第 27 卷 第 5 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 27, No. 5
2001 年 9 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Sept., 2001

离散非线性时变凸多面体系统族的鲁棒正不变集[1)]

蒋卫华[1]　黄 琳[2]　楚天广[2]

[1](哈尔滨工业大学数学系　哈尔滨　150001)

[2](北京大学力学与工程科学系　北京　100871)

摘 要　动态系统的状态约束和控制约束等问题可归结为状态空间中某些集合的正不变性. 利用混合单调分解方法研究离散非线性、时变凸多面体系统族的线性状态约束集合的鲁棒正不变性. 对由矩阵凸多面体和加性区间扰动描述的线性时变离散系统族，得到了鲁棒正不变集的充分必要条件；对非线性系统族则得到有关充分条件. 这些条件均由系统族的顶点表述，易于检验. 同时给出示例.

关键词　离散系统族，鲁棒正不变集，混合单调分解方法，顶点检验.

ROBUST POSITIVELY INVARIANT SETS OF DISCRETE-TIME NONLINEAR AND TIME-VARIABLE CONVEX POLYHEDRAL SYSTEM FAMILY

JIANG Wei-Hua[1]　HUANG Lin[2]　CHU Tian-Guang[2]

[1](*Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin*　150006)

[2](*Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing*　100871)

Abstract　Certain problems concerning state constraints and control constraints can often be reduced to the study of positive invariance of some subsets of the state space of dynamical systems. In this paper, the robust positive invariance of given linear state constraint sets of uncertain discrete-time systems is studied by means of the mixed monotone decomposition method. Necessary and sufficient conditions of the robust positively invariant sets are established for the linear discrete-time system family specified by matrix convex polyhedron and additive interval disturbances. Also, sufficient conditions are derived for nonlinear system family. All the conditions are given in terms of the parameters of vertex systems of the system family and are therefore easy to check. Finally, an illustrating example is given.

Key words　Discrete-time system family, robust positively invariant sets, mixed monotone decomposition method, vertex results.

1) 国家自然科学基金(19872005)、哈尔滨工业大学学校基金、国家攀登计划资助.

收稿日期　1999-09-29　　收修改稿日期　2000-06-01

1 引言

动态系统的正不变集在状态约束和控制约束等问题中具有基本意义[1,2]. 文献[1～4]利用分段线性 Lyapunov 函数和推广的 Farkas 定理,研究了确定性线性离散时间系统的线性状态正不变集,并用于约束控制器的设计问题. 关于不确定系统鲁棒正不变集的研究尚不多见. 新近文献[5,6]提出了动态系统的混合单调分解方法,由此研究了一般的不确定连续时间系统族的鲁棒正不变集. 这一方法直接利用系统的结构性质,无须借助 Lyapunov 函数,即能有效地处理时变集合和非线性离散系统族的情况,具有一般性. 本文进一步将其发展到离散时间系统族,所得结果只涉及检验状态约束集合的两个特殊顶点,而与问题本身的维数无关,便于检验.

考虑离散系统族

$$\boldsymbol{x}(k+1)=f(k,\boldsymbol{x}(k)),\tag{1}$$

其中 $f(k,\boldsymbol{x}(k))\in\mathscr{F}(k,\boldsymbol{x}(k))=\mathrm{Co}(f_1(k,\boldsymbol{x}(k)),f_2(k,\boldsymbol{x}(k)),\cdots,f_r(k,\boldsymbol{x}(k)))$, $\boldsymbol{x}(k)\in R^n$, $f_s:J\times R^n\to R^n$, $s\in\{1,2,\cdots,r\}$, $J=\{0,1,2,\cdots\}$.

