



# 可重入生产系统的 QBD 型模型<sup>1)</sup>

郑应平<sup>1</sup> 赵丽娜<sup>2</sup> 王利存<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(同济大学 上海 200092)

<sup>2</sup>(中国科学院自动化研究所 北京 100080)

**摘 要** 考虑可重入生产系统除第一个外均为有限缓冲区的情形,建立了两种两站四缓冲区的拟生灭过程(QBD)型模型.系统在随机调度策略下状态集是不可约的,而在最后一个缓冲区先加工(LBFS)的策略下状态集是可约的.将可约的状态集化成不可约的吸收集和可约状态集的和.求出了系统状态的稳态分布,给出了系统稳定的充要条件.

**关键词** 可重入生产系统,多级排队网络,拟生灭过程,建模,稳定性.

## QUASI-BIRTH-AND-DEATH TYPE MODELS OF REENTRANT LINES

ZHENG Ying-Ping<sup>1</sup> ZHAO Li-Na<sup>2</sup> WANG Li-Cun<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(Tongji University, Shanghai 200092)

<sup>2</sup>(Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

**Abstract** Quasi-birth-and-death(QBD) models of two kinds of reentrant lines are developed with two stations and four buffers for cases where all but the first buffer capacities are assumed to be finite. The systems are irreducible under random scheduling and reducible under last buffer first serve(LBFS) scheduling policy. The reducible set of states is split into irreducible absorbing subset and reducible subset. Steady state distributions are obtained. The sufficient and necessary conditions of stability are given.

**Key words** Reentrant lines, multiclass queueing network, quasi-birth-and-death process, modeling, stability.

## 1 引言

近年出现了一类复杂加工处理系统,如 VLSI 生产线、薄胶片生产系统等,其特点是工件流量大、路径确定,且工件对同一加工站可能多次访问.和已有系统比较,其调度和性能分

1) 国家重点基础研究发展规划项目基金(G1998020302)、国家自然科学基金重点项目基金(69635030)、西安交通大学机械制造系统工程国家重点实验室资助项目.

收稿日期 1999-07-19 收修改稿日期 2000-11-28

析都更为困难,引起了许多学者的关注<sup>[1,5,10]</sup>. 由于系统中工件多次访问的特点,被称为可重入生产系统<sup>[1]</sup>. 可重入生产系统不具有乘积形式解,性能分析更为困难. 又由于 VLSI 生产等问题的重要性,对可重入生产系统控制与调度策略近来研究较多,但因理论进展缓慢,所用策略大多是启发式的,其结果主要通过仿真进行比较.

为了对调度策略进行理论分析,首先须建立合适的模型. 可重入生产系统是一典型的多机排队网络,研究初期,人们用 Kelly 网来描绘它<sup>[1]</sup>,但实际中大多数系统都不满足 Kelly 网条件,不具有乘积形式的解. Harrison 推导的布朗网络模型<sup>[2]</sup>只关注瓶颈机器,即网络中最容易发生阻塞的地方,调度对它们产生的影响也最大,但许多系统无法化成布朗网络、模型. Chen 等人对随机网络采取分层建模<sup>[3]</sup>,在时间和状态空间上分为三层:微观层次描述单个工件行为;宏观层次用确定的流模型对网络进行近似;过渡层定量表示微观层与宏观层之间的偏差. 由于其中宏观流模型描绘网络长期行为,适于回答稳定性问题,从而研究较多. 流模型方法尚无系统性能分析的数值结果,进一步的分析也更为困难.

所述近似模型中都假设系统缓冲区容量为无穷的,但实际上常为有限情形且难以处理. 本文考虑除文献[1]描述的模型外均为有限缓冲区的情形,将系统化成拟生灭(QBD)模型,并用 Neuts<sup>[8]</sup>的矩阵几何方法求得系统状态的稳态分布. 系统稳定性是一个重要问题,即使来流小于系统加工能力,系统仍可能不稳定. Kumar 和 Meyn 用数学规划方法提出了建立系统在制品数的二次 Lyapunov 函数的方法<sup>[4]</sup>,可以得到某些系统的稳定区域. 由于虚拟加工站现象的发现, J. G. Dai 和 Vande Vate 用流模型方法得到了两站系统稳定的充要条件<sup>[5]</sup>. 本文对缓冲区半无限随机系统的 QBD 模型,给出了系统稳定的一种条件.

可重入生产系统的性能分析则更为困难. Ou 和 Wein 提出了一种用改进仿真模型获得系统性能指标下界的方法<sup>[6]</sup>. 但当加工站个数增加时,该方法的有效性难以保证. Kumar 等人提出用线性规划方法求得系统性能指标边界的方法<sup>[7]</sup>,其结果优于前一种方法. 本文用矩阵几何方法求得缓冲区半无限可重入生产系统的稳态分布,是该领域的新结果.

## 2 系统描述

设可重入生产系统中,有  $s$  个加工站  $\{1, 2, \dots, s\}$ . 每个加工站包含  $M_\sigma$  台机器 ( $\sigma=1, \dots, s$ ), 设总共有  $L$  个加工步骤,为每个加工步骤设置一个缓冲区  $b_i$  ( $i=1, \dots, L$ ). 用  $\sigma(i)$  表示  $b_i$  所在的加工站,即第  $i$  步在加工站  $\sigma(i)$  完成. 可重入则指对某些  $i \neq j$  的加工步骤具有  $\sigma(i) = \sigma(j)$  的性质.

