第 27 卷 第 5 期 自 动 化 学 报 Vol. 27, No. 5
2001 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 2001

线性 T-S 模糊系统作为通用逼近器的充分条件[1)]

曾 珂 张乃尧 徐文立
（清华大学自动化系 北京 100084）
（E-mail: zlh@mail.tsinghua.edu.cn zengke@cheerful.com）

摘 要 作为模糊系统理论研究和实际应用的基础，对模糊系统通用逼近性的研究已经取得了很大的进展，但是只有为数不多的文献研究了模糊系统作为通用逼近器的充分条件. 提出了线性 T-S 模糊系统以任意精度一致逼近紧致集上任意连续实函数的一个充分条件，并给出了数值示例. 该示例表明提出的充分条件明显优于现有的其它结果.

关键词 T-S 模糊系统，通用逼近，充分条件.

SUFFICIENT CONDITION FOR LINEAR T-S FUZZY SYSTEMS AS UNIVERSAL APPROXIMATORS

ZENG Ke ZHANG Nai-Yao XU Wen-Li
(*Department of Automation, Tsinghua University, Beijing* 100084)
(E-mail: zlh@mail.tsinghua.edu.cn zengke@cheerful.com)

Abstract As the basis of theoretical research and pratical applications of fuzzy systems, studies on fuzzy systems as universal approximators have achieved great progress. However, only a few papers in the literature have investigated sufficient conditions for fuzzy systems as universal approximators. This paper presents a new sufficient condition under which the linear T-S fuzzy systems can uniformly approximate any real continuous functions defined on a compact set to any degree of accuracy. Numerical examples demonstrate that our result is obriously better than currently available results.

Key words T-S fuzzy systems, universal approximation, sufficient condition.

1 引言

所谓模糊系统的通用逼近性是指模糊系统是否能以任意精度逼近紧致集上的任意连续

1) 国家自然科学基金(69774015)、清华大学基础研究基金(200013004)和信息学院基础研究基金资助.
收稿日期 1999-02-03 收修改稿日期 2000-05-22

实函数.模糊系统的理论研究和实际应用都是建立在模糊系统通用逼近性的基础之上的.这是因为从数学上看,模糊系统是从输入论域到输出论域的一个函数映射.当模糊系统用作系统建模和辨识时,通用逼近性决定了它是否能够逼近任意连续的非线性动态模型;当模糊系统用作控制时,通用逼近性决定了它是否能够对任意非线性动态对象跟踪任意连续的非线性时间函数,并实现所要求的闭环系统动态品质.可见对模糊系统通用逼近性的研究无论在理论上还是应用上都有极为重要的意义.

常用的模糊系统可以分为两大类:Mamdani 模糊系统和 T-S(Takagi-Sugeno)模糊系统.这两类模糊系统的主要区别在于它们的规则后件.Mamdani 模糊系统采用模糊集作为规则后件,而 T-S 模糊系统采用输入变量的线性或非线性函数作为规则后件.对模糊系统通用逼近性的研究已经取得了很大的进展[1~16],其中文献[3]基于插值理论证明了采用全交叠隶属函数的模糊系统是通用逼近器,文献[5]证明了采用高斯隶属函数的模糊系统是通用逼近器,文献[8]证明了采用 min 算子进行模糊推理的模糊系统的通用逼近性,文献[15]在用线性解模糊代替常用的重心法解模糊的基础上得到了两输入一输出 T-S 模糊系统是通用逼近器的结论.

虽然已经有较多文献研究了模糊系统的通用逼近性,但是对模糊系统一致逼近紧致集上任意连续实函数的充分条件,即对于任意给定的连续实函数,每个输入变量需要取多少个模糊子集才能够保证所需要的逼近精度,还研究得很不够.目前在这方面可以查到的文献中[1,9~14],文献[9～12]研究的是 Mamdani 模糊系统;文献[13,14]研究的是一种采用简化的成比例线性函数作为规则后件的 T-S 模糊系统;文献[1]研究的是采用输入变量的线性函数作为规则后件的 T-S 模糊系统,其中每个输入变量的模糊子集限制为全交叠的.