定义 1. 对于有界集合 $S(k)\in R^n$,如果$\forall k_0\in J,\forall \boldsymbol{x}(k_0)\in S(k_0)$,只要 $k\geqslant k_0$ 都有 $\boldsymbol{x}(k)\in S(k)$,则称 $S(k)$为系统族(1)的鲁棒正不变集,简记为 RPIS. 本文讨论集合

$$S[P(k),\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k)]=\{\boldsymbol{x}(k)\in R^n;\ -\boldsymbol{\alpha}(k)\leqslant P(k)\boldsymbol{x}(k)\leqslant\boldsymbol{\beta}(k)\},\quad k\in J,\tag{2}$$

关于系统族(1)的鲁棒正不变性,其中 $\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k)\in R^m$, $P(k)\in R^{m\times n}$,当 $\boldsymbol{\alpha}(k)\equiv\boldsymbol{\beta}(k)$, $P\equiv I_n$ (I_n 为 n 阶单位阵)时,记集合(2)为 $S[\boldsymbol{\beta}(k)]$.

为讨论方便,下面引入记号 $\boldsymbol{\omega}_M(k)=\max\{\underline{\boldsymbol{\omega}}(k),\overline{\boldsymbol{\omega}}(k)\}$; $(A(k))_i$ 为 n 阶方阵 $A(k)$的第 i 行,$(\boldsymbol{\omega})_i$ 为向量 $\boldsymbol{\omega}$ 的第 i 个分量,$A^+(k)=[a_{ij}^+(k)]_{n\times n}$, $A^-(k)=[a_{ij}^-(k)]_{n\times n}$, 其中 $a_{ij}^+(k)=\sup\{0,a_{ij}(k)\}$, $a_{ij}^-(k)=\sup\{0,-a_{ij}(k)\}$.

$$\widetilde{A}(k)=\begin{bmatrix}A^+(k) & A^-(k)\\ A^-(k) & A^+(k)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{w}(k)=\begin{bmatrix}\underline{\boldsymbol{\omega}}(k)\\ \overline{\boldsymbol{\omega}}(k)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mu}(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}(k)\\ \boldsymbol{\beta}(k)\end{bmatrix}.$$

当讨论中涉及的矩阵、向量和集合为定常时,则在相应记号中省略变量 k.

2 概念与引理

混合单调分解方法的组成部分是函数的混合单调分解和双边比较定理.

定义 2. 设函数 $F(k,\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{v}(k)):J\times R^n\times R^n\to R^n$,如果 $F(k,\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{v}(k))$关于 $\boldsymbol{u}(k)$单调不减,关于 $\boldsymbol{v}(k)$单调不增,则称 $F(k,\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{v}(k))$为混合单调函数.

定义 3. 设函数 $f(k,\boldsymbol{x}(k))\in\mathscr{F}(k,\boldsymbol{x}(k))$,如果存在混合单调函数 $F(k,\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{v}(k))$使得: $f(k,\boldsymbol{x}(k))=F(k,\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{x}(k))$,则称函数 $f(k,\boldsymbol{x}(k))$具有混合单调分解 $F(k,\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{v}(k))$.

引理 1(双边比较定理). 如果系统(1)中函数 $f(k,\boldsymbol{x}(k))$具有混合单调分解 $F(k,\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{v}(k))$,且存在 $\boldsymbol{p}(k),\boldsymbol{q}(k):J\to R^n$, $k\geqslant k_0$, $k_0\in J$,满足

i) $\boldsymbol{p}(k+1)\leqslant F(k,\boldsymbol{p}(k),\boldsymbol{q}(k))$, $k\geqslant k_0$; ii) $\boldsymbol{q}(k+1)\geqslant F(k,\boldsymbol{q}(k),\boldsymbol{p}(k))$, $k\geqslant k_0$; iii) $\boldsymbol{p}(k_0)\leqslant\boldsymbol{x}(k_0)\leqslant\boldsymbol{q}(k_0)$, 则 $\boldsymbol{p}(k)\leqslant\boldsymbol{x}(k)\leqslant\boldsymbol{q}(k)$, $k\geqslant k_0$.

证明. 由条件 iii)，当 $n=k_0$ 时结论成立.