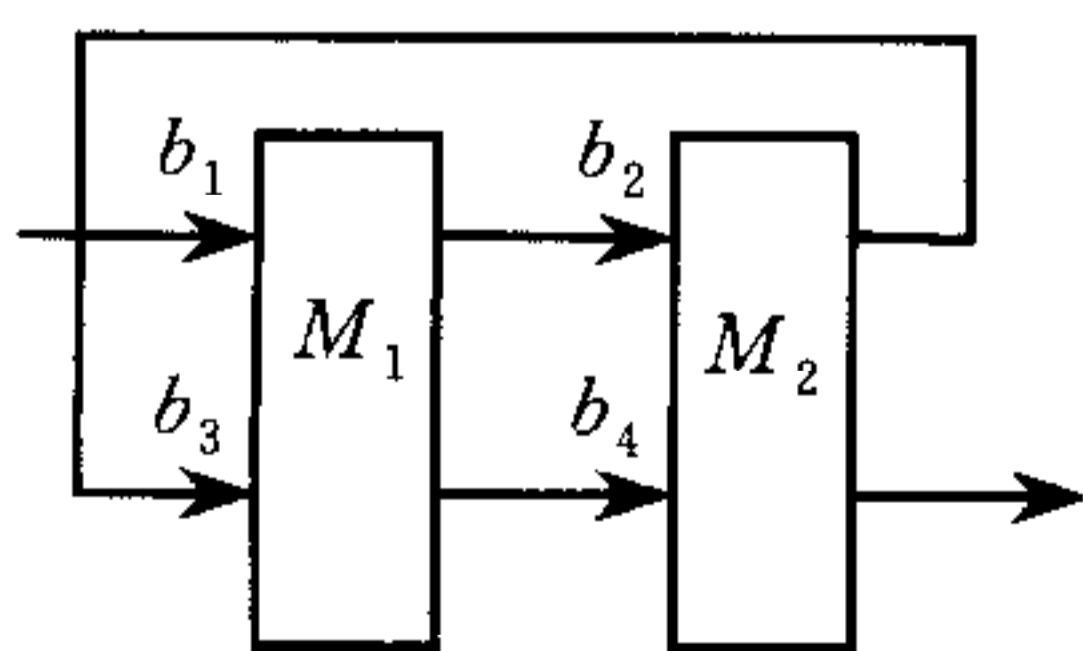


图 1 具有两个加工站  
四道工序的系统

以图 1 所示两加工站四道工序的系统为例,系统中有两台机器  $M_1, M_2, S=2$ . 工件进入系统后的加工路径是:  $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2, L=4$ . 工件来流是以  $\lambda$  为参数的泊松过程,各步加工时间分别服从以  $\mu_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 为参数的负指数分布. 缓冲区的容量分别设为  $c_1, c_2, c_3, c_4$ .

系统状态集为  $J = \{(i, j, m, n), i \leq c_1, j \leq c_2, m \leq c_3, n \leq c_4\}$ , 其中  $i, j, m, n$  分别表示各采样时刻  $b_1, b_2, b_3, b_4$  中的工件数. 状态空间可表示为  $(0, 1, \dots, c_1) \times (0, 1, \dots, c_2) \times (0, 1, \dots, c_3) \times (0, 1, \dots, c_4)$ . 状态以字典序排列.  $p_{(i, j, m, n), (i', j', m', n')}$  表示从状态  $(i, j, m, n)$  转移到状态  $(i', j', m', n')$  的概率.  $P$  是系统



状态一步转移概率矩阵,行和为 1.

如果系统存在稳态分布,用  $X = \{X_0, X_1, \dots, X_i, \dots\}$  表示,其中  $X_i$  是  $1 \times c_2 c_3 c_4$  的行矢量. 假定除第一个缓冲区外,其它缓冲区容量都有限. 为简明计,设  $c_i = H, i = 2, 3, 4, c_1 = \infty$ . 由图 1 可见,  $b_1, b_3$  同在  $M_1$  上接受加工,而  $M_1$  每时只能加工一个工件,显然同一加工站前的不同缓冲区间存在资源竞争,调度策略则决定各缓冲区的优先级. 若采用随机调度(RS)策略,则  $b_1, b_3$  同时有工件时,加工  $b_1, b_3$  的概率分别为 0.5.  $b_2, b_4$  的情况类似. 若采用最后一个缓冲区最先加工(LBFS)策略,则  $b_1, b_3$  同时有工件时,优先加工  $b_3$  中的工件;  $b_2, b_4$  同时有工件时,优先加工  $b_4$  中的工件.

考察具有如下形式状态转移阵的 QBD 型马氏链:

$$P = \begin{bmatrix} B_0 & A_0 & & & \\ A_2 & A_1 & A_0 & & \\ & A_2 & A_1 & A_0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中  $B_0, A_0, A_1, A_2$  是数或有限维矩阵. 类似于文献[8]中对 QBD 型马氏过程的结论,如果平稳分布  $X = [X_0, X_1, \dots]$  存在,则具有矩阵几何解的形式,满足

$$X_i = X_0 R^i, \quad i \geq 0, \quad (2)$$

其中  $R$  是二次矩阵方程

$$R^2 A_2 + R A_1 + A_0 = R \quad (3)$$

的最小非负解.  $R$  可用数值迭代法求得.

定义  $A = A_0 + A_1 + A_2, B[R] = B_0 + R A_2$ .  $X_0$  满足

$$\begin{cases} X_0 (B_0 + R A_2) = X_0 \\ X_0 (I - R)^{-1} e = 1 \end{cases}, \quad (4)$$

其中  $I$  为单位阵,  $e$  为相应维数的全 1 列矢量.

在输入为泊松流、加工时间为负指数分布、缓冲区容量半无限的通常假设下,可重入生产系统可化成 QBD 型模型. 本文研究的是以状态转移矩阵描述的 QBD 型马氏链,模型和结论与文献[8]中的有关内容类似,只是方程(3),(4)相应的形式略有不同. 当输入输出为其它分布时,也可将系统化成 QBD 型、G/M/1 型或 M/G/1 型模型. G/M/1 型系统的稳态分布仍具有矩阵几何解<sup>[8]</sup>, M/G/1 型系统的解可参见文献[9].

### 3 系统建模

由于 RS 策略下系统状态集是不可约的,而 LBFS 策略下是可约的. 现分别介绍对两种情况的不同处理,同时给出系统稳定的充要条件.

#### 3.1 随机调度(RS)策略下的模型

假设图 1 系统采用 RS 策略,适当选取时间尺度,可以设  $\lambda + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1$ ,这是对连续时间系统采样以获得相同稳态性能的离散时间系统的方法. 由于工件来流是泊松流,加工时间服从负指数分布,可以推得微小时间  $\Delta t$  的系统状态转移概率为

$$p_{(i,j,m,n),(i+1,j,m,n)}(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

$$P_{(i,j,0,n),(i-1,j+1,0,n)} | i > 0, j < H-1 (\Delta t) = \mu_1 \Delta t + o(\Delta t).$$

当  $b_1, b_3$  同时有工件时, 加工  $b_1, b_3$  的概率分别为 0.5,

$$P_{(i,j,m,n),(i-1,j+1,m,n)} | i > 0, m > 0, j < H-1 (\Delta t) = 0.5\mu_1 \Delta t + o(\Delta t);$$

当  $b_4$  已满时, 不能加工  $b_3$ , 以免发生阻塞, 只能加工  $b_1$

$$P_{(i,j,m,H-1),(i-1,j+1,m,H-1)} | i > 0, j < H-1 (\Delta t) = \mu_1 \Delta t + o(\Delta t).$$

其它转移概率依此类推, 即可得到一步状态转移阵  $P$ .