在作者以前的工作中,文献[12]证明了采用模糊单点作为规则后件的 Mamdani 模糊系统是通用逼近器,并给出了它作为通用逼近器的一个充分条件;文献[16]证明了在较宽的条件下,采用输入变量的线性函数作为规则后件的多输入单输出 T-S 模糊系统是通用逼近器.以这些研究工作为基础,本文将给出线性 T-S 模糊系统作为通用逼近器的一个新的充分条件.

2　数学准备

T-S 模糊系统的规则表示为

$$R_j\text{: IF } x_1 \text{ is } A_1^j \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^j \text{ and } \cdots \text{ and } x_n \text{ is } A_n^j$$
$$\text{THEN } y = f_j(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ j = 1, 2, \cdots, M$$

其中 x_i 为输入变量,$i=1,2,\cdots,n$, A_i^j 为模糊子集,$f_j(\cdot)$为线性或非线性函数,M 为模糊规则总数. $f_j(\cdot)$通常取为输入变量的线性函数,即

$$R_j\text{: IF } x_1 \text{ is } A_1^j \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^j \text{ and } \cdots \text{ and } x_n \text{ is } A_n^j$$
$$\text{THEN } y = p_{j0} + p_{j1}x_1 + p_{j2}x_2 + \cdots + p_{jn}x_n = p_{j0} + \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_{ji}x_i,\ j = 1, 2, \cdots, M. \quad (1)$$

本文称这一类 T-S 模糊系统为线性 T-S 模糊系统.如果 $f_j(\cdot)$采用非线性函数,选择它的函数结构和参数是很困难的,而且将给从数学上分析 T-S 模糊系统带来许多不利,因此在大多数的理论研究和实际应用中,都采用线性 T-S 模糊系统.

不失一般性，我们设 $0\leqslant x_i\leqslant 1$（这是因为可以用简单的线性变换将 $x\in[a,b]$ 映射到 $[0,1]$），对每一个输入变量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 定义 n_i 个模糊子集，从而规则总数为 $M=\prod_{i=1}^{n}n_i$，式(1)所给出的第 j 条模糊规则的激活度为 $\mu_j(\boldsymbol{x})=\prod_{i=1}^{n}\mu_{A_i^j}(x_i)$. 容易求得，采用 Sum-product 推理和重心法解模糊，线性 T-S 模糊系统的输出为

$$f_{\mathrm{TS}}(\boldsymbol{x})=\frac{\sum_{j=1}^{M}\left[\mu_j(\boldsymbol{x})\left(\sum_{i=0}^{n}p_{ji}x_i\right)\right]}{\sum_{j=1}^{M}\mu_j(\boldsymbol{x})},\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，并且令 $x_0\equiv 1$.

设输入变量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的第 k_i 个模糊子集的中心点位于 $C_{k_i}^i$，$k_i=1,\cdots,n_i$，并且有 $0\leqslant C_1^i<C_2^i<\cdots<C_{n_i}^i\leqslant 1$. 不失一般性，我们设每个中心点处的隶属度为 1. 对每一个输入变量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 定义模糊分割间距

$$D_{k_i}^i=C_{k_i}^i-C_{k_i-1}^i,\quad k_i=1,2,\cdots,n_i+1,$$

其中 $C_0^i\equiv 0$，$C_{n_i}^i+1\equiv 1$. 在此基础上可以对每一个输入变量 x_i 定义最大模糊分割间距 $D_{\mathrm{MAX}}^i=\max\limits_{k_i=1}^{n_i+1}D_{k_i}^i$. 易知 $D_{\mathrm{MAX}}^i\geqslant\dfrac{1}{n_i+1}$，其中等号当且仅当 x_i 采用均匀分布的模糊子集，即所有 $D_{k_i}^i$ 都相等时成立，$k_i=1,2,\cdots,n_i+1$.

文献[17]给出了一组采用三角形隶属函数的模糊集全交叠的定义，这里我们对更一般的情况定义一组模糊集的交叠.