假设. 当 $n=k$ 时结论成立，则当 $n=k+1$ 时，因 $\boldsymbol{x}(k+1)=f(k,\boldsymbol{x}(k))=F(k,\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{x}(k))$，$\boldsymbol{p}(k+1)\leqslant F(k,\boldsymbol{p}(k),\boldsymbol{q}(k))\leqslant F(k,\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{x}(k))$，$\boldsymbol{q}(k+1)\geqslant F(k,\boldsymbol{q}(k),\boldsymbol{p}(k))\geqslant F(k,\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{x}(k))$，即 $\boldsymbol{p}(k+1)\leqslant\boldsymbol{x}(k+1)\leqslant\boldsymbol{q}(k+1)$. 根据数学归纳法有 $\boldsymbol{p}(k)\leqslant\boldsymbol{x}(k)\leqslant\boldsymbol{q}(k)$，$k\geqslant k_0$.

3　主要结果

3.1　离散线性时变系统族

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{\omega}(k),\quad k\geqslant k_0,\tag{3}$$

其中 $A(k)\in\Omega(k)=\mathrm{Co}(A_1(k),A_2(k),\cdots,A_r(k))$，$-\underline{\boldsymbol{\omega}}(k)\leqslant\boldsymbol{\omega}(k)\leqslant\overline{\boldsymbol{\omega}}(k)$.

定理 1. 对于离散系统族(3)

a) $S(I,\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k)]$是 RPIS 当且仅当 $\boldsymbol{\mu}(k+1)-\widetilde{A}_s(k)\boldsymbol{\mu}(k)\geqslant\boldsymbol{w}(k)$，$\forall s=1,2,\cdots,r$；

b) 设 $\boldsymbol{\omega}(k)\equiv0$，则 $S[P(k),\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k)]$是 RPIS 当且仅当 $\forall s=1,2,\cdots,r$，$\exists H_s(k)\in R^{m\times m}$，使得 $P(k+1)A_s(k)=H_s(k)P(k)$，$\boldsymbol{\mu}(k+1)-\widetilde{H}_s(k)\boldsymbol{\mu}(k)\geqslant0$.

证明. a) 充分性. 对于任意的 $k\in J$ 和任意的 $A(k)=\sum_{s=1}^{r}k_sA_s(k)$，$\sum_{s=1}^{r}k_s=1$，$k_s\geqslant0$，$s=1,2,\cdots,r$，$A(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{\omega}(k)$的混合单调分解为

$$F(k,\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{v}(k))=A^+(k)\boldsymbol{u}(k)-A^-(k)\boldsymbol{v}(k)+\boldsymbol{\omega}(k),$$

且
$$A^+(k)\leqslant\sum_{s=1}^{r}k_sA_s^+(k),\quad A^-(k)\leqslant\sum_{s=1}^{r}k_sA_s^-(k).$$

由假设条件知
$$\widetilde{A}(k)\boldsymbol{\mu}(k)+\boldsymbol{w}(k)\leqslant\sum_{s=1}^{r}k_s(A_s(k)\boldsymbol{\mu}(k)+\boldsymbol{w}(k))\leqslant\boldsymbol{\mu}(k+1),$$

即
$$\begin{aligned}F(k,-\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k))=&A^+(k)(-\boldsymbol{\alpha}(k))-A^-(k)\boldsymbol{\beta}(k)+\boldsymbol{\omega}(k)\geqslant\\&A^+(k)(-\boldsymbol{\alpha}(k))-A^-(k)\boldsymbol{\beta}(k)-\underline{\boldsymbol{\omega}}(k)\geqslant-\boldsymbol{\alpha}(k+1),\\F(k,\boldsymbol{\beta}(k),-\boldsymbol{\alpha}(k))=&A^+(k)\boldsymbol{\beta}(k)-A^-(k)(-\boldsymbol{\alpha}(k))+\boldsymbol{\omega}(k)\leqslant\\&A^+(k)\boldsymbol{\beta}(k)-A^-(k)(-\boldsymbol{\alpha}(k))+\overline{\boldsymbol{\omega}}(k)\leqslant\boldsymbol{\beta}(k+1).\end{aligned}$$