在本系统中, 某时刻某事件是否发生只与系统当前状态和系统所采用的调度策略有关, 而与系统以前的状态无关. 所以这样的随机过程具有马尔可夫性. 将状态转移矩阵  $P$  内的元素划成  $H \times H$  的块, 有许多块是相同或相似的. 记

$$\Lambda_1^0 = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_1 \end{bmatrix}_{H \times H}, \quad \Lambda_1^1 = \begin{bmatrix} 0.5\mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0.5\mu_1 & \\ & & & \mu_1 \end{bmatrix}_{H \times H}, \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} \mu_2 & & & \\ & 0.5\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0.5\mu_2 \end{bmatrix}_{H \times H},$$

$$\Lambda_3^0 = \begin{bmatrix} 0 & \mu_3 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \mu_3 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{H \times H}, \quad \Lambda_3^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5\mu_3 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0.5\mu_3 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{H \times H},$$

$$\Lambda_4^0 = \begin{bmatrix} * & & & \\ \mu_4 & * & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_4 & * \end{bmatrix}_{H \times H}, \quad \Lambda_4^1 = \begin{bmatrix} * & & & \\ 0.5\mu_4 & * & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0.5\mu_4 & * \end{bmatrix}_{H \times H},$$

其中 \* 是矩阵  $P$  的对角线元素, 保证  $P$  行和为 1. 继续这样的划分, 令

$$D_1 = \begin{bmatrix} \Lambda_1^0 & & & \\ & \Lambda_1^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_1^1 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & \Lambda_2 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \Lambda_2 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2}, \quad D_{34}^0 = \begin{bmatrix} \Lambda_4^0 & & & \\ & \Lambda_3^1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \Lambda_3^1 & \Lambda_4^0 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2},$$

$$D_{34}^1 = \begin{bmatrix} \Lambda_4^1 & & & \\ \Lambda_3^1 & \ddots & & \\ & \ddots & \Lambda_4^1 & \\ & & \Lambda_3^1 & \Lambda_4^0 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2}, \quad D_{34}^{00} = \begin{bmatrix} \Lambda_4^0 & & & \\ \Lambda_3^0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \Lambda_3^0 & \Lambda_4^0 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2}, \quad D_{34}^{10} = \begin{bmatrix} \Lambda_4^1 & & & \\ \Lambda_3^0 & \ddots & & \\ & \ddots & \Lambda_4^1 & \\ & & \Lambda_3^0 & \Lambda_4^0 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2};$$

再令

$$A_1 = \begin{bmatrix} D_{34}^0 & & & \\ D_2 & D_{34}^1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & D_2 & D_{34}^1 \end{bmatrix}_{H^3 \times H^3}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & D_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & D_1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{H^3 \times H^3}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} D_{34}^{00} & & & \\ D_2 & D_{34}^{10} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & D_2 & D_{34}^{10} \end{bmatrix}_{H^3 \times H^3},$$

$$A_0 = \lambda I,$$

状态转移阵  $P$  就可以写成式(1)的形式.

**定理 1.** 缓冲区容量半无限的可重入生产系统在 RS 策略作用下, 状态转移阵(1)是不



可约的.

证明. 如果所有状态之间均相通, 则系统不可约, 故只须证明各状态之间可达. 由于  $(i, j, m, n)$  到  $(0, 0, 0, 0)$  的转移概率显然大于 0, 只要考虑从  $(0, 0, 0, 0)$  开始的转化, 看它能否转移到  $(i, j, m, n)$ :

$$p_{(0,0,0,0),(1,0,0,0)} = \lambda, \text{由各步转移的独立性, 有 } p_{(0,0,0,0),(i,0,0,0)} |_{i>0} > \lambda^i > 0,$$

因为  $c_1 = \infty$ , 所以  $p_{(0,0,0,0),(i+j+m+n,0,0,0)} > 0$ . 同理

$$p_{(i+j+m+n,0,0,0),(i+j+m,n,0,0)} > \mu_1^n, \quad p_{(i+j+m,n,0,0),(i+j+m,0,n,0)} > \mu_2^n, \quad p_{(i+j+m,0,n,0),(i+j+m,0,0,n)} > \mu_3^n, \\ p_{(i+j+m,0,0,n),(i+j,m,0,n)} > \mu_1^m, \quad p_{(i+j,m,0,n),(i+j,0,m,n)} > (0.5\mu_2)^m, \quad p_{(i+j,0,m,n),(i,j,m,n)} > (0.5\mu_1)^j,$$

可得  $p_{(0,0,0,0),(i,j,m,n)} > 0$ . 即所有状态之间都是相通的, 所以系统(1)是不可约的. 证毕.

进而研究系统的稳定性. 系统的稳定性与矩阵  $A := A_0 + A_1 + A_2$  的性质有关, 因此先证明矩阵  $A$  具有以下性质:

**引理 1.** 系统(1)中的矩阵  $A$  是不可约的和随机的.

证明. 先证不可约性. 由  $A$  的定义, 可以把  $A$  阵解释成图 2 所示系统的状态转移阵, 有两个加工站, 三个加工步骤. 无穷多未加工工件存储在  $M_1$  前, 必须经  $M_1$  释放给  $b_1$ . 释放的工件是以  $\mu_1$  为参数的泊松流.  $M_1$  有两个功能, 一是释放工件入  $b_1$ , 二是加工  $b_2$  中的工件. 当  $b_2$  中有工件的时候,  $M_1$  释放工件入  $b_1$  的概率为 0.5, 加工  $b_2$  中的工件的概率也是 0.5.  $M_2$  的功能与图 1 中系统相同. 仍采用 RS 调度策略.

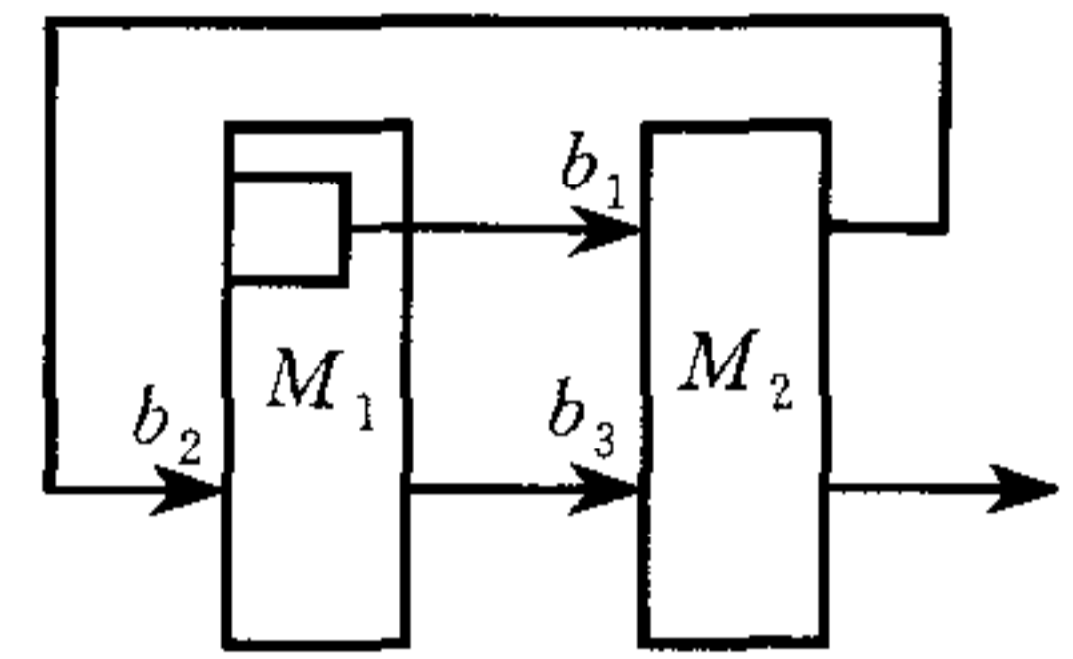


图 2 具有两个加工站 三道工序的系统

系统状态空间表示为  $T = \{(j, m, n), 0 \leq j, m, n < H\}$ .  $h_{(j,m,n)(j',m',n')}$  为从状态  $(j, m, n)$  到状态  $(j', m', n')$  的转移概率.