定义. 交叠(overlapped)：称一组模糊集 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在论域 U 上是交叠的，如果对任意 $i=2,3,\cdots,n$，有 $C_{i-1}\leqslant\inf S(A_i)\leqslant\sup S(A_{i-1})\leqslant C_i$. 其中 C_i 为模糊集 A_i 的中心点，$i=1,2,\cdots,n$，$S(\cdot)$ 为模糊集的支撑(Support)集[17]，即 $S(A)=\{x\,|\,\mu_A(x)>0,x\in U\}$.

注释 1. 容易验证，如果论域 U 上的一组模糊集 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是交叠的，则对任意 $i,j=1,2,\cdots,n$，$i\neq j$，$A_i(C_j)=0$. 并且对任意 $x\in U$，它至多对 2 个相邻模糊集 A_j,A_{j+1} 的隶属度大于零，且此时必有 $C_j\leqslant x\leqslant C_{j+1}$，$j=1,2,\cdots,n-1$.

在 $C[0,1]^n$ 上定义的 n 元 q 次多项式函数可以写为

$$P_q(\boldsymbol{x})=\sum_{d_1=0}^{m_1}\sum_{d_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{d_n=0}^{m_n}\beta_{d_1d_2\cdots d_n}x_1^{d_1}x_2^{d_2}\cdots x_n^{d_n},\quad\sum_{i=1}^{n}m_i=q,\tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$.

3 充分条件

引理. 如果线性 T-S 模糊系统的每一个输入变量都定义 n_0 个均匀分布且交叠的模糊子集，则对任意给定 n 元 q 次多项式函数 $P_q(\boldsymbol{x})$ 和逼近误差 $\varepsilon>0$，存在线性 T-S 模糊系统，当

$$n_0>\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2P_q}{\partial x_i\partial x_k}\right\|_\infty}-1\tag{4}$$

时，有 $\|f_{\mathrm{TS}}(\boldsymbol{x})-P_q(\boldsymbol{x})\|_\infty<\varepsilon$.

证明. 考察 T-S 模糊系统的每一条模糊规则 R_j，$j=1,2,\cdots,M$，它决定了 T-S 模糊系统的一个特殊输入矢量 $\boldsymbol{x}_j=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，其中每一个分量的取值恰好等于对应的模糊子

集 A_i^j 的中心点，即 $x_i=C_{k_i}^i$，其中 $i=1,2,\cdots,n$，$k_i\in\{1,2,\cdots,n_i\}$. 显然全部这样的特殊输入矢量共有 M 个，并且与模糊规则有一一对应的关系. 记它们的集合为 $\Theta=\{\boldsymbol{x}_j=(C_{j_1}^1,C_{j_2}^2,\cdots,C_{j_n}^n)^{\mathrm{T}}/j=1,2,\cdots,M,\ 1\leqslant j_i\leqslant n_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$.

现在对任意输入矢量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，考察线性 T-S 模糊系统有

$$|f_{\mathrm{TS}}(\boldsymbol{x})-P_q(\boldsymbol{x})|=\left|\frac{\sum_{j=1}^{M}\left[\mu_j(\boldsymbol{x})\left(\sum_{i=0}^{n}p_{ji}x_i\right)\right]}{\sum_{j=1}^{M}\mu_j(\boldsymbol{x})}-P_q(\boldsymbol{x})\right|=\left|\frac{\sum_{j=1}^{M}[\mu_j(\boldsymbol{x})(\sum_{i=0}^{n}p_{ji}x_i-P_q(\boldsymbol{x}))]}{\sum_{j=1}^{M}\mu_j(\boldsymbol{x})}\right|.$$

由于线性 T-S 模糊系统的所有输入变量都采用均匀分布且交叠的模糊子集，根据注释 1，如果规则 R_j 被激活，那么对于 $\boldsymbol{x}$ 的任意分量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都有中心点 $C_{j_i}^i$ 使得

$$|x_i-C_{j_i}^i|\leqslant D_{\mathrm{MAX}}^i=\frac{1}{n_0+1},\ i=1,2,\cdots,n.$$

将 $P_q(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_j$ 附近台劳(Tailor)展开到一次项有

$$P_q(\boldsymbol{x})=P_q(\boldsymbol{x}_j)+\frac{\mathrm{d}P_q{}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{/\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_j}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)+r_2(\boldsymbol{x}),$$

拉格朗日(Lagrange)余项 $r_2(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\frac{\mathrm{d}P_q}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{/\boldsymbol{x}=\eta}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)$，其中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\frac{\mathrm{d}P_q}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}$ 是 $P_q(\boldsymbol{x})$ 的海赛(Hessian)矩阵，位于 x 和 x_j 之间.