由双边比较定理，当$-\boldsymbol{\alpha}(k_0)\leqslant\boldsymbol{x}(k_0)\leqslant\boldsymbol{\beta}(k_0)$，$k\geqslant k_0$ 时，有$-\boldsymbol{\alpha}(k)\leqslant\boldsymbol{x}(k)\leqslant\boldsymbol{\beta}(k)$.

必要性. 反证. 假设对于某 $s\in\{1,2,\cdots r\}$，某 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$和某 $k_0\in J$，使得

$$(A_s^+(k))_i\boldsymbol{\alpha}(k_0)+(A_s^-(k_0))_i\boldsymbol{\beta}(k_0)+(\underline{\boldsymbol{\omega}}(k_0))_i>(\boldsymbol{\alpha}(k_0+1))_i,\tag{4}$$

或

$$(A_s^-(k_0))_i\boldsymbol{\alpha}(k_0)+(A_s^+(k_0))_i\boldsymbol{\beta}(k_0)+(\overline{\boldsymbol{\omega}}(k_0))_i>(\boldsymbol{\beta}(k_0+1))_i.\tag{5}$$

当式(4)成立时取 $\boldsymbol{x}(k_0)\in S[(I,\boldsymbol{\alpha}(k_0),\boldsymbol{\beta}(k_0)]$的各分量为

$$(\boldsymbol{x}(k_0))_j=\begin{cases}(-\boldsymbol{\alpha}(k_0))_j, & a_{ij}^{(s)}(k_0)\geqslant0,\\(\boldsymbol{\beta}(k_0))_j, & a_{ij}^{(s)}(k_0)<0,\end{cases}$$

其中 $j=1,2,\cdots,n$. 取$(\boldsymbol{\omega}(k_0))_i=-(\underline{\boldsymbol{\omega}}(k_0))_i$，则

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}(k_0+1))_i=&(A_s^+(k_0))_i\boldsymbol{x}(k_0)-(A_s^-(k_0))_i\boldsymbol{x}(k_0)-(\underline{\boldsymbol{\omega}}(k_0))_i=\\&(A_s^+(k_0))_i(-\boldsymbol{\alpha}(k_0))-(A_s^-(k_0))_i\boldsymbol{\beta}(k_0)-(\underline{\boldsymbol{\omega}}(k_0))_i<-(\boldsymbol{\alpha}(k_0+1))_i,\end{aligned}$$

与 $S[I,\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k)]$ 是 RPIS 矛盾.

当(5)式成立时取 $\boldsymbol{x}(k_0)$ 的各分量为

$$(\boldsymbol{x}(k_0))_j=\begin{cases}(\boldsymbol{\beta}(k_0))_j, & a_{ij}^{(s)}(k_0)\geqslant 0,\\ (-\boldsymbol{\alpha}(k_0))_j, & a_{ij}^{(s)}(k_0)<0,\end{cases}$$

其中 $j=1,2,\cdots,n$. 取 $(\boldsymbol{\omega}(k_0))_i=(\overline{\boldsymbol{\omega}}(k_0))_i$,则

$$(\boldsymbol{x}(k_0+1))_i=(A_s^+(k_0))_i\boldsymbol{x}(k_0)-(A_s^-(k_0))_i\boldsymbol{x}(k_0)+(\overline{\boldsymbol{\omega}}(k_0))_i=$$
$$(A_s^+(k_0))_i\boldsymbol{\beta}(k_0)-(A_s^-(k_0))_i(-\boldsymbol{\alpha}(k_0))+(\overline{\boldsymbol{\omega}}(k_0))_i>(\boldsymbol{\beta}(k_0+1))_i,$$

同样矛盾. 必要性得证.

