工程学院 杭州 310032)
[2](浙江大学先进控制研究所 杭州 310027)

关键词 保性能控制，不确定时滞系统，线性矩阵不等式
中图分类号 TP273

GUARANTEED COST CONTROLLER DESIGN FOR UNCERTAIN LINEAR SYSTEMS WITH BOTH STATE AND CONTROL DELAYS

CHEN Guo-Ding[1,2] YU Li[1] CHU Jian[2]
[1](*College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou* 310032)
[2](*Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Key words Guaranteed cost control, uncertain time-delay systems, LMI

1 引言

本文的目的在于将文献[1]的结论推广到同时具有状态和控制滞后的不确定系统，并进而研究其最优保性能控制问题.

考虑具有状态和控制滞后的不确定系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) =& [A + DF(t)E_1]\boldsymbol{x}(t) + [A_d + DF(t)E_d]\boldsymbol{x}(t-d) + \\ & [B + DF(t)E_2]\boldsymbol{u}(t) + [B_h + DF(t)E_h]\boldsymbol{u}(t-h), \\ \boldsymbol{x}(t) =& \phi(t), \quad t \in [-\bar{h}, 0], \quad \bar{h} = \max(d, h),\end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是系统的状态向量，$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 是系统的控制输入，$d>0$，$h>0$ 是滞后时间，$A, A_d, B, B_h, D, E_1, E_2, E_d$ 和 E_h 是常数矩阵，$F(t)\in R^{i\times j}$是不确定矩阵，它反映了系统模型中的时变参数不确定性，且满足 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$.

系统(1)的性能指标定义成

$$J = \int_0^\infty [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)R\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t \tag{2}$$

1) 国家自然科学基金(69974036)、高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划与浙江省自然科学基金资助.
收稿日期 1999-05-10 收修改稿日期 2001-04-10

其中 Q 和 R 是给定的对称正定加权矩阵.

假定系统的状态是可以直接量测的，则本文的目的是设计一个无记忆的线性定常状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t) \tag{3}$$

其中 $K\in R^{m\times n}$是反馈增益矩阵，使得闭环系统

$$\dot{x}(t) = \overline{A}_c(t)x(t) + \overline{A}_d(t)x(t-d) + \overline{A}_h(t)x(t-h) \tag{4}$$

是二次保性能的，其中 $\overline{A}_c(t)=A+BK+DF(t)(E_1+E_2K)$，$\overline{A}_d(t)=A_d+DF(t)E_d$，$\overline{A}_h(t)=(B_h+DF(t)E_h)K$. 为此，首先引进不确定时滞系统的二次保性能概念.

定义 1. 如果存在对称正定矩阵 P,S,T，使得对所有允许的不确定性

$$\begin{bmatrix} P\overline{A}_c(t)+\overline{A}_c^{\mathrm{T}}(t)P+Q+K^{\mathrm{T}}RK+S+T & P\overline{A}_d(t) & P\overline{A}_h(t) \\ \overline{A}_d^{\mathrm{T}}(t)P & -S & 0 \\ \overline{A}_h^{\mathrm{T}}(t)P & 0 & -T \end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

则系统(4)称为是二次保性能的，P,S 和 T 称为是系统(4)的保性能矩阵，进而使得闭环系统(4)二次保性能的控制律(3)称为是系统(1)的一个保性能控制律.

二次保性能概念的意义由以下引理揭示.

引理 1. 如果系统(4)是二次保性能的，且 P,S 和 T 是其相应的保性能矩阵，则系统(4)是二次稳定的，且

$$V(x) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-d}^{t} x^{\mathrm{T}}(\tau)Sx(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t-h}^{t} x^{\mathrm{T}}(\tau)Tx(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

是系统(4)的一个 Lyapunov 泛函. 进而，系统(4)的性能指标值满足

$$J \leqslant J^* = \phi^{\mathrm{T}}(0)P\phi(0) + \int_{-d}^{0}\phi^{\mathrm{T}}(\tau)S\phi(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{-h}^{0}\phi^{\mathrm{T}}(\tau)T\phi(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{7}$$

证明. 引理 1 的结论容易从文献[2]的定理 1 和文献[3]的定理 2 推出.　　证毕.

2　主要结论

定理 1. 对给定的性能指标(2)和控制律(3)，闭环系统(4)是二次保性能的充分必要条件是存在对称正定矩阵 X,U,V，矩阵 Y 和正常数 ε，使得

$$\begin{bmatrix} \Xi & A_dX & B_hY & (E_1X+E_2Y)^{\mathrm{T}} & X & Y^{\mathrm{T}} \\ XA_d^{\mathrm{T}} & -U & 0 & XE_d^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ Y^{\mathrm{T}}B_h^{\mathrm{T}} & 0 & -V & Y^{\mathrm{T}}E_h^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ E_1X+E_2Y & E_dX & E_hY & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ Y & 0 & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{8}$$

其中 $\Xi=AX+BY+(AX+BY)^{\mathrm{T}}+U+V+\varepsilon DD^{\mathrm{T}}$. 进而若矩阵不等式(8)有解$(X,U,V,Y,\varepsilon)$，则 $u(t)=YX^{-1}x(t)$是系统(1)的一个保性能控制律，相应的性能指标值满足

$$J\leqslant J^*=\phi^{\mathrm{T}}(0)X^{-1}\phi(0)+\int_{-d}^{0}\phi^{\mathrm{T}}(\tau)X^{-1}UX^{-1}\phi(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{-h}^{0}\phi^{\mathrm{T}}(\tau)X^{-1}VX^{-1}\phi(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{9}$$

证明. 类似文献[1]中的定理 2 的证明.　　证毕.