令

$$\sum_{i=0}^{n}p_{ji}x_i=P_q(\boldsymbol{x}_j)+\frac{\mathrm{d}P_q{}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{/\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_j}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j),\ \text{其中}\ x_0\equiv 1.$$

易见满足上式的 p_{ji} 存在且唯一. 需要指出的是，这里 p_{ji} 只与 $P_q(\cdot)$，$\boldsymbol{x}_j$ 有关，而与输入矢量 $\boldsymbol{x}$ 无关，因此是常数. 由此即得

$$\left|\sum_{i=0}^{n}p_{ji}x_i-P_q(\boldsymbol{x})\right|=\left|\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\frac{\mathrm{d}P_q}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{/\boldsymbol{x}=\eta}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)\right|\leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2P_q}{\partial x_i\partial x_k}\right\|_\infty\cdot\frac{1}{(n_0+1)^2},$$

从而有

$$|f_{\mathrm{TS}}(\boldsymbol{x})-P_q(\boldsymbol{x})|=\left|\frac{\sum_{j=1}^{M}\left[\mu_j(\boldsymbol{x})\left(\sum_{i=0}^{n}p_{ji}x_i-P_q(\boldsymbol{x})\right)\right]}{\sum_{j=1}^{M}\mu_j(\boldsymbol{x})}\right|\leqslant \frac{\sum_{j=1}^{M}\left[\mu_j(\boldsymbol{x})\cdot\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2P_q}{\partial x_i\partial x_k}\right\|_\infty\cdot\frac{1}{(n_0+1)^2}\right]}{\sum_{j=1}^{M}\mu_j(\boldsymbol{x})}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2P_q}{\partial x_i\partial x_k}\right\|_\infty\cdot\frac{1}{(n_0+1)^2}<\varepsilon,$$

即 $n_0>\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2P_q}{\partial x_i\partial x_k}\right\|_\infty}-1$. 　　证毕.

定理. 如果线性 T-S 模糊系统的每一个输入变量都定义 n_0 个均匀分布且交叠的模糊子集，则对任意给定连续实函数 $g(\boldsymbol{x})$ 和逼近误差 $\varepsilon>0$，存在线性 T-S 模糊系统，使得当

$$n_0>\sqrt{\frac{1}{2(\varepsilon-\varepsilon_1)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2 P_q}{\partial x_i\partial x_k}\right\|_\infty}-1 \tag{5}$$

时，有 $\|f_{TS}(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})\|_\infty<\varepsilon$. 其中 $0<\varepsilon_1<\varepsilon$，且有 $\|g(\boldsymbol{x})-P_q(\boldsymbol{x})\|_\infty<\varepsilon_1$.

证明. 根据引理，当 $n_0>\sqrt{\frac{1}{2(\varepsilon-\varepsilon_1)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial^2 P_q}{\partial x_i\partial x_k}\right\|_\infty}-1$ 时，存在 T-S 模糊系统，使得 $\|f_{TS}(\boldsymbol{x})-P_q(\boldsymbol{x})\|_\infty<\varepsilon-\varepsilon_1$.

从而有

$$\begin{aligned}\|f_{TS}(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})\|_\infty &= \|f_{TS}(\boldsymbol{x})-P_q(\boldsymbol{x})+P_q(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})\|_\infty \leqslant \\ &\|f_{TS}(\boldsymbol{x})-P_q(\boldsymbol{x})\|_\infty+\|g(\boldsymbol{x})-P_q(\boldsymbol{x})\|_\infty < \\ &\varepsilon-\varepsilon_1+\varepsilon_1=\varepsilon\end{aligned}$$

证毕.