b) 充分性. 对任意的 $A(k)=\sum_{s=1}^{r}k_sA_s(k)\in\Omega$, $\sum_{s=1}^{r}k_s=1$, $k_s\geqslant 0$, $s=1,2,\cdots,r$,由已知条件,取变换 $\boldsymbol{y}(k)=P(k)\boldsymbol{x}(k)$, $k\geqslant k_0$;并记 $H(k)\triangleq\sum_{s=1}^{r}k_sH_s(k)$,有

$$P(k+1)\boldsymbol{x}(k+1)=P(k+1)A(k)\boldsymbol{x}(k)=\sum_{s=1}^{r}k_sP(k+1)A_s(k)\boldsymbol{x}(k)=$$
$$\sum_{s=1}^{r}k_sH_s(k)P(k)\boldsymbol{x}(k)=H(k)P(k)\boldsymbol{x}(k),\text{即}$$
$$\boldsymbol{y}(k+1)=H(k)\boldsymbol{y}(k),\ k\geqslant k_0. \tag{6}$$

而相应于 $S[P(k),\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k)]=\{\boldsymbol{x}(k)\in R^n:\ -\boldsymbol{\alpha}(k)\leqslant P(k)\boldsymbol{x}(k)\leqslant\boldsymbol{\beta}(k)\}$,

有 $S[I,\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k)]=\{\boldsymbol{y}(k)\in R^n:\ -\boldsymbol{\alpha}(k)\leqslant\boldsymbol{y}(k)\leqslant\boldsymbol{\beta}(k)\}$.

易知集合 $S[I,\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k)]$ 为系统(6)的 RPIS,即 $S[P(k),\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k)]$ 为系统(3)的 RPIS.

必要性. 引入记号 $G(k)=\begin{pmatrix}P(k)\\ -P(k)\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}(k)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}(k)\\ \boldsymbol{\alpha}(k)\end{pmatrix}$, $\forall k\geqslant k_0$,则

$$S[P(k),\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k)]=\{\boldsymbol{x}(k)\in R^n:\ -\boldsymbol{\alpha}(k)\leqslant P(k)\boldsymbol{x}(k)\leqslant\boldsymbol{\beta}(k)\}=$$
$$\{\boldsymbol{x}(k)\in R^n:\ G(k)\boldsymbol{x}(k)\leqslant\boldsymbol{\gamma}(k)\}\triangleq S[G(k),\boldsymbol{\gamma}(k)].$$

所以,集合 $S[G(k),\boldsymbol{\gamma}(k)]$ 是系统 $\boldsymbol{x}(k+1)=A_s(k)\boldsymbol{x}(k)$ 的鲁棒正不变集,其中 $s=1,2,\cdots,r$.

根据推广的 Farkas 定理[3,4],在 $R_+^{2m\times 2m}$ 中存在具有非负元素的矩阵

$$\hat{H}_s(k)=\begin{pmatrix}\hat{H}_{s_{11}}(k) & \hat{H}_{s_{12}}(k)\\ \hat{H}_{s_{21}}(k) & \hat{H}_{s_{22}}(k)\end{pmatrix},$$

其中 $\hat{H}_{s_{IJ}}(k)\in R_+^{m\times m}$, $I,J=1,2$. 满足

$$\hat{H}_s(k)G(k)=G(k+1)A_s(k),\quad \hat{H}_s(k)\boldsymbol{\gamma}(k)\leqslant\boldsymbol{\gamma}(k+1),\quad k\geqslant k_0.$$

那么 $[\hat{H}_{s_{11}}(k)-\hat{H}_{s_{12}}(k)]P(k)=[\hat{H}_{s_{22}}(k)-\hat{H}_{s_{21}}(k)]P(k)=P(k+1)A_s(k)$.