定理 1 提供了一组保性能控制律的参数化表示. 这一参数化表示可以用来求取使得性能指标值的上界尽可能小的最优保性能控制律.

引进变量 M,α,β, 其中 M 是对称矩阵, 使得 $X^{-1}<M$, $U<\alpha I$, $V<\beta I$, 则

$$\phi(0)X^{-1}\phi(0)\leqslant\phi^{\mathrm{T}}(0)M\phi(0),$$

$$\int_{-d}^{0}\phi^{\mathrm{T}}(\tau)X^{-1}UX^{-1}\phi(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant\alpha\int_{-d}^{0}\phi^{\mathrm{T}}(\tau)M^{2}\phi(\tau)\mathrm{d}\tau=\alpha\,\mathrm{tr}(\phi_d^{\mathrm{T}}M^2\phi_d),$$

其中 ϕ_d 是满足 $\int_{-d}^{0}\phi(\tau)\phi^{\mathrm{T}}(\tau)d\tau=\phi_d\phi_d^{\mathrm{T}}$ 的矩阵, 同理可得

$$\int_{-h}^{0}\phi^{\mathrm{T}}(\tau)X^{-1}VX\phi(\tau)\mathrm{d}\tau\leqslant\beta\,\mathrm{tr}(\phi_h^{\mathrm{T}}M^2\phi_h),$$

其中 ϕ_h 是满足 $\int_{-h}^{0}\phi(\tau)\phi^{\mathrm{T}}(\tau)\mathrm{d}\tau=\phi_h\phi_h^{\mathrm{T}}$ 满足的矩阵, 从式(9)可得

$$J^*\leqslant\phi^{\mathrm{T}}(0)M\phi(0)+\alpha\,\mathrm{tr}(\phi_d^{\mathrm{T}}M^2\phi_d)+\beta\,\mathrm{tr}(\phi_h^{\mathrm{T}}M^2\phi_h).$$

进一步, 引进矩阵 M_d, 使得 $\phi_d^{\mathrm{T}}M^2\phi_d<M_d$, 则 $\mathrm{tr}(\phi_d^{\mathrm{T}}M^2\phi_d)<\mathrm{tr}(M_d)$, 且 $\mathrm{tr}(M_d)$ 的最小化可以保证 $\mathrm{tr}(\phi_d^{\mathrm{T}}M^2\phi_d)$ 的最小化, 而 $\phi_d^{\mathrm{T}}M^2\phi_d<M_d$ 可等价地表示成线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}-M_d & \phi_d^{\mathrm{T}}M\\ M\phi_d & -I\end{bmatrix}<0. \tag{12}$$

类似地, 引进矩阵 M_h, 使得

$$\begin{bmatrix}-M_h & \phi_h^{\mathrm{T}}M\\ M\phi_h & -I\end{bmatrix}<0, \tag{13}$$

则 $\mathrm{tr}(\phi_h^{\mathrm{T}}M^2\phi_h)<\mathrm{tr}(M_h)$, 建立优化问题

$$\min\ g=\phi^{\mathrm{T}}(0)M\phi(0)+\alpha+\beta+\mathrm{tr}(M_d)+\mathrm{tr}(M_h)$$

$$\begin{cases}U<\alpha I,\ V<\beta I,\\ \begin{bmatrix}-M & I\\ I & -X\end{bmatrix}<0,\\ (9),\ (12),\ (13),\end{cases} \tag{14}$$

若该问题有解 $(\alpha,\beta,\varepsilon,M,M_d,M_h,U,V,X,Y)$, 则根据定理 1 和以上分析可得 $\boldsymbol{u}(t)=YX^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(1)的一个保性能控制律.

容易看到式(14)是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此, 可以应用凸优化技术来求解该问题的全局最优解.

参 考 文 献

1 Yu Li, Chu Jian. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems. *Automatica*, 1999, **35**(6):1155～1159

2 俞立, 黄昕, 褚健. 不确定时滞系统的保成本控制. 控制与决策, 1998, **13**(1):67～70

3 Moheimani S O R, Petersen I R. Optimal quadratic guaranteed cost control of a class uncertain time-delay systems. *IEE part D*. 1997, **144**(2):183～188

陈国定 见本刊 2000 年第 1 期.

俞 立 见本刊 2000 年第 1 期.

褚 健 见本刊 2000 年第 3 期.