注释 2. 根据 Weierstrass 逼近定理[18]，在紧致集 $U\subset R^n$ 上存在 n 元 q 次多项式函数 $P_q(\boldsymbol{x})$，以任意精度一致逼近任意连续实函数 $g(\boldsymbol{x})$，即 $\forall\ \varepsilon_1>0$，存在 $P_q(\boldsymbol{x})$ 使得 $\|P_q(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x})\|_\infty<\varepsilon_1$.

注释 3. 众所周知，T-S 模糊系统的函数逼近性能要好于 Mamdani 模糊系统，一般的理解是，T-S 模糊系统相当于用许多块可以有不同倾斜方向的超平面来拟合一个光滑曲面，因此其函数逼近性能要优于仅用水平超平面进行拟合的简化模糊系统[19]. 我们得到的定理从数学上给出了解答. 由于 $P_q(\boldsymbol{x})$ 的各二阶偏微分均是有限的数，因此当 ε 充分小时，线性 T-S 模糊系统一致逼近时需要的模糊子集数 $n_0\propto\frac{1}{\sqrt{\varepsilon-\varepsilon_1}}$，而对于简化模糊系统，在文献[12]中已经得到 $n_0\propto\frac{1}{\varepsilon-\varepsilon_1}$. 因此，与简化模糊系统比较，对于同样给定的定义在紧致集上的连续实函数和一致逼近精度 ε，线性 T-S 模糊系统每个输入变量所需的模糊子集数要少得多，从模糊系统的实现上来看，这就意味着更小的系统规模和更快的正向推理速度和学习速度.

4 数值示例

文献[1]研究了采用均匀分布的全交叠模糊子集的二输入一输出的线性 T-S 模糊系统作为通用逼近器的充分条件，并给出了数值示例. 本文借用该示例，并将所得的结果与文献[1]给出的结果进行对比.

例. 考察两输入一输出线性 T-S 模糊系统，用它来逼近函数 $f(x_1,x_2)=e^{x_1+x_2}$，其中 $x_1,x_2\in[-0.5,0.5]$，给定的一致逼近误差分别为 0.2，0.1，要求每个输入变量需要多少个模糊子集.

解 1. 已知定义在 $[-1,1]$ 上的函数 $f(x)=e^x$ 可以用如下三次多项式

$$P_3(x)=\frac{191}{192}+x+\frac{13}{24}x^2+\frac{1}{6}x^3$$

来逼近，其截断误差略小于 0.071. 从而 $f(x_1,x_2)=e^{x_1+x_2}$ 可以用

$$P_3(x_1,x_2)=\frac{191}{192}+x_1+x_2+\frac{13}{24}(x_1+x_2)^2+\frac{1}{6}(x_1+x_2)^3$$

来逼近，并且有 $\varepsilon_1=0.071$.

文献[1]给出的结果为：对于给定的一致逼近误差 $\varepsilon=0.2$，每个输入需要定义 309 个均匀

分布的全交叠模糊子集;而对于给定的一致逼近误差 $\varepsilon=0.1$,则需要定义 1369 个模糊子集.

下面计算本文的结果. 易得

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 P_3}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2 P_3}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{13}{12}+x_1+x_2 \leqslant \frac{13}{12}+1+1=\frac{37}{12},$$

从而有 $n_0>\sqrt{\frac{1}{2(\varepsilon-0.071)}\cdot\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{37}{12}}-1=\sqrt{\frac{37}{6(\varepsilon-0.071)}}-1.$

当给定的一致逼近误差为 $\varepsilon=0.2$ 时,有 $n_0>5.92$,即每个输入只需要定义 6 个均匀分布的交叠模糊子集. 而当给定的一致逼近误差为 $\varepsilon=0.1$ 时,有 $n_0>13.6$,即只需要定义 14 个模糊子集.