令 $H_s(k)=\hat{H}_{s_{11}}(k)-\hat{H}_{s_{12}}(k)$,或者 $H_s(k)=\hat{H}_{s_{22}}(k)-\hat{H}_{s_{21}}(k)$,

有 $H_s(k)P(k)=P(k+1)A_s(k)$.

又利用变换 $\boldsymbol{y}(k+1)=P(k)\boldsymbol{x}(k)$,可得出 $S[I,\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k)]$ 是系统 $\boldsymbol{y}(k+1)=H_s(k)\boldsymbol{y}(k)$ 的正不变集. 所以 $\boldsymbol{\mu}(k+1)-\widetilde{H}_s(k)\boldsymbol{\mu}(k)\geqslant 0$. 必要性得证.

推论 1. 对于离散系统族(3),$S[\boldsymbol{\beta}(k)]$ 是 RPIS 当且仅当

$$\boldsymbol{\beta}(k+1)-|A_s(k)|\boldsymbol{\beta}(k)\geqslant\boldsymbol{\omega}_M(k),\quad\forall\ s=1,2,\cdots,r.$$

当矩阵 $A(k)$，向量 $\omega(k)$ 为定常时，对于由矩阵凸多面体和区间矩阵扰动向量所描述的离散线性时不变系统族

$$x(k+1) = Ax(k) + \omega, \quad k \geqslant k_0, \tag{7}$$

其中 $A \in \Omega = \mathrm{Co}(A_1, A_2, \cdots, A_r)$，$-\underline{\omega} \leqslant \omega \leqslant \overline{\omega}$，$\underline{\omega}$，$\overline{\omega} \geqslant 0$，有

推论 2. 对于离散不确定性系统族(7)

a) $S[\boldsymbol{\beta}]$ 是 RPIS，当且仅当 $(I_n - |A_s(k)|)\boldsymbol{\beta} \geqslant \omega_M$，$\forall s=1,2,\cdots,r$；

b) $S[I,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$ 是 RPIS，当且仅当 $(I_{2n} - \widetilde{A}_s)\boldsymbol{\mu} \geqslant \boldsymbol{w}$，$\forall s=1,2,\cdots,r$；

c) $S[I,\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k)]$ 是 RPIS，当且仅当 $\boldsymbol{\mu}(k+1) - \widetilde{A}_s\boldsymbol{\mu}(k) \geqslant \boldsymbol{w}$，$\forall s=1,2,\cdots,r$；

d) 设 $\omega \equiv 0$，则 $S[P,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$ 是 RPIS，当且仅当 $\forall s=1,2,\cdots,r$，$\exists H_s(k) \in R^{m\times m}$，使得 $PA_s = H_sP$，$(I_{2m} - \widetilde{H}_s)\boldsymbol{\mu} \geqslant 0$.

3.2　离散非线性系统族

根据引理 1 有结论

定理 2. 设 $\forall s \in \{1,2,\cdots,r\}$，$f_s$ 具有混合单调分解 $F_s(k,\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{v}(k))$，如果 $-\boldsymbol{\alpha}(k+1) \leqslant F_s(k,-\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k))$，$\boldsymbol{\beta}(k+1) \geqslant F_s(k,\boldsymbol{\beta}(k),-\boldsymbol{\alpha}(k))$，$k \geqslant k_0$；那么 $S[I,\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k)]$ 是系统族(1)的 RPIS.

推论 3. 如果系统(1)中 $f_s(k,\boldsymbol{x}(k)) = A_s(k)\boldsymbol{x}(k) + g_s(k,\boldsymbol{x}(k))$，其中 $A_s(k)$ 为 n 阶方阵，$g_s(k,\boldsymbol{x}(k)): J \times R^n \to R^n$ 具有混合单调分解 $G_s(k,\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{v}(k))$，$s=1,2,\cdots,r$，并记 $\overline{G}_s(k,\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{v}(k)) = \begin{bmatrix} -G_s(k,\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{v}(k)) \\ G_s(k,\boldsymbol{v}(k),\boldsymbol{u}(k)) \end{bmatrix}$ 那么有结论

a) 如果有

$$(I_n - |A_s|)\boldsymbol{\beta} + G_s(k,-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) \geqslant 0,\ (I_n - |A_s|)\boldsymbol{\beta} - G_s(k,\boldsymbol{\beta},-\boldsymbol{\beta}) \geqslant 0,\ \forall s=1,2,\cdots,r,$$