要证可约性, 只要证各状态之间都是相通的即可. 为此, 以  $(0, 0, 0)$  为中间状态, 如果任意状态都与之相通, 则所有状态之间都相通. 先看  $(j, m, n)$  到  $(0, 0, 0)$  的转移概率

$$h_{(j,m,n)(0,0,0)} > h_{(j,m,n)(j,m,0)} \times h_{(j,m,0)(j,0,0)} \times h_{(j,0,0)(0,0,0)} > \\ (0.5\mu_4)^n (0.5\mu_3)^m (0.5\mu_4)^m (0.5\mu_2)^j (0.5\mu_3)^j \mu_4^j > 0;$$

再看  $(0, 0, 0)$  到  $(j, m, n)$  的转移概率

$$h_{(0,0,0)(j,m,n)} > h_{(0,0,0)(n,0,0)} \times h_{(n,0,0)(n,0,0)} \times h_{(n,0,0)(0,0,n)} \times h_{(0,0,n)(m,0,n)} \times h_{(m,0,n)(0,m,n)} \times \\ h_{(0,m,n)(j,m,n)} > \mu_1^n \mu_2^n (0.5\mu_3)^n \mu_1^m (0.5\mu_2)^m (0.5\mu_1)^j > 0,$$

$A$  的不可约性得证.

再证随机性. 设  $e$  为适当维数的全 1 列矢量. 因原系统(1)是随机的, 所以  $Pe = e$ , 将  $P$  的表达式代入得  $A_0e + A_1e + A_2e = e$ , 即  $Ae = e$ . 所以  $A$  是随机的. 证毕.

**引理 2.** 不可约随机矩阵  $A$  存在不变测度  $\pi > 0$ , 满足  $\pi A = \pi, \pi e = 1$ .

证明. 先证  $\pi \neq 0$ . 为此须证  $(A - I)$  是奇异的. 令  $B = A - I$ , 因  $A$  是随机的,  $Ae = e$ , 则  $Be = Ae - e = 0$ , 即  $B$  的所有行和都为 0, 所以  $B = (A - I)$  奇异,  $\pi \neq 0$ .

再证  $\pi > 0$ .  $A$  代表一有限维不可约随机系统. 不可约非周期随机系统在经过无限次转移后, 系统状态或全是滑过的或零常返的, 或全是正常返的. 因  $\pi \neq 0$ , 所以不可能全是滑过的或零常返的. 若有一个状态是正常返的, 因系统状态是相通的, 所有状态都是正常返的. 所以  $\pi > 0$ . 证毕.

**引理 3**<sup>[8]</sup>. 若  $A$  是不可约的和随机的, 则不可约 QBD 型马氏链  $P$  是正常返的充要条件为

$$\pi A_2 e > \pi A_0 e, \tag{5}$$

且方程(4)所代表的有限维系统有正解  $X_0$ .  $\pi$  是  $A$  的稳态概率矢量.

此引理的意义可解释为:系统状态向工件少的方向转移的概率大于向工件多的方向转移的概率,系统才能稳定. 在应用时还需判定正解  $X_0$  是否存在. 但当  $B_0 + RA_2$  不可约时,此条件可省略. 本文所讨论的系统即属这一情形.

**引理 4.** 系统(1)中,如果  $A$  是不可约的,且  $R$  非负,则  $B[R] = B_0 + RA_2$  不可约. 如果  $(I - R)$  可逆,  $B[R]$  是随机阵. 以上两条件均满足时,方程(4)存在严格正解.

证明. 先证第一部分.  $A, B[R]$  的表达式分别为

$$A = \begin{bmatrix} D_{34}^0 + \lambda I & D_1 & & & \\ D_2 & D_{34}^1 + \lambda I & D_1 & & \\ & D_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & D_1 \\ & & & D_2 & D_{34}^1 + \lambda I \end{bmatrix},$$

$$B[R] = \begin{bmatrix} D_{34}^{00} & R_{1,1}D_1 & R_{1,2}D_1 & \cdots & R_{1,H-1}D_1 \\ D_2 & D_{34}^{10} + R_{2,1}D_1 & R_{2,2}D_1 & \cdots & R_{2,H-1}D_1 \\ & D_2 & D_{34}^{10} + R_{3,2}D_1 & \ddots & R_{3,H-1}D_1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & D_2 & D_{34}^{10} + R_{H,H-1}D_1 \end{bmatrix},$$

其中  $R_{ij}$  是将  $R$  阵化成  $H \times H$  个大小相同的方阵后,第  $i$  层,第  $j$  段的子矩阵. 比较上面两个矩阵可见:1) 对角线以下的部分相同; 2) 对角线以上部分,由于  $R$  是非负矩阵,  $R_{ii} \neq 0$ .  $R_{ii} D_1$  不会改变  $D_1$  元素的符号(正或零). 可见  $B[R]$  的非负元素等于或多于  $A$  阵; 3) 对角线上的子矩阵  $D_{34}^{00}$  与  $D_{34}^0$  对应元素符号相同,  $D_{34}^{10}$  与  $D_{34}^1$  对应元素符号相同. 它们对角线上的元素保证矩阵行和为 1.  $R_{i,i-1}D_1, \lambda I$  对应元素的符号也相同.

由此可见,对于  $A$  中每个大于 0 的元素,  $B[R]$  中都有一个相同位置的大于 0 的元素与之对应. 因而,如果  $A$  是不可约的,则  $B[R]$  也是不可约的.  $B[R]$  的随机性见文献[5]定理 1.2.1 的证明. 这里 QBD 型过程是 G/M/1 型过程的一个特例. 因而  $B[R]e = e$ , 即  $B[R]$  为随机阵. 对不可约随机阵  $B[R]$ , 应用引理 3 可知  $B[R]$  存在不变测度,且方程(4)有严格正解. 证毕.

现将  $A$  的不变测度写成  $H$  个矢量的形式,  $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_H]$ ,  $\pi_i$  为  $H^2$  维矢量. 结合以上引理可得如下定理.