解 2. 如果采用四次多项式

$$P_4(x_1,x_2)=1+x_1+x_2+\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2+\frac{1}{6}(x_1+x_2)^3+\frac{1}{24}(x_1+x_2)^4$$

来逼近 $f(x_1,x_2)=e^{x_1+x_2}$,其截断误差略小于 0.024,即 $\varepsilon_1=0.024$. 文献[1]给出的结果为:对于给定的一致逼近误差 0.2,0.1,每个输入分别需要定义 351,809 个全交叠模糊子集. 而我们的结果分别为 8,11 个交叠模糊子集.

显然,本文的结果远远优于文献[1]所得的结果,我们在文献[20]中对此结论作了证明.

5 结语

本文给出了线性 T-S 模糊系统对紧致集上任意连续实函数以任意精度一致逼近的一个充分条件. 数值示例表明,本文所得结果远远优于现有的其它结果. 由于研究模糊系统作为通用逼近器的充分条件,能够为模糊集个数和隶属函数形状等的选择指明方向,因此本文所得结果对于模糊系统的设计有较大的指导意义.

参 考 文 献

1 Ying H. Sufficient conditions on uniform approximation of multivariate functions by general Takagi-Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent. *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, 1998, **28**(4):515～520

2 Castro J L, Delgado M. Fuzzy systems with defuzzification are universal approximators. *IEEE Trans. System, Man and Cybernetics*, 1996, **26**(1):149～152

3 李洪兴. 模糊控制的插值机理. 中国科学(E 辑), 1998, **28**(3):259～267

4 毛志宏,张雪枫,李衍达. 模糊系统作为通用函数逼近器的研究. 中国科学(E 辑), 1997, **27**(4):362～367

5 Wang L X, Mendel J M. Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-square learning. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 1992, **3**(5):807～814

6 Zeng X J, Singh M G. Approximation theory of fuzzy systems——MIMO case. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 1995, **3**(2): 219～235

7 Castro J L. Fuzzy logic controllers are universal approximators. *IEEE Trans. on System, Man and Cybernetics*, 1995, **25**(4):629～635

8 李锋,钱清泉. 模糊系统及其通用性. 模糊系统与数学, 1998, **12**(1):45～49

9 Wang P Z, Tan S H, Song F M *et al*. Constructive theory for fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, **88**: 195～203

10 Ying H. Sufficient conditions on general fuzzy systems as function approximators. *Automatica*, 1994, **30**(3):521～525

11 Zeng X J, Singh M G. Approximation accuracy analysis of fuzzy systems as function approximators. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 1996, **4**(1):44～63

12 曾珂,徐文立,张乃尧. 特定 Mamdani 模糊系统的通用逼近性. 控制与决策, 2000, **15**(4):435～438

13 Ying H. General SISO Takagi-Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent are universal approximators. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 1998, **6**(4):582～587

14 Ying H. General Takagi-Sugeno fuzzy systems with simplified linear rule consequent are universal controllers, models and filters. *Journal of Information Sciences*, 1998, **108**:91～107

15 Buckley J J. Sugeno type controllers are universal controllers. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, **53**:299～303

16 曾珂,张乃尧,徐文立. 典型 T-S 模糊系统是通用逼近器. 控制理论与应用, 已录用

17 张乃尧,阎平凡. 神经网络与模糊控制. 北京:清华大学出版社, 1998

18 Bronshtein I N, Semendyayew K A. Handbook of Mathematics. New York: Van NostrandReinhold, 1985

19 孙增圻,张再兴,邓志东. 智能控制理论与技术. 北京:清华大学出版社, 1997

20 Zeng Ke, Zhang Naiyao, Xu Wenli. A comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 2000, **8**(6):773～780

曾　珂　男,1975 年生,1996 年毕业于清华大学自动化系,现为清华大学自动化系博士生. 研究兴趣为模糊控制、模糊神经网络、智能机器人.

张乃尧　男,1946 年生,1970 年毕业于清华大学电机系,现任清华大学自动化系教授. 研究兴趣为模糊控制、自适应控制、CIMS 应用等.

徐文立　男,1947 年生,1970 年毕业于清华大学电机系,1990 年在美国获博士学位,现任清华大学自动化系教授,博士生导师. 研究兴趣为智能控制、计算机视觉、运动控制等.