那么集合 $S[\boldsymbol{\beta}]$ 是系统族(1)的 RPIS；

b) 如果 $(I_{2n} - \widetilde{A}_s)\boldsymbol{\mu} - \overline{G}_s(k,-\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \geqslant 0$，$\forall s=1,2,\cdots,r$，那么集合 $S[I,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$ 是系统族(1)的 RPIS；

c) 如果 $\boldsymbol{\mu}(k+1) - \widetilde{A}_s(k)\boldsymbol{\mu}(k) - \overline{G}_s(k,-\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k)) \geqslant 0$，$\forall s=1,2,\cdots,r$，那么集合 $S[I,\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k)]$ 是系统族(1)的 RPIS.

例. 考虑非线性离散系统族

$$\boldsymbol{x}(k+1) = f(k,\boldsymbol{x}(k)),\ f(k,\boldsymbol{x}(k)) \in \mathscr{F}(k,\boldsymbol{x}(k)),$$

其中 $\mathscr{F}(k,\boldsymbol{x}(k)) = \mathrm{Co}(f_1(k,\boldsymbol{x}(k)), f_2(k,\boldsymbol{x}(k)))$，

$$f_1(k,\boldsymbol{x}(k)) = \begin{pmatrix} f_1^{(1)}(k,\boldsymbol{x}(k)) \\ f_1^{(2)}(k,\boldsymbol{x}(k)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6\boldsymbol{x}(k)^{(1)} + 0.1\boldsymbol{x}(k)^{(2)} - 10[\boldsymbol{x}(k)^{(1)}]^3 \\ -1.2\boldsymbol{x}(k)^{(1)} + 0.3\boldsymbol{x}(k)^{(2)} + \dfrac{10}{3}[\boldsymbol{x}(k)^{(2)}]^3 \end{pmatrix},$$

$$f_2(k,\boldsymbol{x}(k)) = \begin{pmatrix} f_2^{(1)}(k,\boldsymbol{x}(k)) \\ f_2^{(2)}(k,\boldsymbol{x}(k)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6\boldsymbol{x}(k)^{(1)} + 0.3\boldsymbol{x}(k)^{(2)} + 10[\boldsymbol{x}(k)^{(1)}]^3 \\ -2.0\,\boldsymbol{x}(k)^{(1)} + 0.2\,\boldsymbol{x}(k)^{(2)} + 20[\boldsymbol{x}(k)^{(1)}]^3 \end{pmatrix}.$$

讨论集合

$$S[\boldsymbol{\beta}] = \left\{ \boldsymbol{x}(k) \in R^2:\ |\boldsymbol{x}(k)| \leqslant \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{pmatrix} \right\}$$ 的正不变性. 记 $\boldsymbol{x}(k) = (\boldsymbol{x}(k)^{(1)}, \boldsymbol{x}(k)^{(2)})^{\mathrm{T}}$.

由定理 2，$f_I^{(J)}(k, \boldsymbol{x}(k))$ 的混合单调分解 $F_I^J(k,\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{v}(k))$ $(I,J=1,2)$ 为

$$F_1^{(1)}(k,\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{v}(k)) = 0.6\,\boldsymbol{u}(k)^{(1)} + 0.1\,\boldsymbol{u}(k)^{(2)} - 10[\boldsymbol{v}(k)^{(1)}]^3,$$

$$F_1^{(2)}(k,\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{v}(k)) = -1.2\,\boldsymbol{v}(k)^{(1)} + 0.3\,\boldsymbol{u}(k)^{(2)} + \frac{10}{3}[\boldsymbol{u}(k)^{(2)}]^3,$$