**定理 2.** 在 RS 作用下,缓冲区半无限的可重入生产系统(1)稳定的充要条件是

$$(\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_{H-1})^* D_1 e > \lambda. \tag{6}$$

证明. 将  $A_2, A_0$  的表达式代入(5)式,得  $[\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_H]^* D_1 e > [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_H] \lambda e$ . 因  $\pi e = e$ , 得(6)式.

由引理 1 知  $A$  是不可约的和随机的, 又由引理 4 知, 方程(4)有严格正解, 引理 3 的第二部分条件得证, 从而定理成立. 证毕.

### 3.2 LBFS 作用下的系统模型

LBFS 作用下的系统状态与 RS 下有所不同, 其状态集是可约的. 先证明以下定理.



**定理 3.** 状态  $(0,0,0,0)$  是由状态空间  $J$  中任意状态可达的.

证明. 只需证  $J$  中任意状态  $(i,j,m,n)$  转移到  $(0,0,0,0)$  的概率大于 0.

$$\begin{aligned}
P_{(i,j,m,n)(0,0,0,0)} &> P_{(i,j,m,n)(i,j,m,0)} \times P_{(i,j,m,0)(i,j,0,m)} \times P_{(i,j,0,m)(i,j,0,0)} \times P_{(i,j,0,0)(i,0,j,0)} \times \\
&P_{(i,0,j,0)(i,0,0,j)} \times P_{(i,0,0,j)(i,0,0,0)} \times P_{(i,0,0,0)(0,0,0,0)} > \\
&\mu_4^n \mu_3^m \mu_4^m \mu_2^j \mu_3^j \mu_4^j \mu_1^i \mu_2^i \mu_3^i \mu_4^i > 0.
\end{aligned}$$

证毕.

**定理 4.** 状态  $(i,j,m,n)$  若满足下列条件之一,则它是由  $(0,0,0,0)$  不可达的.

- 1)  $j+m \geq H$ ; 2)  $m+n \geq H$ ; 3)  $m > 0$  且  $j+m+n \geq H$ .

证明. 由系统描述中,可知在 LBFS 作用下,系统有如下特点:

- 1)  $m > 0$  时,  $j$  不能增加. 因为  $b_3$  中有工件时,  $b_1$  不能加工;
- 2)  $n > 0$  时,  $m$  不能增加. 因为  $b_4$  中有工件时,  $b_2$  不能加工;
- 3)  $m = 0$  时,  $j$  可以增加.

考察特点 1),从  $(0,0,0,0)$  开始,工件由  $b_1$  向下游流动时,先到  $b_2$ ,后到  $b_3$ .  $b_2$  中能存储的工件数最多  $H-1$  个,而一旦  $b_3$  中有工件,  $b_2$  中的工件数就不能增加. 所以  $b_2, b_3$  中的工件数之和最多为  $H-1$  个.  $j+m \geq H$  的状态是由  $(0,0,0,0)$  不可能达到的.

考察特点 2),与前面分析类似. 从  $(0,0,0,0)$  开始,工件由  $b_1$  向下游流动时,先到  $b_3$ ,后到  $b_4$ .  $b_3$  中能存储的工件数最多  $H-1$  个,而一旦  $b_4$  中有工件,  $b_3$  中的工件数就不能增加. 所以  $b_3, b_4$  中的工件数之和最多为  $H-1$  个.  $m+n \geq H$  的状态是由  $(0,0,0,0)$  无法达到的.

条件 3)又可分为三种情况:

- a)  $n=0$ ,变成条件 1);
- b)  $j=0$ ,变成条件 2);
- c)  $j,m,n > 0$ ,工件由  $b_2$  到  $b_3$ ,再到  $b_4$ . 因  $m > 0$ ,  $b_2$  中的工件数不能增加;因  $n > 0$ ,  $b_3$  中的工件数不能增加. 所以  $b_2, b_3, b_4$  中流动的工件数就是最初进入  $b_2$  的工件数,不能大于  $H-1$  个.

由特点 3)知只有当  $m=0$  时,  $b_2$  中的工件数可以增加,  $j+m+n$  才有可能大于  $H-1$ . 但因  $n > 0$ ,  $b_3$  中的工件数不能增加,不可能达到  $m > 0$  的状态. 证毕.

**推论 1.** LBFS 作用下的缓冲区半无限的可重入生产系统的状态集是可约的.

**定理 5.** 子状态集  $J' = \{(i,j,m,n) | j+m < H, m+n < H, m > 0 \text{ 时 } j+m+n < H\}$  是一吸收的不可约集.

证明. 先证不可约性. 即证  $J'$  中任意状态之间是相通的. 由定理 3 知,  $J'$  中任意状态均可达到  $(0,0,0,0)$ . 不妨将  $(0,0,0,0)$  作为中间状态. 为简便用“ $A \rightarrow B$ ”表示  $A$  到  $B$  是可达的.

$m > 0$  时,  $(0,0,0,0) \rightarrow (j+m+n,0,0,0) \rightarrow (0,j+m+n,0,0) \rightarrow (0,j,m+n,0) \rightarrow (0,j,m,n) \rightarrow (i,j,m,n)$ ;  $m=0$  时,  $(0,0,0,0) \rightarrow (n,0,0,0) \rightarrow (0,n,0,0) \rightarrow (0,0,n,0) \rightarrow (0,0,0,n) \rightarrow (j,0,0,n) \rightarrow (0,j,0,n) \rightarrow (i,j,0,n)$ . 可见  $J'$  中任意状态之间是相通的,即  $J'$  不可约.

再证  $J'$  是吸收的,即  $J'$  中的状态最终回到  $J'$  的概率为 1. 用反证法. 若  $J'$  不是吸收的,则  $(0,0,0,0)$  到达  $J'$  补集的概率大于 0,就是说  $(0,0,0,0)$  可到达  $J'$  的补集(用  $(J')^c$  表示  $J'$  的补集). 这与定理 4 矛盾,所以  $J'$  是吸收的. 证毕.

至此,可将系统状态分为吸收的不可约集  $J'$  和可约集  $(J')^c$ . 由定理 3 知  $(J')^c$  中的状态

经有限次转移后也会落入  $J'$  中,  $(J')^c$  的稳态分布概率为 0, 所以分析系统稳态性能时只需考虑  $J'$ . 设  $P$  为状态集  $J'$  的一步状态转移阵, 状态按字典序排列. 如果系统存在稳态分布并用  $X' = \{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots\}$  表示. 以  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_4$  记下列形状矩阵

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \\ & \mu_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_1 \end{bmatrix}_{H \times H}, \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{H \times H},$$

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} 0 & \mu_3 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \mu_3 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{H \times H}, \quad \Lambda_4 = \begin{bmatrix} * & & & \\ \mu_4 & * & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_4 & * \end{bmatrix}_{H \times H},$$

其中  $*$  是矩阵  $P$  的对角线元素, 保证  $P$  行和为 1.