$$F_2^{(1)}(k,\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{v}(k)) = 0.6\,\boldsymbol{u}(k)^{(1)} - 0.1\,\boldsymbol{v}(k)^{(2)} + 10[\boldsymbol{u}(k)^{(1)}]^3,$$

$$F_2^{(2)}(k,\boldsymbol{u}(k),\boldsymbol{v}(k)) = -2.0\,\boldsymbol{v}(k)^{(1)} + 0.2\,\boldsymbol{u}(k)^{(2)} + 20[\boldsymbol{u}(k)^{(1)}]^3,$$

其中 $\boldsymbol{u}(k)=(\boldsymbol{u}(k)^{(1)},\boldsymbol{u}(k)^{(2)})^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{v}(k)=(\boldsymbol{v}(k)^{(1)},\boldsymbol{v}(k)^{(2)})^{\mathrm{T}}.$

有 $F_1(k,-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=(0.1,-0.3)^{\mathrm{T}}\geqslant-\boldsymbol{\beta},\qquad F_1(k,\boldsymbol{\beta},-\boldsymbol{\beta})=(0.1,0.3)^{\mathrm{T}}\leqslant\boldsymbol{\beta},$

$F_2(k,-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=(-0.1,-0.28)^{\mathrm{T}}\geqslant-\boldsymbol{\beta},\qquad F_2(k,\boldsymbol{\beta},-\boldsymbol{\beta})=(0.1,0.28)^{\mathrm{T}}\leqslant\boldsymbol{\beta}.$

由定理 2,$S[\boldsymbol{\beta}]$是所讨论系统族的 RPIS.

上述结果及示例表明,对于具有混合单调分解的离散系统族,集合 $S[P(k),\boldsymbol{\alpha}(k),\boldsymbol{\beta}(k)]$的鲁棒正不变性可通过其两个特殊顶点进行检验,检验过程只涉及代数运算,易于计算.

4 结束语

研究表明,在将线性状态约束问题从定常离散系统扩展到非定常、非线性离散系统时,混合单调分解方法是基本而有力的工具.此方法能自然地利用动态系统的结构特性,可对动态系统状态给出较为细致的非对称估计,为研究状态约束问题和控制约束设计问题提供一条新的途径.

参 考 文 献

1 Bitsoris G. Positively invariant polyhedral sets of discret-time linear systems. *Int. J. Control*, 1988, **47**(6):1713～1726

2 Benzaouia A, Burgat C. Regulator problem for linear discrete-time systems with nonsymmetrical constrained control. *Int. J. Control*, 1988, **48**(6):2441～2451

3 Hennet J C. Une extension du lemme de Farkas' et son application au probleme de regulation lineaire sous contraintes, C.R. Acad. Sci. Paris, t.308, Serie I, 1989. 415～419

4 Hennet J C, Beziat J P. A class of invariant regulators for the discrete-time linear constrained regulation problem, *Automatica*, 1991, **27**(3):549～554

5 楚天广,黄琳. 凸多面体系统族的鲁棒正不变集-混合单调方法. 见:秦化淑主编. 中国控制会议论文集, 青岛, 1996. 193～198

6 Chu Tianguang, Huang Lin. Mixed monotone decomposition of dynamical systems with application. *Chinese Sci. Bull.*, 1998, **43**(14):1171～1175

蒋卫华 1965 年出生,1987 年毕业于东北师范大学数学系,1989 年毕业于哈尔滨工业大学数学系研究生班,留校任教.1995—1996 年在北大力学系做访问学者,研究兴趣为稳定性理论、鲁棒控制等.

黄 琳 见 2001 年 27 卷 2 期 150 页.

楚天广 1964 年生,1993 年毕业于清华大学力学系,并获博士学位,现为北京大学工程科学与力学系副教授.研究兴趣为稳定性理论与应用、非线性动力学与控制、人工神经网络等.