用  $\Lambda_i(k, c)$  表示  $\Lambda_i$  第 1 行到第  $k$  行, 第 1 列到第  $c$  列所构成的子块.  $k=0$  或  $c=0$  时说明此子块不存在. 再定义

$$D_{34}^{i,i} = \begin{bmatrix} \Lambda_4(H, H) \\ \Lambda_3(H-i, H) & \Lambda_4(H-i, H-i) \\ & \Lambda_3(H-i-1, H-i) & \Lambda_4(H-i-1, H-i-1) \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \Lambda_3(0, 1) & \Lambda_4(0, 0) \end{bmatrix}_{S(i) \times S(i)},$$

$$D_2^{i,(i-1)} = \begin{bmatrix} H \text{列全 } 0 \text{ 阵} & \Lambda_2(H, H-i+1) \\ & \Lambda_2(H-i, H-i) \\ & & \Lambda_2(H-i-1, H-i-1) \\ & & & \ddots \\ & & & & \Lambda_2(0, 0) \end{bmatrix}_{S(i) \times S(i-1)},$$

$$D_1^{i,(i-1)} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{S(i) \times S(i+1)},$$

这里  $S(i) = H + (H-i) + \dots + 0 = H + \frac{(H-i)(H-i+1)}{2}$ . 然后再定义

$$A_1 = \begin{bmatrix} D_{34}^{1,1} \\ D_2^{2,1} & D_{34}^{2,2} \\ & \ddots & \ddots \\ & & D_2^{H,H-1} & D_{34}^{H,H} \end{bmatrix}_{T \times T}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \frac{H \times (H+1)}{2} \text{列的全 } 0 \text{ 阵 } D_1^{1,2} \\ & \ddots & \\ & & D_1^{H-1,H} \end{bmatrix}_{T \times T},$$

其中  $T = \sum_{i=1}^H \left( H + \frac{(H-i)(H-i+1)}{2} \right) = \frac{H^2(H+1)}{2} - \frac{H(H-1)(2H-1)}{6}$ ,  $A_0 = \lambda I$ ,

$I$  为单位阵.

状态集  $J'$  的状态转移阵  $P$  就可以写成式(1)的形式.



引理 5. 矩阵  $A$  是不可约的和随机的.

引理 6. 如果  $A$  是不可约的,且  $R$  非负,则  $B[R]=B_0+RA_2$  是不可约的. 如果  $(I-R)$  可逆, $B[R]$ 是随机的. 以上两条件均满足时,方程(4)存在严格正解.

证明与 3.1 中的引理证明类似,在此从略.

定理 6. 若  $A$  是不可约的和随机的,系统(1)为正常返的充要条件是

$$\mu_1 \sum_{i \in \sigma} \pi_i > \lambda, \tag{7}$$

其中  $\sigma = \left\{ k \mid \sum_{i=0}^j \frac{(H-i)(H-i+1)}{2} < k \leq \sum_{i=0}^j \frac{(H-i)(H-i+1)}{2} + H, j=0, \dots, H-1 \right\}$ .

证明. 将  $A_0$  的表达式代入(5)式得  $\pi A_2 e > \pi \lambda I e$  继续代入  $A_2$  的表达式,即得(7)式.

(本节引理 3 的条件可用与定理 2 类似的方法证明其成立,不再重复.)

### 4 LBFS 与 RS 策略作用下的系统的比较

可以从两方面进行比较:一是稳定条件的严格程度;二是相同条件下的稳态队长.

排队网络研究中的一个重要指标是平均队长. 用  $L_1, L_2, L_3, L_4$  分别表示四个缓冲区的平均队长,

$$L_1 = \sum_{i=0}^{\infty} i * \sum_{j=0}^{H-1} \sum_{m=0}^{H-1} \sum_{n=0}^{H-1} x_k, \quad L_2 = \sum_{j=0}^{H-1} j * \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{H-1} \sum_{n=0}^{H-1} x_k,$$

其中  $x_k$  是  $X$  中的元素,  $k=i * H^3 + j * H^2 + m * H + n$ .  $L_3, L_4$  的表达式和  $L_2$  类似.

例 1. 对于图 1 所示系统,参数为  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 3/13, \lambda = 1/13, H = 3$ . 在 LBFS 作用下,由(7)式可判定系统稳定. 由式(2),(4)可得系统稳态分布. 系统稳态队长

$$L = [9.8630, 0.7767, 0.4132, 0.3733].$$

而在 RS 策略作用下,由(6)式可判定系统是不稳定的.

这说明,对图 1 所示系统,在给定参数下,RS 比 LBFS 所要求的稳定条件要苛刻.

例 2. 仍是图 1 所示系统,参数为  $\mu_1 = \mu_2 = 3/14, \mu_3 = \mu_4 = 3.5/14, \lambda = 1/14, H = 3$ . 该系统在 RS 和 LBFS 策略下均稳定. 稳态队长分别为

$$L_{RS} = [7.8632, 0.9953, 0.8422, 0.5631], \quad L_{LBFS} = [3.8021, 0.6917, 0.3435, 0.3146].$$

可见此系统中 LBFS 策略的稳态性能优于 RS 策略.

以往的调度策略比较只能通过仿真,或者粗略地按系统性能指标的上下界来进行. 本文则提供了一种性能比较的数值方法,可以求出状态的稳态分布,从而优于其它已有方法.

### 5 其它系统的模型

以上给出图1所示系统的模型及稳定性分析. 其它可重入生产系统的模型也可用类似方法得到. 为说明调度策略的规律,介绍图 3 所示系统,这是 Whitt<sup>[10]</sup>和 Lu, Kumar<sup>[11]</sup>研究过的网络,工件路径为  $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_2 \rightarrow M_1$ .

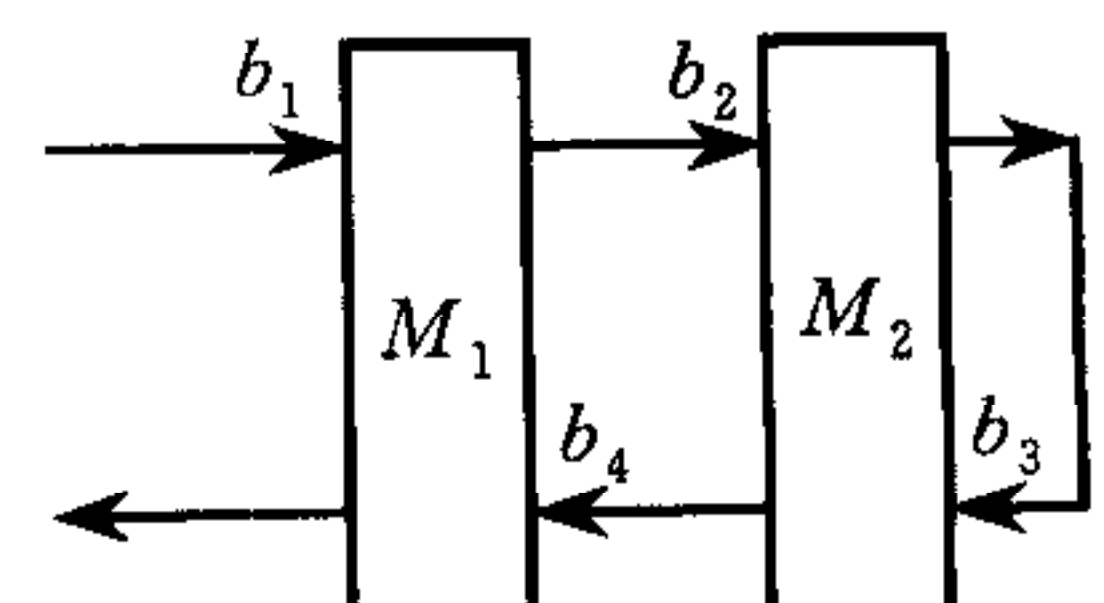


图 3 文献[10,11]中的系统结构图

5.1 系统在 RS 作用下的模型可仿照第 3.1 节推出为

$$\begin{aligned}
 \Lambda_1 &= \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \\ & 0.5\mu_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0.5\mu_1 \end{bmatrix}_{H \times H}, & \Lambda_2^0 &= \begin{bmatrix} \mu_2 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_2 \end{bmatrix}_{H \times H}, \\
 \Lambda_2^1 &= \begin{bmatrix} 0.5\mu_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0.5\mu_2 & \\ & & & \mu_2 \end{bmatrix}_{H \times H}, & \Lambda_3^0 &= \begin{bmatrix} 0 & \mu_3 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \mu_3 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{H \times H}, \\
 \Lambda_3^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.5\mu_3 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0.5\mu_3 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{H \times H}, & \Lambda_4^0 &= \begin{bmatrix} * & & & \\ \mu_4 & * & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_4 & * \end{bmatrix}_{H \times H}, \\
 \Lambda_4^1 &= \begin{bmatrix} * & & & \\ 0.5\mu_4 & * & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0.5\mu_4 & * \end{bmatrix}_{H \times H},
 \end{aligned}$$

其中 \* 代表 P 的对角元素, 保证 P 行和为 1.

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & & \\ & \Lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_1 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2}, & D_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \Lambda_2^0 & & \\ & \Lambda_2^1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_2^1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2}, \\
 D_{34}^{00} &= \begin{bmatrix} \Lambda_4^0 & & & \\ \Lambda_3^0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \Lambda_3^0 & \Lambda_4^0 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2}, & D_{34}^{01} &= \begin{bmatrix} \Lambda_4^0 & & & \\ \Lambda_3^1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \Lambda_3^1 & \ddots \\ & & & \Lambda_3^0 & \Lambda_4^0 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2}, \\
 D_{34}^{10} &= \begin{bmatrix} \Lambda_4^1 & & & \\ \Lambda_3^0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \Lambda_3^0 & \Lambda_4^1 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2}, & D_{34}^{11} &= \begin{bmatrix} \Lambda_4^1 & & & \\ \Lambda_3^1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \Lambda_3^1 & \ddots \\ & & & \Lambda_3^0 & \Lambda_4^1 \end{bmatrix}_{H^2 \times H^2}, \\
 A_1 &= \begin{bmatrix} D_{34}^{10} & & & \\ D_2 & D_{34}^{11} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & D_{34}^{11} \\ & & & D_2 & D_{34}^{10} \end{bmatrix}_{H^3 \times H^3}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & D_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & D_1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{H^3 \times H^3},
 \end{aligned}$$



$$B_0 = \begin{bmatrix} D_{34}^{00} & & & & \\ D_2 & D_{34}^{01} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & D_2 & D_{34}^{01} \end{bmatrix}_{H^3 \times H^3}, \quad A_0 = \lambda I,$$

状态转移阵  $P$  就可以写成(1)的形式.

**定理 7.** 图 3 所示缓冲区半无限系统在 RS 作用下正常返的充要条件是

$$(\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_{H-1}) * D_1 e > \lambda. \tag{8}$$

**5.2 LBFS 作用下的系统模型:**

在 LBFS 作用下系统有如下性质:

**定理 8.** 如果满足下面条件之一,状态  $(i, j, m, n)$  是由  $(0, 0, 0, 0)$  不可达的.

- 1)  $m > 1$ , 或 2)  $j + m + n > H$ .

证明. 首先注意系统具有如下特点:

C1. 当  $n > 0$  时,  $b_1$  不能被加工. 即如果  $n > 0$ ,  $b_2$  中的工件数不能增加;

C2. 当  $m > 0$  时,  $b_2$  不能被加工. 即如果  $m > 0$ ,  $b_3$  中的工件数不能增加.

由 C2 可知一旦  $m$  从 0 增加到 1,  $m$  就不能继续增加. 也就是说, 如果最初  $m = 0$ , 则  $m \leq 1$ . 从 C1 可知一旦  $n$  从 0 增加到 1,  $j$  就不能继续增加. 而  $n$  从 0 增加到 1 时, 必有  $m$  从 1 到 0, 则  $j + m + n$  不能继续增加了.  $b_2, b_3, b_4$  中的最多工件数为  $H - 1 + 1 = H$ . 证毕.

**定理 9.** LBFS 作用下的图 3 系统的状态集  $J$  的子集  $G := \{(i, j, m, n), m \leq 1, j + m + n \leq H\}$  是吸收的和不可约的.

证明略.

LBFS 作用下的系统模型为

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{H \times H}, \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 & & \\ 0 & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_2 \end{bmatrix}_{H \times H},$$

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} 0 & \mu_3 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \mu_3 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{H \times H}, \quad \Lambda_4 = \begin{bmatrix} * & & & \\ \mu_4 & * & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_4 & * \end{bmatrix}_{H \times H},$$

其中 \* 是非 0 对角元素.

$$D_{34}^0 = \begin{bmatrix} \Lambda_4 & 0 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 \end{bmatrix}, \quad D_{34}^i = \begin{bmatrix} \Lambda_4(H-i+1, H-i+1) & \\ \Lambda_3(H-i, H-i+1) & \Lambda_4(H-i, H-i) \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, H-1;$$

$$D_1^0 = \begin{bmatrix} \Lambda_1(H, H) & 0 \\ 0 & \Lambda_1(H, H-1) \end{bmatrix},$$

$$D_1^i = \begin{bmatrix} \Lambda_1(H-i+1, H-i) & 0 \\ 0 & \Lambda_1(H-i, H-i+1) \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, H-2;$$

$$D_2^1 = \begin{bmatrix} H \text{ 列 } 0 \text{ 元素} & \Lambda_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2^i = \begin{bmatrix} (H-i+2) \text{ 列 } 0 \text{ 元素} & \Lambda_2(H-i+1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i=2, \dots, H-1.$$

其中  $\Lambda_i(l, k)$  代表  $\Lambda_i$  的前  $l$  行前  $k$  列的子矩阵.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2H \text{ 列 } 0 \text{ 元素} & D_1^0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & D_1^{H-2} & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{T \times T}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} D_{34}^0 & & & & \\ D_2^1 & D_{34}^1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D_2^{H-1} & D_{34}^{H-1} \end{bmatrix}_{T \times T},$$

其中  $T = H + H + H + H - 1 + H - 1 + H - 2 + H - 2 + \dots + 1 = H^2 + 2H - 1$ .

$A_0 = \lambda I$ .  $B_0$  和  $A_1$  的表达式相同, 除对角元素由下式决定

$$A_0 e + A_1 e + A_2 e = e, \quad B_0 e + A_0 e = e,$$

子集  $G$  的状态转移阵具有(1)所示标准形.

**定理 10.** 图 3 所示缓冲区半无限的系统在 LBFS 作用下正常返的充要条件是

$$\pi A_2 e > \lambda. \quad (9)$$

与上式等价的一个表达式是

$$\mu_1 \sum_{i \in \sigma} \pi_i > \lambda,$$

其中  $\sigma = \left\{ k \mid k = j(2H+1) - 2 \sum_{l=1}^{j-1} l, H(2j+1) - 2 \sum_{l=1}^{j-1} l + 1, j = 1, \dots, H-1 \right\}$ .

### 5.3 数值例子

**例 3.** 图 3 所示系统, 参数设为  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 2.5/11, \lambda = 1/11, H = 4$ . RS 作用下系统稳定; LBFS 作用下系统不稳定.

**例 4.** 参数设为  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 3/13, \lambda = 1/13, H = 3$ . 系统在两种策略下都稳定, 且有

$$\text{RS: } L_{\text{RS}} = [3.2910, 0.8154, 0.7435, 0.6763];$$

$$\text{LBFS: } L_{\text{LBFS}} = [5.4860, 0.8032, 0.3444, 0.3908].$$

**例 5.** 在 RS 下, 参数设为  $\mu_1 = \mu_2 = 2.6/11.2, \mu_3 = \mu_4 = 2.5/11.2, \lambda = 1/11.2$ .

$H = 3$  时, 系统不稳定;  $H = 4$  时, 系统稳定, 平均队长为:  $L_{\text{RS}} = [8.6010, 1.4158, 1.3125, 1.1581]$ .

**例 6.** 在 LBFS 下, 参数与例 4 相同.

$H = 3$  时, 系统不稳定;  $H = 4$  时, 系统稳定, 平均队长为:  $L_{\text{LBFS}} = [43.7438, 1.4252, 0.4032, 0.5139]$ .

### 5.4 小结

以上结果表明

1) 图 3 系统在 LBFS 作用下的性能不如 RS. 在例 3 中, 相同参数下, RS 使系统稳定, 而 LBFS 可能使系统不稳定. 例 4 中, 也是相同参数, RS 下的平均队长小于 LBFS. 这可能因为 LBFS 下,  $b_3$  的容量相当于 1, 引起  $b_2$  中工件的延时.

这一结果与第 4 部分中的结果正相反. 这说明, 调度策略对系统性能的影响还与系统自身的结构有关.

2) 缓冲区容量越小, 系统越容易失稳. 在例 5 和例 6 中, 系统当  $H = 4$  时稳定, 但  $H = 3$  时不稳定.

我们猜测  $R$  (见方程(3)) 的谱半径越小, 系统的性能越好, 但这还需要进一步的论证.



## 6 结论

本文考虑了除第一个缓冲区外,其它缓冲区容量均为有限的情形,与缓冲区容量无限的情形相比,更接近实际情况,也更为困难.具体对两种两站四缓冲区的可重入生产系统进行了建模分析并得到了系统状态稳态分布的数值结果.模型状态集是否可约与系统采用的调度策略有关.在随机调度下系统状态集是不可约的,而 LBFS 规则下系统状态集可约.将可约状态集化成不可约吸收的状态集和可约的状态集的和,然后只需对不可约的吸收集分析稳态性能.文中还对系统的稳定性进行分析,给出了系统稳定的充要条件.

利用系统的 QBD 型模型不仅可以通过数值解法得到状态的稳态分布,而且为不同的调度策略的比较提供了定量的依据.当然,和其它排队网络一样,这种模型也存在对高维系统复杂度过大问题.但对阶次不很高的可重入生产系统,这种模型原则上是可用的.

## 参 考 文 献

- 1 Kumar P R. Re-entrant lines. *Queueing Systems*, 1993, **13**:87~110
- 2 Harrison J Michael. Brownian models of queueing networks with heterogeneous customer populations. *The IMA Volume in Mathematics and Its Applications*, 1988, **10**:147~186
- 3 Yao David D ed. *Stochastic Modeling and Analysis of Manufacturing Systems*. Springer-Verlag, 1994
- 4 Kumar P R, Meyn S P. Stability of queueing networks and scheduling policies. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1995, **40**(2):251~260
- 5 Dai J G, John H, Vande Vate. Global Stability of Two-Station Queueing Networks. *Stochastic Networks: Stability and Rare Events*, Paul Glasserman ed. Springer-Verlag, 1996. 1~26
- 6 Ou JiHong, Wein Lawrence M. Performance bounds for scheduling queueing networks. *The Annals of Applied Probability*, 1992, **2**(2):460~480
- 7 Kumar Sunil, Kumar P R. Performance bounds for queueing networks and scheduling policies. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **39**(8):1600~1611
- 8 Marcel F Neuts. *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*. The Johns Hopkins University Press, 1981
- 9 Neuts M F. *Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications*. Marcel Dekker Inc, 1989
- 10 Whitt Ward. Large fluctuations in a deterministic multiclass network of queues. *Management Science*, 1993, **39**(8):1020~1028
- 11 Lu Steve H, Kumar P R. Distributed scheduling based on due dates and buffer priorities. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1991, **36**(12):1406~1416

**郑应平** 男,1941年生,研究员,博士生导师.近期研究领域为复杂系统控制理论、决策和博弈理论及其在制造、通信等方面的应用.

**赵丽娜** 女,1973年生,1994年和1997年在哈尔滨工程大学获自动控制专业学士和硕士学位,2000年在中国科学院自动化研究所获博士学位.研究方向为生产系统的调度、优化及排队网络的性能分析.

**王利存** 男,1969年生,1992年和1998年分别在南京理工大学和哈尔滨工程大学获应用数学学士和自动控制硕士学位,2001年3月在中国科学院自动化研究所获博士学位.研究方向为强化学习、马氏决策过程、随机系统性能分析与优化.